УДК 517.51
ББК В161.5

И. Ю. Батухтина, А. Г. Батухтин
г. Чита, Россия

Ограничительные неравенства, полученные на основе шахматной решетки

Для аппроксимирующих операторов $L_n : C([0,1]^r) \to P_n$ (n – размерность аппроксимирующего пространства), для которых выполнено условие $L_n(1,x) = 1$, получена оценка $d(L_n) \geq \frac{1}{2\sqrt[r]{4}}n^{-2/r} + o(n^{-2/r})$, где $d(L_n) = \left\|L_n(|t-x|^2, x)\right\|$.

Ключевые слова: аппроксимирующие операторы, аппроксимационные оценки, упаковки шаров, шахматные упаковки, кубическая решетка.

I. Yu. Batukhtina, A. G. Batukhtin
Chita, Russia

Restrictive Inequalities Derived from Checkerboard Lattice

For approximating the operators of the form $L_n : C([0,1]^r) \to P_n$ (n – the dimension of the approximating space), for which condition, $L_n(1,x) = 1$, an estimate of $d(L_n) \geq \frac{1}{2\sqrt[r]{4}}n^{-2/r} + o(n^{-2/r})$, where $d(L_n) = \left\|L_n(|t-x|^2, x)\right\|$.

Keywords: approximating operators, approximate estimates, packing of spheres, chess packaging, cubic lattice.

Приводятся краткие биографические сведения об Эваристе Галуа. Основное внимание уделено описанию процесса создания теории Галуа и истории освоения математическим сообществом идей Галуа и их дальнейшего развития.

Одной из характеристик приближения функции является величина отклонения последовательности аппроксимирующих операторов относительно исходной функции. В работе предложено интерпретировать эту величину в терминах аппроксимационных оценок вида $\|L_n(f(t),x) - f(x)\| \leq \alpha_n$ (норма чебышевская), где $f(t)$ – приближаемая функция, $L_n : C(Q) \to P_n$ – приближающая последовательность линейных операторов, для которых выполнены условия $L_n(1,x) = 1$, $Q = [0,1]^r$, $r \geq 1$ – целое, $P_n \subset C(Q)$.

Получение аппроксимационных оценок $\|L_n(f(t),x) - f(x)\| \leq \alpha_n$ является одной из основных задач теории приближений. Величина α_n зависит от характеристик f и от тех или иных характеристик аппроксимирующих операторов. В случае положительных операторов особо выделим характеристику $d(L_n) = \left\|L_n(|t-x|^2, x)\right\|$ (ограничительные неравенства – оценки снизу величины $d(L_n)$) [1, 2].

Ограничительные неравенства определяют предел возможности приближения теми или иными аппроксимирующими последовательностями. Задача получения ограничительных неравенств величины $d(L_n)$ связывается с известной задачей нахождения наиболее плотных упаковок шаров в r-мерных пространствах. Ключевое значение имеет следующее вспомогательное утверждение (доказательство см. [3]): если существует множество, состоящее из $n+1$ попарно не пересекающихся открытых шаров диаметра a и с центрами, принадлежащими $Q = [0,1]^r$, то выполняется неравенство

$$\left\|L_n(|t-x|^2, x)\right\| \geq \frac{1}{4}a^2. \tag{1}$$

Получение оценки величины $d(L_n)$ сводится к задаче подбора множества из $n+1$ шаров, удовлетворяющих условию леммы. При этом оценка будет тем сильнее, чем больше диаметр шаров a. Для того, чтобы использовать формулу (1) для какого-либо r, надо найти возможно более плотную решетчатую упаковку пространства R^r и подобрать a таким образом, чтобы в $[0,1]^r$ входило не менее $n+1$ центров шаров упаковки.

Для дальнейшего изложения обратимся к известным терминам теории решетчатых упаковок [4]. Множество открытых r-мерных шаров $\{S_i\} \subset R^r$ ($\forall i \neq j$, $S_i \cap S_j$ пусто) называется решетчатой упаковкой, если оно обладает следующими свойствами: 0 – является центром шара, принадлежащего упаковке, и если имеются шары с центрами u и v, то имеются шары с центрами $u+v$ и $u-v$.

Плотностью упаковки назовем предел $D = \lim\limits_{a\to 0} V(K_r \cap M(\sigma, a))$, если он существует, где K_r – единичный r-мерный куб, $M(\sigma, a)$ – множество точек, принадлежащих шарам упаковки σ, a – диаметр шаров упаковки, $V(F)$ – объем множества $F \subset R^r$ (r-мерная мера Лебега). Если известна плотность D данной решетчатой упаковки и в K_r находится $n+\gamma_n$ центров шаров этой упаковки ($\gamma_n = o(n)$), то для V_r – объема каждого шара получаем

$$V_r = \frac{D+o(1)}{n+\gamma_n} = \frac{D}{n} + o(n^{-1}). \tag{2}$$

Если объем r-мерного шара V_r и его диаметр связаны соотношением $a = \varphi(V_r)$ ($a = O((V_r)^{1/r})$), то из (1) и (2) получим

$$d(L_n) \geq 0,25a^2 + o(n^{-2/r}). \tag{3}$$

Плотнейшие известные упаковки в размерностях при $r \geq 3$ – это шахматные упаковки D_r [4], в которой центрами шаров являются точки с целыми координатами, в сумме дающие четное число. Такая решетка определяется в [4] следующим образом:

$$D_r = \{(x_0, x_1, ..., x_r) \in Z^r : x_0 + x_1 + ... + x_r \ - \ \textit{четно}\}.$$

Другими словами, D_r получается, если раскрасить точки из Z^r попеременно в шахматном порядке в красный и белый цвет и взять красные точки. Решетки D_3, D_4 и D_5 дают наилучшие возможные решетчатые упаковки в размерностях 3, 4 и 5. При $n = 3$ имеем $D_3 \approx A_3$, где A_r – гранецентрированная кубическая решетка (обозначение $D_3 \approx A_3$ означает, что плотности этих решеток совпадают). Порождающая матрица для шахматной упаковки D_r имеет вид

$$\begin{pmatrix} 2\frac{a}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ \frac{a}{\sqrt{2}} & \frac{a}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & ... & 0 \\ \frac{a}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{a}{\sqrt{2}} & 0 & ... & 0 \\ \frac{a}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{a}{\sqrt{2}} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ \frac{a}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & ... & \frac{a}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Детерминант r-мерной решетки равен:

$$\det D_r = \left[2\prod_{p=1}^{r}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)\right]^2 = \left[2\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^r\right]^2.$$

Тогда для плотности $D(D_r)$ решетки D_r получим

$$D(D_r) = \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{2^{\frac{r+2}{2}}\left(\frac{r}{2}\right)!}, \ \textit{если } r - \textit{четно, и}$$

$$D(D_r) = \frac{\pi^{\frac{r-1}{2}}\left(\frac{r-1}{2}\right)!}{2^{\frac{2-r}{2}}r!}, \ \textit{если } r - \textit{нечетно.}$$

Отсюда и из соотношения (2) для диаметра a упаковки D_r в случае четного r получаем

$$a = 2^{\frac{r-2}{2r}}n^{-\frac{1}{r}} + o(n^{-\frac{1}{n}}) \tag{4}$$

(подобные рассуждения для нечетного r приведут к аналогичному результату). Из (1) и (4) следует

Теорема. *Пусть $L_n : C([0,1]^r) \to P_n$ – последовательность линейных положительных операторов. Тогда для величины $d(L_n) = \left\|L_n(|t-x|^2, x)\right\|$ выполняется оценка $d(L_n) \geq \frac{1}{2\sqrt[r]{4}}n^{-\frac{2}{r}} + o\left(n^{-\frac{2}{r}}\right)$.*

Список литературы

1. Батухтина И. Ю. Об одном ограничительном неравенстве теории приближения // Обозрение прикладной и промышленной математики. М., 2008. Т. 15, В. 1, С. 110–111.

2. Карымова Е. Ю., Кобысова И. Ю., Шерстюк Т. Ю. Тригонометрические операторы Баскакова и расчет цифровых фильтров нижних частот // Обозрение прикладной и промышленной математики. М., 2008. Т. 15, В. 2, С. 111.

3. Кобысова И. Ю. Об оценке снизу величины $\left\| L_n(|t-x|^2, x) \right\|$ // Вестник ЧГТУ. Вып. 28. Чита. ЧГТУ, 2003. С. 119–122.

4. Конвей Дж. и Слоэн Н. Упаковки шаров, решетки и группы. М.: Мир, 1990. С. 18–30.

Рукопись поступила в редакцию 25 апреля 2011 г.