УДК 517.9
ББК В 161.6

А. Э. Менчер
г. Чита, Россия

О дискретных арбитражных процедурах со взвешенными игроками

Рассматривается игра с нулевой суммой со взвешенными игроками, связанная с двумя арбитражными процедурами. Для случая, когда предложения арбитра равновероятно сосредоточены в точках -1, 0 и 1, найдено равновесие в игре в обеих процедурах.

Ключевые слова: арбитражная процедура, стратегия, равновесие.

A. E. Mencher
Chita, Russia

On the Issue of Discrete Arbitral Procedures with Weighted Players

We consider a zero-sum game with weighted players related with two arbitration procedures. For the case in which the arbitrator's offers are concentrated in the points -1, 0 and 1 with equal probabilities the equilibrium in the game is found.

Keywords: arbitration procedure, strategy, equilibrium.

1. Введение

Мы рассматриваем бескоалиционную игру с нулевой суммой, в которой игроки L и M, именуемые, соответственно, как работник и работодатель, ведут переговоры об установлении заработной платы. Игрок L делает предложение x, а игрок M — предложение y; x и y – произвольные действительные числа. Если $x \le y$, то конфликта нет и игроки соглашаются на выплату жалованья, равного $\frac{x+y}{2}$. Если же $x > y$, игроки апеллируют к арбитру A, который руководствуется своими соображениями о справедливости. Обозначим решение арбитра через z.

В настоящей работе для достижения равновесия в игре используются две арбитражные процедуры. В обеих из них выигрыш имеет следующий вид: $H(x, y) = EH_z(x, y)$.

В первой из процедур

$$H_z(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{2}, & \text{если } x \le y, \\ az - by, & \text{если } x > y,\ |x-z| < |y-z|, \\ az - bx, & \text{если } x > y,\ |x-z| > |y-z|, \\ z, & \text{если } x > y,\ |x-z| = |y-z|, \end{cases} \tag{1}$$

$a \ge 1, b \ge 0$.

При $a = 1$, $b = 0$ получаем схему согласительного арбитража, а при $a = 2$, $b = 1$ – схему арбитража с наказанием (Zeng, [3]).

В другой процедуре

$$H_z(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{2}, & \text{если } x \le y, \\ az + by, & \text{если } x > y,\ |x-z| < |y-z|, \\ az + bx, & \text{если } x > y,\ |x-z| > |y-z|, \\ z, & \text{если } x > y,\ |x-z| = |y-z|, \end{cases} \tag{2}$$

$b \ge 0$.

Здесь при $a = 1$, $b = 0$ снова получаем схему согласительного арбитража, а при $a = 0$, $b = 1$ – схему арбитража по последнему предложению (Farber, [2]).

Всюду в дальнейшем будем считать $b > 0$.

2. Постановка задачи. Оптимальные стратегии

Пусть $-\infty < y \le 0 \le x < +\infty$, а z – дискретная случайная величина, принимающая с равными вероятностями значения -1, 0 и 1.

Благодаря симметрии, цена игры равна нулю, так что достаточно указать оптимальную стратегию только для одного из игроков, например, L.

Для схемы (1) решение игры находим в чистых стратегиях.

Теорема 1. Для игрока L оптимальной стратегией является чистая стратегия $x = 0$.

Доказательство. В самом деле,

$$H(0,y) = \begin{cases} \frac{1}{3}[-a-by-by+a-by] = -by & \text{при } y \in (-\infty,-2), \\ \frac{1}{3}[-1+2b+a+2b] = \frac{a+4b-1}{3} & \text{при } y = -2, \\ \frac{1}{3}[-a-by+a-by] = -\frac{2}{3}by & \text{при } y \in (-2,0), \\ 0 & \text{при } y = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Итак, $H(0,0) = 0$ и $H(0,y) > 0$ для $y \in (-\infty, 0)$, что и доказывает оптимальность стратегии $x = 0$.

Для схемы (2) равновесие будем искать среди смешанных стратегий. Обозначим через $f(x)$ и $g(y)$ смешанные стратегии игроков L и M, соответственно:

$$f(x) \ge 0, \qquad \int\limits_0^{+\infty} f(x)dx = 1; \qquad g(y) \ge 0, \qquad \int\limits_{-\infty}^{0} g(y)dy = 1.$$

Здесь, благодаря симметрии, $g(y) = f(-y)$. Функцию выигрыша игрока M при выбранной игроком L стратегии $f(x)$ обозначим через $H(f(x), y)$. Отметим, что случай $a = 0$, $b = 1$ рассмотрен в работе [1].

Теорема 2. Для игрока L оптимальной стратегией является

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \le x < c, \\ \dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{x^3}}, & \text{если } c < x < c+2, \\ 0, & \text{если } c+2 < x < +\infty, \end{cases} \tag{4}$$

где $c = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

Доказательство. Будем искать оптимальную стратегию игрока L в форме

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{если } 0 \le x < c, \\ \varphi(x) & \text{если } c < x < c+2, \\ 0 & \text{если } c+2 < x < +\infty, \end{cases} \tag{5}$$

где функция $\varphi(x)$ положительна и непрерывно дифференцируема в интервале $(c, c+2)$.

Функция $H(f(x), y)$ непрерывна на всей полуоси $(-\infty, 0]$. Стратегия (5) будет оптимальной, если $H(f(x), y) = 0$ для $y \in [-(c+2), -c]$ и
$H(f(x), y) > 0$ для $y \in (-\infty, -(c+2)) \cup (-c, 0]$.

Пусть $y \in [-(c+2), -c]$, тогда $-y \in [c, c+2]$ и

$$H(f(x), y) = \frac{1}{3} \int\limits_c^{c+2} (-a+by)f(x)dx + \int\limits_c^{-y} bxf(x)dx + \int\limits_{-y}^{c+2} byf(x)dx +$$

$$+ \int\limits_c^{c+2} (a+bx)f(x)dx. \tag{6}$$

Если теперь $f(x)$ — оптимальная стратегия, то из (6) получаем:

$$H(f(x), -c-0) = \frac{1}{3} \cdot \left[-a - bc - bc + a + b \int\limits_c^{c+2} xf(x)dx \right] =$$

$$= \frac{b}{3}\left[\int_{c}^{c+2} xf(x)dx - 2c\right] = 0,$$

$$H(f(x), -(c+2)+0) = \frac{1}{3}\cdot\left[-a - b(c+2) + b\int_{c}^{c+2} xf(x)dx + \right.$$

$$\left. + a + b\int_{c}^{c+2} xf(x)dx\right] = \frac{b}{3}\left[2\int_{c}^{c+2} xf(x)dx - (c+2)\right] = 0,$$

откуда следует соотношение для математического ожидания стратегии $f(x)$:

$$\int_{c}^{c+2} xf(x)dx = 2c = \frac{c+2}{2}. \tag{7}$$

Таким образом, $c = \dfrac{2}{3}$.

Далее, для оптимальности стратегии $f(x)$ необходимо, чтобы $H'(f(x), y) = H''(f(x), y) = 0$ в интервале $(-(c+2), -c)$. Имеем:

$$H'(f(x), y) = \frac{b}{3}\left[1 + 2yf(-y) + \int_{-y}^{c+2} f(x)dx\right], \tag{8}$$

$$H''(f(x), y) = \frac{b}{3}\left[3f(-y) - 2yf'(-y)\right], \tag{9}$$

откуда приходим к уравнению

$$3f(-y) - 2yf'(-y) = 0.$$

Положим $x = -y$, тогда $x \in [c, c+2]$, $f(x) = \varphi(x)$ и

$$3\varphi(x) + 2x\varphi'(x) = 0.$$

Решением этого уравнения является функция

$$\varphi(x) = \frac{\alpha}{\sqrt{x^3}}. \tag{10}$$

Определим константы c и α. Из (8) получаем:

$$0 = H'(f, -c-0) = \frac{b}{3}\left[2 - \frac{2\alpha}{\sqrt{c}}\right],$$

откуда

$$\alpha = \sqrt{c} = \sqrt{\frac{2}{3}}. \tag{11}$$

Из (5), (10) и (11) следует, что $f(x)$ имеет вид (4).

Проверим выполнение условий оптимальности.

Пусть $y \in [-(c+2), -c]$. Так как при построении стратегии $f(x)$ были использованы равенства $H''(f(x), y) = 0$ в интервале $(-(c+2), -c)$, $H'(f(x), -c-0) = 0$ и $H(f(x), -c-0) = 0$, то в силу непрерывности функции $H(f(x), y)$ заключаем, что $H(f(x), y) = 0$ при $y \in [-(c+2), -c]$.

Исследуем теперь поведение функции $H(f(x), y)$ вне отрезка $[-(c+2), -c]$.

Пусть $y \in (-\infty, -(c+4)]$, тогда $-y \in [c+4, +\infty)$ и

$$H(f(x), y) = \frac{1}{3}\left[\int_{c}^{c+2} (-1 + bx)f(x)dx + \int_{c}^{c+2} bxf(x)dx + \right.$$

$$+\int\limits_{c}^{c+2}(1+bx)f(x)dx\Bigg] = b\int\limits_{c}^{c+2}xf(x)dx = 2bc = \frac{4}{3}b > 0.$$

Пусть $y \in [-(c+4), -(c+2)]$, тогда $-y \in [c+2, c+4]$, $-2-y \in [c, c+2]$ и

$$H(f(x),y) = \frac{1}{3}\left[\int\limits_{c}^{-2-y}(-1+bx)f(x)dx + \int\limits_{-2-y}^{c+2}(-1+by)f(x)dx + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{c}^{c+2}bxf(x)dx + \int\limits_{c}^{c+2}(1+bx)f(x)dx\right] =$$

$$= \frac{b}{3}\left[\int\limits_{c}^{-2-y}xf(x)dx + y\int\limits_{-2-y}^{c+2}f(x)dx + 2\int\limits_{c}^{c+2}xf(x)dx\right],$$

$$H'(f(x),y) = \frac{b}{3}\left[2(1+y)f(-2-y) + \int\limits_{-2-y}^{c+2}f(x)dx\right] =$$

$$= -\frac{2b\sqrt{c}}{3}\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{(-2-y)^3}} + \frac{1}{\sqrt{c+2}}\right] < 0.$$

Так как $H(f(x), -(c+2)-0) = 0$ и $H'(f(x),y) = 0$ в интервале $(-(c+4), -(c+2))$, то $H(f(x),y) > 0$ для $y \in [-(c+4), -(c+2))$.

Пусть теперь $y \in [-2, 0]$, тогда $-y \in [0, 2]$, $2-y \in [2, c+2]$ и

$$H(f(x),y) = \frac{1}{3}\left[\int\limits_{c}^{c+2}(-1+by)f(x)dx + \int\limits_{c}^{c+2}byf(x)dx + \right.$$

$$\left. \int\limits_{c}^{-2-y}(1+bx)f(x)dx + \int\limits_{-2-y}^{c+2}(1+by)f(x)dx\right] =$$

$$= \frac{b}{3}\left[2y + \int\limits_{c}^{-2-y}xf(x)dx + y\int\limits_{-2-y}^{c+2}f(x)dx\right],$$

$$H'(f(x),y) = \frac{b}{3}\left[2 + 2(-1+y)f(2-y) + \int\limits_{-2-y}^{c+2}f(x)dx\right] =$$

$$= \frac{2b\sqrt{c}}{3}\cdot\left[1 + \frac{1}{\sqrt{(2-y)^3}} - \frac{1}{\sqrt{c+2}}\right] =$$

$$= \frac{2b\sqrt{c}}{3}\cdot\left[\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{(2-y)^3}}\right] > 0.$$

Так как $H(f(x), -c+0) > 0$ и $H'(f(x),y) > 0$ в полуинтервале $(-c, 0]$, то $H'(f(x),y) > 0$ при $y \in (-c, 0]$.

Окончательно заключаем, что стратегия $f(x)$ является оптимальной.

Работа выполнена при финансовой поддержке проекта 1.8.10 АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы».

Список литературы

1. Mazalov V. V., Mentcher A. E., Tokareva J. S. On a discrete arbitration procedure in three points, Game Theory and Applications 11, Nova Sciense Publishers, N. Y, 2005. P. 87–91.

2. Farber H. An analysis of final-offer arbitration, Journal of conflict resolution, V. 35. 1980. P. 683–705.

3. Zeng Dao-Zhi. An amedment of final-offer arbitration, Working paper Kagawa, Kagawa University, 2006.

Рукопись поступила в редакцию 29 апреля 2011 г.