УДК 517.956
ББК В143

И. А. Ефимова
г. Чита, Россия

Об эффективном решении третьих краевых задач в круговых областях

Рассмотрены третьи краевые задачи для внешности и внутренности круга. Решения задач выражены в однократных квадратурах через решение классической задачи Дирихле в круге.

Ключевые слова: краевые задачи, метод свертывания разложений Фурье.

I. A. Yefimova
Chita, Russia

On the Efficient Solution of the Third Boundary Value Problems in Circular Domains

The third boundary value problems for the interior and exterior of the circle are considered in the article. The solutions of problems are expressed in single quadratures through the solution of the classical Dirichlet problem in a circle.

Keywords: boundary value problems, method of convolution of Fourier expansions.

В математической физике традиционно наиболее сложными являются краевые задачи с граничными условиями третьего рода, которые соответствуют неидеальным контактам областей с внешней средой [1; 2]. При этом приоритетным направлением является решение указаных задач аналитическими методами. В данной статье современным методом свертывания разложений Фурье получены аналитические решения третьих краевых задач внутри и вне круга.

1. Задачи внутри круга. Рассмотрим на плоскости с полярными координатами r, α третью краевую задачу в круге $r < l$:

$$r\partial_r(r\partial_r u) + \partial_\alpha^2 u = 0, \qquad r < l; \qquad \partial_r u + hu_{|r=l} = f(\alpha), \tag{1}$$

где постоянная $h > 0$, $\partial_r^n = \partial^n/\partial r^n$.

Наряду с задачей (1) рассмотрим классическую задачу Дирихле в круге $r < l$ с сохранением граничной функции $f(\alpha)$ вида

$$r\partial_r(r\partial_r F) + \partial_\alpha^2 F = 0, \qquad r < l; \qquad F_{|r=l} = f(\alpha), \tag{2}$$

Решение $F(r, \alpha)$ задачи (2) строится по формуле Пуассона [1; 2]:

$$F(r,\alpha) = \frac{l^2 - r^2}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{f(\xi)d\xi}{l^2 + r^2 - 2lr\cos(\alpha - \xi)}, \tag{3}$$

и для широкого класса граничных функций $f(\alpha)$ функция F вычисляется в конечном виде. Поэтому будем считать функцию $F(r, \alpha)$ (3) известной.

Методом работ [3; 4] выразим решение задачи (1) непосредственно через заданную функцию $F(r, \alpha)$. Разложим граничную функцию $f(\alpha)$ в ряд Фурье:

$$f(\alpha) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\alpha + b_n \sin n\alpha), \tag{4}$$

© Ефимова Е. И., 2011

где a_n, b_n – коэффициенты Фурье:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\alpha)\cos n\alpha\, d\alpha, \qquad n = 0, 1, ...;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\alpha)\sin n\alpha\, d\alpha, \qquad n = 1, 2, \dots . \tag{5}$$

Отсюда функция $F(r, \alpha)$ в круге $r \le l$ представима в виде разложения Фурье:

$$F(r, \alpha) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{l}\right)^n (a_n \cos n\alpha + b_n \sin n\alpha), \qquad r \le l. \tag{6}$$

Правая часть последнего равенства является решением задачи Дирихле (2) в круге $r < l$, полученным методом Фурье. Представим решение задачи (1) в виде

$$u(r, \alpha) = \frac{p_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{l}\right)^n (p_n \cos n\alpha + q_n \sin n\alpha), \qquad r \le l, \tag{7}$$

где p_n, q_n – искомые параметры, при этом функция $u(r, \alpha)$ удовлетворяет уравнению (1) (при условии сходимости ряда (7)). Из граничного условия (1) с учетом разложения (4) найдем параметры p_n, q_n в виде

$$p_0 = \frac{a_0}{h}, \qquad p_n = \frac{la_n}{n + lh}, \qquad q_n = \frac{lb_n}{n + lh}.$$

Отсюда формула (7) примет вид

$$u(r, \alpha) = l\left[\frac{a_0}{2\gamma} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{l}\right)^n \frac{1}{n+\gamma}(a_n \cos n\alpha + b_n \sin n\alpha)\right], \qquad r \le l, \tag{8}$$

где $\gamma = lh$, a_n, b_n имеют вид (5).

Выделим в полученной формуле заданную функцию $F(r, \alpha)$. Заменяя в разложении (6) переменную r на re^{-t} при $t > 0$, получим

$$F(re^{-t}, \alpha) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{re^{-t}}{l}\right)^n (a_n \cos n\alpha + b_n \sin n\alpha), \qquad r \le l.$$

Умножая последнее равенство на $e^{-\gamma t}$ и интегрируя по $t \in (0, \infty)$, получим формулу

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-\gamma t} F(re^{-t}, \alpha)dt = \frac{a_0}{2\gamma} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{l}\right)^n \frac{1}{n+\gamma}(a_n \cos n\alpha + b_n \sin n\alpha), \qquad r \le l. \tag{9}$$

Отсюда с учетом разложения (8) окончательно приведем решение задачи (1) к виду (без рядов Фурье):

$$u(r, \alpha) = l\int\limits_0^{\infty} e^{-lht} F(re^{-t}, \alpha)dt, \tag{10}$$

где $F(r,\alpha)$ – решение задачи Дирихле (2). Можно непосредственно проверить, что интеграл (10) сходится и функция $u(r,\alpha)$ (10) удовлетворяет условиям задачи (1).

2. Задачи вне круга. Рассмотрим третью краевую задачу вне круга $r > l$:

$$r\partial_r(r\partial_r u) + \partial_\alpha^2 u = 0, \qquad r > l; \qquad \partial_r u - hu_{|r=l} = f(\alpha), \tag{11}$$

где $h > 0$. Представляя решение задачи (11) в виде

$$u(r,\alpha) = \frac{p_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{l}{r}\right)^n (p_n \cos n\alpha + q_n \sin n\alpha), \qquad r \geq l, \tag{12}$$

из граничного условия (11) с учетом разложения (4) найдем

$$p_0 = -\frac{a_0}{h}, \qquad p_n = -\frac{la_n}{n+lh}, \qquad q_n = -\frac{lb_n}{n+lh}.$$

Отсюда функция (12) примет вид

$$u(r,\alpha) = -l\left[\frac{a_0}{2\gamma} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{l}{r}\right)^n \frac{1}{n+\gamma}(a_n \cos n\alpha + b_n \sin n\alpha)\right], \qquad r \leq l, \tag{13}$$

где $\gamma = lh$, a_n, b_n имеют вид (5). Из формулы (9) следует аналогичная формула при $r \geq l$:

$$\int_0^\infty e^{-\gamma t} F(l^2 r^{-1} e^{-t}, \alpha)dt = \frac{a_0}{2\gamma} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{l}{r}\right)^n \frac{1}{n+\gamma}(a_n \cos n\alpha + b_n \sin n\alpha).$$

Отсюда с учетом разложения (13) окончательно приведем решение задачи (11) к виду

$$u(r,\alpha) = -l\int_0^\infty e^{-lht} F(l^2 r^{-1} e^{-t}, \alpha)dt. \tag{14}$$

Непосредственно устанавливается, что функция (14) удовлетворяет условиям задачи (11).

Выведенные формулы (10), (14) проще формул (8), (13), полученных методом Фурье, т. к. формулы (10), (14) содержат однократные квадратуры от монотонных функций, причем несобственные интегралы (10) и (14) сходятся достаточно быстро, тогда как формулы (8), (13), (5) содержат квадратуры и ряды от сильно осциллирующих тригонометрических функций.

Список литературы

1. Арсенин В. Я. Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1974. 431 с.

2. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.

3. Kholodovskii S. E. The Convolution Method for Fourier Expansions. The Case of Generalized Transmission Conditions of Crack (Screen) Type in Piecewise Inhomogeneous Media // Differential Equations, 2009, Vol. 45, № 6, pp. 873–877.

4. Kholodovskii S. E. The convolution method for fourier expansions: The case of a crack (screen) in an inhomogeneous space // Differential Equations, 2009, Vol. 45, № 8, pp. 1229–1233.

Рукопись поступила в редакцию 10 апреля 2011 г.