УДК 519.213
ББК В 22.18

А. А. Забелин, Е. Н. Коновальчикова
г. Чита, Россия

Об одной задаче взаимного выбора

В статье рассматривается нестратегический вариант задачи взаимного выбора. Рассмотрена многошаговая модель, в рамках которой на каждом этапе любому представителю одной группы случайным образом подбирается партнёр из другой группы. Изначально качество лиц обеих групп равномерно распределено на единичном отрезке. Индивиды образуют пару и покидают группы, если и только если их качества x и y удовлетворяют неравенству $x + y > z$ ($z \in [0; 2]$). Для каждого периода найдены меры множеств оставшихся в группах лиц и их распределения качества.

Ключевые слова: задача взаимного выбора, многошаговая модель.

A. A. Zabelin, Ye. N. Konovalchikova
Chita, Russia

On a Mutual Choice Problem

In this article a non-strategic variant of a mutual choice problem is considered.

The model is multistage. At each stage every individual of one population gets a partner from other population in a random way. The quality of individuals of both populations is primary distributed in the $[0; 1]$ segment. Individuals form a pair and leave populations, if their qualities x and y satisfy to an inequality $x + y > z$ ($z \in [0; 2]$). For each period cardinal numbers of sets of the individuals who have remained in populations and their distributions of quality are found.

Keywords: mutual choice problem, multistage model.

Введение

Одним из обобщений задачи наилучшего выбора, более известной как «задача о секретаре», является задача наилучшего взаимного выбора или двустороннего поиска.

Предположим, что имеются две различные группы или популяции (например, бизнесмены, работники и работодатели), представители которых (игроки) стремятся создать долгосрочные отношения с членом из другой группы. Каждый игрок характеризуется некоторым качеством, например, уровнем дохода, величиной предлагаемой или запрашиваемой заработной платы. Выбор индивидуума в партнеры зависит от уровня его качества. Индивидуум стремится создать пару с представителем другой группы, имеющим высокий уровень качества, при этом игрок может не знать уровень своего качества.

При встрече игроков возможны следующие ситуации: 1) оба игрока принимают качество друг друга; 2) один из игроков принимает качество другого, а другой игрок – нет; 3) оба не принимают качество друг друга. Отсюда следует, что правило выбора партнера касается обоих игроков. В первой ситуации, когда оба игрока принимают качество друг друга, игроки создают пару и покидают свои группы, при этом выигрышем каждого игрока является качество партнера. Понятно, что каждый игрок стремится максимизировать свой выигрыш [2].

В отличие от задачи о секретаре, в которой выбор наилучшего объекта является односторонним процессом, в вышеприведённой задаче процесс выбора является двусторонним. Модели наилучшего взаимного выбора имеют различные приложения в биологии и социологии, в исследовании экономических отношений, например, между работником и работодателем или покупателем и продавцом, которые осуществляют взаимный выбор.

В данной статье мы рассмотрим разновидность модели взаимного выбора, которая была описана S. Alpern и D. Reyneirs [1]. В своей работе авторы заменяют модель выбора партнера моделью предпочтения напарника в терминах динамической игры $\Gamma_n(F_1, G_1)$. В этой игре качество представителей обеих групп сосредоточено на отрезке $[0,1]$ с непрерывными функциями распределения F_1 и G_1, соответственно. Авторы подробно рассматривают случай симметричной модели, в которой начальные распределения по качеству для обеих групп идентичны. Особое внимание уделено симметричной игре с равномерным распределением по качеству обеих популяций на отрезке $[0,1]$ с симметричными и несимметричными порогами выбора партнера. Авторами было найдено равновесие для различных непрерывных начальных функций распределения F_1 и G_1. В каждом периоде игры с номером k устанавливаются соответствующие пороги a_k и b_k; если качества игроков выше этих порогов, то пара создается, иначе – нет [3].

Работа В. В. Мазалова и А. А. Фалько [2], в которой рассмотрены две модели взаимного выбора, является продолжением статьи S. Alpern и D. Reyneirs. В первой модели численность популяции уменьшается по мере создания пар на каждом этапе игры. Во второй модели на смену игрокам, создавшим пару, в игру вступает их потомство. Для каждой модели авторами были выведены рекуррентные формулы для нахождения численности популяции и их плотности распределения на любом этапе игры.

В данной статье рассмотрена динамическая модель, в которой на каждом шаге моделируются случайные встречи представителей двух групп бизнесменов. Обозначим их X и Y, а x и y — качества представителей этих групп, которые распределены равномерно на отрезке $[0,1]$. Будем полагать, что при случайной встрече представителей пара (x,y) образуется, если выполняется условие $x+y>z$. Бизнесмены, образовавшие пару, покидают свои группы. В противном случае $(x+y\leqslant z)$ пара не образуется.

Так как игра симметричная, распределения игроков по качеству на любом этапе игры идентичны для групп X и Y. По этой причине достаточно рассмотреть распределение по качеству игроков группы X. Из дополнительного условия $x+y>z$ и из того, что $x\in[0,1]$ и $y\in[0,1]$, следует, что параметр z может изменяться в пределах от нуля до двух, поэтому достаточно рассмотреть два случая: $0<z\leqslant 1$ и $1<z\leqslant 2$. Предварительно исследуем частный случай, когда $z=1$.

Случай z=1

Положим, что первоначальное распределение качества бизнесменов на отрезке $[0,1]$ равномерно с плотностью распределения $f_0(x)=1$. Мера множества этих бизнесменов $N_0=1$. На первом шаге бизнесмены, удовлетворяющие условию $x+y>1$, создадут пару (найдут себе достойного партнера) и покинут группу (*см. рис. 1*). После ухода части группы мера множества оставшихся бизнесменов равна

$$N_1 = N_0\int\limits_0^1 (1-x)\cdot f_0(x)\,dx = \int\limits_0^1 (1-x)\,dx = \frac{1}{2}.$$

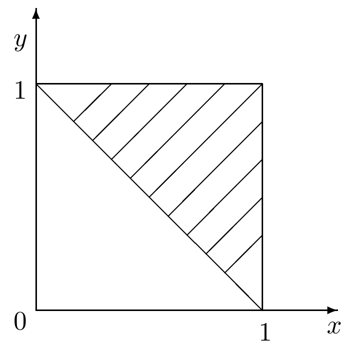

Рис. 1. Множество лиц, создавших пару при условии $x+y>1$

После первого шага распределение качества на отрезке $[0,1]$ уже не будет равномерным. Пусть $f_1(x)$ — функция плотности этого распределения и её вид $f_1(x)=c_1(1-x)f_0(x)$, где $c_1=\text{const}$. Тогда

$$\int\limits_0^1 f_1(x)\,dx = \int\limits_0^1 c_1(1-x)f_0(x)\,dx = c_1\int\limits_0^1 (1-x)\,dx = 1.$$

Отсюда $c_1 = 2$ и функция плотности распределения

$$f_1(x) = 2(1-x) = \frac{1-x}{\frac{1}{2}} = \frac{1-x}{N_1}.$$

Таким образом, после первого шага плотность распределения качества бизнесменов на отрезке $[0,1]$ имеет вид $f_1(x) = 2(1-x)$ или $f_1(x) = \dfrac{1-x}{N_1}$.

На втором шаге мера множества тех бизнесменов, которые остались без партнера, равна

$$N_2 = N_1 \int\limits_0^1 (1-x) f_1(x) dx = \frac{1}{2} \cdot \int\limits_0^1 2(1-x)^2 dx = \int\limits_0^1 (1-x)^2 dx = \frac{1}{3}.$$

Пусть $f_2(x)$ – плотность распределения качества бизнесменов после второго шага. Полагая, что она имеет вид $f_2(x) = c_2(1-x)f_1(x)$, где c_2 — некоторая постоянная, имеем

$$\int\limits_0^1 f_2(x)\,dx = \int\limits_0^1 c_2(1-x)f_1(x)\,dx = 1, \qquad 2c_2 \int\limits_0^1 (1-x)^2\,dx = 1,$$

откуда $c_2 = \dfrac{3}{2}$ и $f_2(x) = 3(1-x)^2 = \dfrac{(1-x)^2}{\frac{1}{3}} = \dfrac{(1-x)^2}{N_2}$.

Рассмотрим произвольный шаг с номером n. По аналогии с ранее найденным можно предположить, что $f_n(x) = c_n \cdot (1-x)^n$. Найдем c_n.

$$\int\limits_0^1 f_n(x) dx = c_n \cdot \int\limits_0^1 (1-x)^n dx = 1,$$

$$c_n = \frac{1}{\int\limits_0^1 (1-x)^n dx} = \frac{1}{\frac{1}{n+1}} = n+1.$$

Таким образом, на n-ом шаге плотность распределения качества бизнесменов на отрезке $[0,1]$ будет имеет вид $f_n = (n+1)(1-x)^n$.

Мера множества бизнесменов на n-ом шаге вычисляется следующим образом:

$$N_n = N_{n-1} \cdot \int\limits_0^1 (1-x) f_{n-1}(x) dx = N_{n-1} \cdot n \cdot \int\limits_0^1 (1-x)^n dx = N_{n-1} \cdot \frac{n}{n+1}.$$

На первом шаге $N_1 = 1 \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$, на втором шаге $N_2 = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$ и т. д. На n-ом шаге мера множества оставшихся бизнесменов будет равна $N_n = \dfrac{1}{n+1}$. Следовательно, плотность распределения качества бизнесменов на n-ом шаге можно записать в виде $f_n(x) = \dfrac{(1-x)^n}{N_n}$, что легко доказывается методом математической индукции.

Случай $\mathbf{0 < z \leqslant 1}$

Как и в предыдущем случае, начальная плотность распределения качества $f_0(x) = 1$; мера множества бизнесменов $N_0 = 1$. Найдем плотность распределения $f_1(x)$ группы X после того, как пары образованы и часть бизнесменов покинула группу.

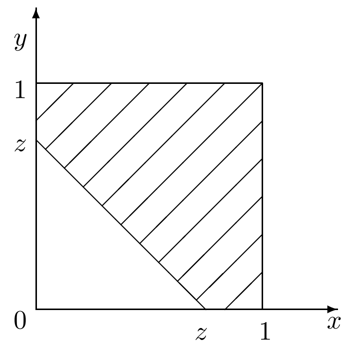

Рис. 2. Множество лиц, создавших пару при условии $x + y > z$, $0 < z \leqslant 1$

После первого шага группа будет сосредоточена на отрезке $[0, z]$, так как бизнесмены, качество которых больше z, создадут пару и покинут игру. Меру множества оставшихся без партнера бизнесменов после первого шага можно найти, исходя из следующих соображений:

$$N_1 = \int_0^z (z - x) \cdot f_0(x)\, dx = \int_0^z (z - x)\, dx = \frac{z^2}{2}.$$

Пусть $c_1 = \text{const}$ и вид искомой плотности

$$f_1(x) = \begin{cases} c_1(z - x) f_0(x), & \text{если } x \in [0, z] \\ 0, & \text{если } x \in (z, 1] \end{cases},$$

тогда

$$\int_0^1 f_1(x)\, dx = \int_0^z c_1(z - x) f_0(x)\, dx = c_1 \int_0^z (z - x)\, dx = 1, \qquad c_1 = \frac{2}{z^2}.$$

Отсюда плотность распределения на отрезке $[0, z]$ имеет вид

$$f_1(x) = \frac{2}{z^2}(z - x) = \frac{z - x}{\frac{z^2}{2}} = \frac{z - x}{N_1}.$$

Таким образом, после первого шага плотность распределения качества бизнесменов на отрезке $[0, 1]$ имеет вид

$$f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{z - x}{N_1}, & \text{если } x \in [0, z], \\ 0, & \text{если } x \in (z, 1]. \end{cases}$$

После второго шага мера множества оставшихся без партнёра бизнесменов равна $N_2 = N_1 \cdot \int_0^z (z - x) \cdot f_1(x) dx = \int_0^z (z - x)^2 dx = \dfrac{z^3}{3}$.

Пусть $f_2(x)$ – плотность бизнесменов после второго шага. Полагая, что она имеет вид

$$f_2(x) = \begin{cases} c_2(z - x) f_1(x), & \text{если } x \in [0, z] \\ 0, & \text{если } x \in (z, 1] \end{cases},$$

где c_2 – некоторая постоянная, получаем

$$\int_0^1 f_2(x)\, dx = \int_0^z c_2(z - x) f_1(x) dx = 1, \qquad \frac{2c_2}{z^2} \int_0^z (z - x)^2 dx = 1,$$

откуда $c_2 = \dfrac{3}{2z}$ и плотность принимает вид:

$$f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{(z - x)^2}{\frac{z^3}{3}}, & \text{при } x \in [0, z], \\ 0, & \text{при } x \in (z, 1]. \end{cases}$$

Иначе,

$$f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{(z-x)^2}{N_2}, & \text{при } x \in [0, z], \\ 0, & \text{при } x \in (z, 1]. \end{cases}$$

Аналогично, на n-ом шаге мера множества оставшихся без партнёра бизнесменов будет равна $N_n = \dfrac{z^{n+1}}{n+1}$, а плотность распределения

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{(z-x)^n}{N_n}, & \text{при } x \in [0, z], \\ 0, & \text{при } x \in (z, 1]. \end{cases}$$

Случай $\mathbf{1 < z \leqslant 2}$

Начальная плотность распределения качества $f_0(x) = 1$; мера множества бизнесменов $N_0 = 1$. Найдем плотность распределения $f_1(x)$ группы X после того, как пары образованы и часть бизнесменов покинула группу.

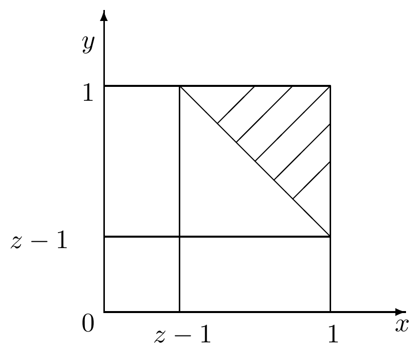

Рис. 3. Множество лиц, создавших пару при условии $x + y > z$, $1 < z \leqslant 2$

После первого шага все бизнесмены, качество которых не превышает $z - 1$, останутся в игре, по причине невозможности создать пару. Часть бизнесменов из полуинтервала $(z - 1, 1]$ создадут пару и покинут группы. Мера множества оставшихся бизнесменов будет равна

$$N_1 = \int_0^{z-1} 1 \cdot f_0(x)\, dx + \int_{z-1}^{1} (z - x) \cdot f_0(x)\, dx = 2z - \frac{z^2}{2} - 1 = z - 1 + \frac{1 - (z-1)^2}{2}.$$

На отрезке $[0, z - 1]$ плотность распределения равномерна и равна $f_1(x) = \dfrac{1}{N_1}$. На полуинтервале $(z - 1, 1]$ бизнесмены распределятся неравномерно и функцию плотности можно представить в следующем виде: $f_1(x) = c_1(z - x)$, где c_1 – некоторая постоянная. Получаем:

$$\int_0^1 f_1(x)dx = \int_0^{z-1} \frac{dx}{N_1} + \int_{z-1}^{1} c_1(z - x)dx = 1,$$

откуда $c_1 = \dfrac{1}{2z - \frac{z^2}{2} - 1} = \dfrac{1}{N_1}$. Таким образом,

$$f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{N_1}, & \text{при } x \in [0, z-1], \\ \dfrac{z-x}{N_1}, & \text{при } x \in (z-1, 1]. \end{cases}$$

Перейдем ко второму шагу. Бизнесмены, которые могут создать пару и покинуть популяции, находятся на полуинтервале $(z-1, 1]$, иные не смогут создать пары. Мера множества бизнесменов, оставшихся без партнера после второго шага, будет равна

$$N_2 = N_1\left(\frac{z-1}{N_1} + \int\limits_{z-1}^{1} \frac{(z-x)^2}{N_1}\,dx\right) = z^2 - \frac{z^3}{3} - \frac{1}{3} = z - 1 + \frac{1-(z-1)^3}{3}.$$

На отрезке $[0, z-1]$ все бизнесмены останутся без пары, и плотность распределения их качества будет иметь вид $\dfrac{1}{N_2}$. На полуинтервале $(z-1, 1]$ представим функцию плотности в виде $f_2(x) = c_2(z-x)^2$, где c_2 – некоторая постоянная. Используя основное свойство функции плотности, получаем:

$$\int\limits_0^1 f_2(x)dx = \int\limits_0^{z-1} \frac{dx}{N_2} + \int\limits_{z-1}^{1} c_2(z-x)^2 dx = 1,$$

откуда $c_2 = \dfrac{1}{z^2 - \frac{z^3}{3} - \frac{1}{3}} = \dfrac{1}{N_2}$.

Таким образом, функция плотности распределения качества бизнесменов на отрезке $[0, 1]$ имеет следующий вид:

$$f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{N_2}, & \text{при } x \in [0, z-1], \\ \dfrac{(z-x)^2}{N_2}, & \text{при } x \in (z-1, 1]. \end{cases}$$

С помощью метода математической индукции можно доказать, что мера множества оставшихся без партнера бизнесменов на шаге n равна

$$N_n = z - 1 + \frac{1}{n+1}\left(1 - (z-1)^{n+1}\right).$$

Функцию плотности на n-ом шаге можно вычислить по формуле

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{N_n}, & \text{при } x \in [0, z-1], \\ \dfrac{(z-x)^n}{N_n}, & \text{при } x \in (z-1, 1]. \end{cases}$$

Авторы благодарят доктора физ.-мат. наук, профессора В. В. Мазалова
за постановку задачи и содействие в работе

Список литературы

1. Alpern S., Reyniers D. Strategic mating with common preferences // Journal of Theoretical Biology. 2005. №237. P. 337—354.

2. Mazalov V. V., Falco A. A. Nash equilibrium in two-sided mate choice problem // International Game Theory Review. Vol. 10. № 4. 2008. P. 421–435.

3. Панова С. В., Бекетова О. А. О некоторых моделях обобщенной задачи наилучшего выбора // Ученые записки Забайкальского государственного гуманитарно-педагогического университета им. Н. Г. Чернышевского. Серия «Физика, математика, техника, технология». 2009. №2(25) С. 93–98.

Рукопись поступила в редакцию 28 апреля 2011 г.