УДК 22.161
ББК 517.512

М. Б. Мэдэгэй
г. Чита, Россия

Об оценке аппроксимативной возможности операторов одного класса

В статье сформулирована и доказана теорема, дающая оценку величины $\|L_n(f,x) - f(x)\|$ для $f \in W^3H_M^\alpha$, при этом L_n принадлежат классу, являющемуся частным случаем класса S_6 (по Коровкину П. П.). Для вывода оценки используется метод интерполяции. Описание его имеется в работах Ю. Г. Абакумова, О. Н. Шестаковой, Е. П. Галайды.

Ключевые слова: линейные операторы, метод интерполяции, аппроксимационная оценка

M. B. Medegey
Chita, Russia

On the Estimate of Approximation Opportunity of One Class Operators

The article states and constructs the proof of a theorem giving a value estimate of $\|L_n(f,x) - f(x)\|$ for $f \in W^3H_M^\alpha$, with L_n belonging to the particular case of S_6 (by P. P. Korovkin). The interpolation method is used for the estimate derivation. There is a description of it in the works of Yu. G. Abakumov, O. N. Shestakova and Ye. P. Galaida.

Keywords: linear operators, interpolation method, approximation estimate.

Одной из задач теории приближения является получение оценок вида

$$\|L_n(f(t),x) - f(x)\| \le \alpha_n \to 0, \tag{1}$$

где $f(x)$ – приближаемая функция из множества $W \subset C\,[a,b]$ или $W \subset C_{2\pi}$;

$L_n(f(t),x)$ – аппроксимирующая последовательность линейных операторов.

В неравенстве (1) величина α_n зависит от характеристик класса функций W и характеристик операторов L_n.

Хорошо отработана методика получения оценок вида (1) в случае, если L_n – положительные операторы. Напомним, оператор называется положительным, если $f(t) \ge 0 \Rightarrow \forall x\ L_n(f,x) \ge 0$.

В статье рассматриваются аппроксимирующие последовательности операторов, не являющиеся положительными.

В (1) приводится схема получения аппроксимационных оценок в терминах линейных нормированнных пространств (ЛНП), которую можно описать следующим образом.

Пусть X – действительное ЛНП. Множество $K \subset X$ называем конусом, если оно: 1) замкнутое; 2) выпуклое; 3) вместе с любым принадлежащим ему элементом содержит луч, состоящий из элементов вида λp, где $\lambda \ge 0$ – действительное число. Если K означает конус, то K^* – множество линейных функционалов с конечной нормой, неотрицательных на K.

Полагаем, что в X зафиксирована последовательность конусов K_n $(n = 1, 2, ...)$ и последовательность элементов p_n, причем $\|p_n\|$ равномерно по n ограничены, $\mu \in X^*$, $F = lin\,\{z_i\}_{i=1}^k$, при этом полагаем, что $\{z_i\}_{i=1}^k$ линейно независима (здесь $linM$ означает линейную оболочку множества M).

Будем полагать, что $p \in \Phi = \Phi(F, \{K_n\}, \{p_n\})$, если по p найдутся последовательности положительных чисел c_n и последовательность элементов $g_n \in F$ такие, что $c_np_n - p + g_n \in K_n$,

$-c_n p_n - p + g_n \in -K_n$, при этом $c_n\mu(p_n) \to 0$, $\mu(g_n - p) \to 0$. Схема получения аппроксимационных оценок, предложенная в [1] основана на использовании неравенства $|\mu_n(p) - \mu(p)| \leq c_n\mu_n(p_n) + |\mu_n(g_n) - \mu(p)|$,
где $\mu_n \in K_n^*$.

Конкретизацией этой схемы является метод интерполяции ([2]; [6]). Изложим вкратце суть метода. Будем говорить, что последовательность операторов L_n, $L_n : C[a,b] \to C[a,b]$ или $L_n : C_{2\pi} \to C_{2\pi}$ удовлетворяет условию $U(m, \{h_n\}, \{k_i\})$, где $m > 0$ – целое, $h_n \downarrow 0$, $n = 1, 2, ...$, $1 < k_1 < ... < k_{m-1}$, если

$$sign\varphi_n(t) = sign(h_n^2 - (t-x)^2) \prod_{i=1}^{m-1} (k_i^2 h_n^2 - (t-x)^2) \Rightarrow L_n(\varphi_n(t), x) \geq 0.$$

Заметим, что в периодическом случае запись $(t-x)^2$ означает 2π – периодическую функцию, равную $(t-x)^2$ на $(x-\pi, x+\pi]$.

Конкретные примеры аппроксимирующих последовательностей, удовлетворяющих условию $U(m, \{h_n\}, \{k_i\})$ приведены в работах [3; 4].

Вывод оценки величины $\|L_n(f(t), x) - f(x)\|$ производится по следующей схеме:

1) фиксируем (произвольным образом) x;

2) вводим вспомогательную функцию $\varphi_n(t) = f(t) - g_n(t)$, зависящую от n, где $g_n(t)$ – интерполяционный многочлен Лагранжа, интерполирующий $f(t)$ в узлах $x \pm h_n$, $x \pm k_i h_n$, $i = 1, ..., m-1$;

3)полагаем

$$p_n(t) = (h_n^2 - (t-x)^2) \prod_{i=1}^{m-1} (k_i^2 h_n^2 - (t-x)^2)$$

и подбираем $c_n > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$|\varphi_n(t)| \leq c_n |p_n(t)|;$$

4) отсюда следует, что $|L_n(\varphi_n(t), x)| \leq c_n L_n(p_n(t), x)$. Обоснование этого пункта приводится в [2, с. 37];

5) предполагая $L_n(1, x) = 1$, получим
$L_n(f(t), x) - f(x) \leq c_n L_n(p_n(t), x) + |L_n(g_n(t), x) - f(x)|$;

6) выражаем $L_n(p_n(t), x)$, $c_n = \|f(t, x_1, ..., x_{2m}\|$ через h_n и $\beta_n^{(i)} = \left\|L_n((t-x)^i, x)\right\|$ и получаем оценку.

В последнем пункте обозначено $x_1 = x - k_m h_n$, $x_2 = x - k_{m-1} h_n$, ... ,$x_m = x - h_n$, $x_{m+1} = x + h_n$, ..., $x_{2m} = x + k_{2m} h_n$, $f(t, x_1, ..., x_{2m})$ – разделенная разность.

Для любого целого $m \geq 1$ известны конкретные аппроксимационные последовательности, удовлетворяющие условиям типа $U(m, \{h_n\}, \{k_i\})$ при некоторых конкретных значениях h_n и k_i.

Автором ранее при значении $m = 2$ была получена оценка приближения функций класса $W^3 H_M^\alpha$ ([5]). В статье приводится вывод оценки при $m = 3$. Результат оформлен в виде теоремы следующего содержания.

Теорема. Пусть дана некоторая монотонная, сходящаяся к нулю последовательность действительных чисел h_n. Пусть, далее, последовательность операторов L_n удовлетворяет условию

$$sign\varphi_n(t) = sign \prod_{i=0}^{2} (k_i^2 h_n^2 - (t-x)^2) \Rightarrow L_n(\varphi_n(t), x) \geq 0,$$

$k_0 = 1$, $1 < k_1 < k_2$. При этом $L_n(1, x) = 1$. Тогда для функции $f(t) \in C^3[a,b]$, $f^{///}(t) \in Lip\alpha$, где $0 < \alpha < 1$ выполняется

$$\|L_n(f(t,x)) - f(x)\| \leq \left\|f^{/}\right\| \beta_n^{(1)} + \frac{\left\|f^{//}\right\|}{2} \beta_n^{(2)} + \frac{\left\|f^{///}\right\|}{6} \beta_n^{(3)} +$$

$$+ \frac{(k_2+1)^{\alpha-1} + 2^{\alpha-1} k_1^{\alpha-1}}{6k_2(k_1+k_2)} M h_n^{\alpha-3} \beta_n^{(6)} +$$

$$+ \left[\frac{(k_1^2-1)k_2^{\alpha+2} + (k_2^2-1)k_1^{\alpha+2} + k_2^2 - k_1^2}{(k_2^2-k_1^2)(k_1^2-1)(k_2^2-1)(\alpha^3 + 6\alpha^2 + 11\alpha + 6)}\right] M h_n^{\alpha-2} \beta_n^{(5)} +$$

$$+\left[\frac{(k_1^2-1)k_2^{\alpha+3}+(k_2^2-1)k_1^{\alpha+3}+k_2^2-k_1^2}{(k_2^2-k_1^2)(k_1^2-1)(k_2^2-1)(\alpha^3+6\alpha^2+11\alpha+6)}+\right.$$

$$\left.+\frac{((k_2+1)^{\alpha-1}+2^{\alpha-1}k_1^{\alpha-1})(k_1^2+k_2^2+1)}{6k_2(k_1+k_2)}\right]Mh_n^{\alpha-1}\beta_n^{(4)}+$$

$$+\left[\frac{(k_1^4-1)k_2^{\alpha+2}+(k_2^4-1)k_1^{\alpha+2}+k_2^4-k_1^4}{(k_2^2-k_1^2)(k_1^2-1)(k_2^2-1)(\alpha^3+6\alpha^2+11\alpha+6)}\right]Mh_n^{\alpha}\beta_n^{(3)}+$$

$$+\left[\frac{(k_1^4-1)k_2^{\alpha+3}+(k_2^4-1)k_1^{\alpha+3}+k_2^4-k_1^4}{(k_2^2-k_1^2)(k_2^2-1)(k_1^2-1)(\alpha^3+6\alpha^2+11\alpha+6)}+\right.$$

$$\left.+\frac{((k_2+1)^{\alpha-1}+2^{\alpha-1}k_1^{\alpha-1})(k_1^2+k_2^2+k_1^2k_2^2)}{6k_2(k_1+k_2)}\right]Mh_n^{\alpha+1}\beta_n^{(2)}+$$

$$+\left[\frac{(k_1^2-1)k_1^2k_2^{\alpha+2}+(k_2^2-1)k_1^{\alpha+2}k_2^2+k_1^2k_2^2(k_2^2-k_1^2)}{(k_2^2-k_1^2)(k_1^2-1)(k_2^2-1)(\alpha^3+6\alpha^2+11\alpha+6)}\right]Mh_n^{\alpha+2}\beta_n^{(1)}+$$

$$+\left[\frac{k_1^2k_2^{\alpha+3}(k_1^2-1)+k_1^{\alpha+3}k_2^2(k_2^2-1)+k_1^2k_2^2(k_2^2-k_1^2)}{(k_2^2-k_1^2)(k_2^2-1)(k_1^2-1)(\alpha^3+6\alpha^2+11\alpha+6)}+\right.$$

$$\left.+\frac{((k_2+1)^{\alpha-1}+2^{\alpha-1}k_1^{\alpha-1})k_1^2k_2}{6(k_1+k_2)}\right]Mh_n^{\alpha+3}\beta_n^{(0)},$$

где $\beta_n^{(i)}=\left\|L_n((t-x)^i,x)\right\|$, где $i=\overline{0,6}$.

Доказательство теоремы

Фиксируем произвольным образом $x\in[a,b]$ и $n\in N$ и рассматриваем функцию $\varphi_n(t)=f(t)-g_n(t)$, где $g_n(t)$ – полином Лагранжа, совпадающий со значениями функции $f(t)$ в точках (узлах) $x_1=x-k_2h_n$, $x_2=x-k_1h_n$, $x_3=x-h_n$, $x_4=x+h_n$, $x_5=x+k_1h_n$, $x_6=x+k_2h_n$, а $\varphi_n(t)$ – остаточный член интерполяции.

По определению $\varphi_n(t)$ имеем равенство

$f(t)-f(x)=g_n(t)-f(x)+\varphi_n(t)$.

Отсюда получаем (учитывая, что $L_n(1,x)=1$).

$$\|L_n(f(t),x)-f(x)\|\le\|L_n(g(t),x)-f(x)\|+\|L_n(\varphi_n(t),x)\|. \tag{2}$$

Оценим первое слагаемое неравенства (2).

Функция $f(t)$ имеет в окрестности точки x ограниченную третью производную ($f(t)\in W^3H_M^{\alpha}$). Тогда по формуле Тейлора

$$f(t)=f(x)+f^{/}(x)(t-x)+f^{//}(x)\frac{(t-x)^2}{2}+f^{///}(x)\frac{(t-x)^3}{6}+\mu(t).$$

Отсюда

$$g_n(f,t)-f(x)=f^{/}(x)(t-x)+f^{//}(x)\frac{(t-x)^2}{2}+f^{///}(x)\frac{(t-x)^3}{6}+g(\mu,t), \tag{3}$$

где $g(\mu,t)$ – функция, непрерывная относительно $\mu\in[a,b]$ при любом значении $t\in[a,b]$ (является многочленом Лагранжа, интерполирующим функцию $\mu(t)$ в узлах x_i, $i=1,...,6$).

По интерполяционной формуле Лагранжа

$$g(\mu,t)=\mu(x-k_2h_n)\frac{((t-x)^2-k_1^2h_n^2)((t-x)^2-h_n^2)(t-x-k_2h_n)}{-2k_2(k_1^2-k_2^2)(1-k_2^2)h_n^5}+$$

$$+\mu(x-k_1h_n)\frac{((t-x)^2-k_2^2h_n^2)((t-x)^2-h_n^2)(t-x-k_1h_n)}{-2k_1(k_2^2-k_1^2)(1-k_1^2)h_n^5}+$$

$$
\begin{aligned}
&+\mu(x-h_n)\frac{((t-x)^2-k_2^2h_n^2)((t-x)^2-k_1^2h_n^2)(t-x-h_n)}{-2(k_1^2-1)(k_2^2-1)h_n^5}+\\
&+\mu(x+h_n)\frac{((t-x)^2-k_2^2h_n^2)((t-x)^2-k_1^2h_n^2)(t-x+h_n)}{2(k_1^2-1)(k_2^2-1)h_n^5}+\\
&+\mu(x+k_1h_n)\frac{((t-x)^2-k_2^2h_n^2)((t-x)^2-h_n^2)(t-x+k_1h_n)}{2k_1(k_2^2-k_1^2)(1-k_1^2)h_n^5}+\\
&+\mu(x+k_2h_n)\frac{((t-x)^2-k_1^2h_n^2)((t-x)^2-h_n^2)(t-x+k_2h_n)}{2k_2(k_1^2-k_2^2)(1-k_2^2)h_n^5}.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Так как $\mu^{///}(t)=f^{///}(t)-f^{///}(x)$, то $\mu^{///}(t)\in Lip\alpha$. Следовательно, выполняется неравенство $\left|\mu^{///}(t)-\mu^{///}(x)\right|\le M\left|t-x\right|^{\alpha}$.

Три раза интегрируя обе части неравенства (учитывая при этом, что $\mu(x)=\mu^{/}(x)=\mu^{//}(x)=\mu^{///}(x)=0$), получаем

$$
|\mu(t)|\le\frac{M\left|t-x\right|^{\alpha+3}}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}=\frac{M\left|t-x\right|^{\alpha+3}}{\alpha^3+6\alpha^2+11\alpha+6}.
$$

Подставляем в (3) вместо $g(\mu,t)$ выражение (4) и переходим к неравенству относительно операторов $\{L_n\}$. Учитываем при этом свойство модуля. Получаем окончательно

$$
\begin{aligned}
&|L_n(g(t),x)-f(x)|\le\left|f^{/}(x)\right|\cdot|L_n(t-x,x)|+\frac{\left|f^{//}(t)\right|}{2}\cdot\left|L_n((t-x)^2,x)\right|+\\
&+\frac{\left|f^{///}(t)\right|}{6}\cdot\left|L_n((t-x)^3,x)\right|+\frac{Mk_2^{\alpha+3}h_n^{\alpha-2}}{k_2(k_2^2-k_1^2)(k_2^2-1)(\alpha^3+6\alpha^2+11\alpha+6)}\times\\
&\times(\left|L_n((t-x)^5,x)\right|+k_2h_n\left|L_n((t-x)^4,x)\right|+(k_1^2+1)h_n^2\left|L_n((t-x)^3,x)\right|+\\
&+k_2(k_1^2+1)h_n^3\left|L_n((t-x)^2,x)\right|+k_1^2h_n^4\left|L_n(t-x,x)\right|+k_1^2k_2h_n^5)+\\
&+\frac{Mk_1^{\alpha+3}h_n^{\alpha-2}}{k_1(k_2^2-k_1^2)(k_1^2-1)(\alpha^3+6\alpha^2+11\alpha+6)}\times\\
&\times(\left|L_n((t-x)^5,x)\right|+k_1h_n\left|L_n((t-x)^4,x)\right|+(k_2^2+1)h_n^2\left|L_n((t-x)^3,x)\right|+\\
&+k_1(k_2^2+1)h_n^3\left|L_n((t-x)^2,x)\right|+k_2^2h_n^4\left|L_n(t-x,x)\right|+k_1k_2^2h_n^5)+\\
&+\frac{Mh_n^{\alpha-2}}{(k_1^2-1)(k_2^2-1)(\alpha^3+6\alpha^2+11\alpha+6)}\times\\
&\times(\left|L_n((t-x)^5,x)\right|+h_n\left|L_n((t-x)^4,x)\right|+(k_1^2+k_2^2)h_n^2\left|L_n((t-x)^3,x)\right|+\\
&+(k_1^2+k_2^2)h_n^3\left|L_n((t-x)^2,x)\right|+k_1^2k_2^2h_n^4\left|L_n(t-x,x)\right|+k_1^2k_2^2h_n^5).
\end{aligned}
$$

Перейдем от модуля к норме, обозначая при этом $\beta_n^{(i)}=\left\|L_n((t-x)^i,x)\right\|$ и группируя множители при $\beta_n^{(i)}$. Получаем

$$
\begin{aligned}
&\|L_n(g(t),x)-f(x)\|\le\left\|f^{/}\right\|\beta_n^{(1)}+\frac{\left\|f^{//}\right\|}{2}\beta_n^{(2)}+\frac{\left\|f^{///}\right\|}{6}\beta_n^{(3)}+\\
&+\frac{Mh_n^{\alpha-2}\beta_n^{(5)}}{\alpha^3+6\alpha^2+11\alpha+6}\left[\frac{(k_1^2-1)k_2^{\alpha+2}+(k_2^2-1)k_1^{\alpha+2}+k_2^2-k_1^2}{(k_2^2-k_1^2)(k_1^2-1)(k_2^2-1)}\right]+
\end{aligned}
$$

$$+\frac{Mh_n^{\alpha-1}\beta_n^{(4)}}{\alpha^3+6\alpha^2+11\alpha+6}\left[\frac{(k_1^2-1)k_2^{\alpha+3}+(k_2^2-1)k_1^{\alpha+3}+k_2^2-k_1^2}{(k_2^2-k_1^2)(k_1^2-1)(k_2^2-1)}\right]+$$

$$+\frac{Mh_n^{\alpha}\beta_n^{(3)}}{\alpha^3+6\alpha^2+11\alpha+6}\left[\frac{(k_1^4-1)k_2^{\alpha+2}+(k_2^4-1)k_1^{\alpha+2}+k_2^4-k_1^4}{(k_2^2-k_1^2)(k_1^2-1)(k_2^2-1)}\right]+$$

$$+\frac{Mh_n^{\alpha+1}\beta_n^{(2)}}{\alpha^3+6\alpha^2+11\alpha+6}\left[\frac{(k_1^4-1)k_2^{\alpha+3}+(k_2^4-1)k_1^{\alpha+3}+k_2^4-k_1^4}{(k_2^2-k_1^2)(k_1^2-1)(k_2^2-1)}\right]+$$

$$+\frac{Mh_n^{\alpha+2}\beta_n^{(1)}}{\alpha^3+6\alpha^2+11\alpha+6}\left[\frac{(k_1^2-1)k_1^2k_2^{\alpha+2}+(k_2^2-1)k_1^{\alpha+2}k_2^2+k_1^2k_2^2(k_2^2-k_1^2)}{(k_2^2-k_1^2)(k_1^2-1)(k_2^2-1)}\right]+$$

$$+\frac{Mh_n^{\alpha+3}}{\alpha^3+6\alpha^2+11\alpha+6}\left[\frac{(k_1^2-1)k_1^2k_2^{\alpha+3}+(k_2^2-1)k_1^{\alpha+3}k_2^2+k_1^2k_2^2(k_2^2-k_1^2)}{(k_2^2-k_1^2)(k_1^2-1)(k_2^2-1)}\right].$$

Оценим второе слагаемое неравенства (2). По интерполяционной формуле Ньютона имеем

$$|\varphi(t)|=|f(t;x_1;x_2;x_3;x_4;x_5;x_6)|\cdot\left|(t-x)^6-(k_1^2+k_2^2+1)h_h^2(t-x)^4+\right.$$

$$\left.+(k_1^2+k_2^2+k_1^2k_2^2)h_n^4(t-x)^2-k_1^2k_2^2h_n^6\right|.$$

Оценим вначале разделенную разность

$$|f(t;x_1;x_2;x_3;x_4;x_5;x_6)|\le\frac{|f(x_3;t;x_4;x_5;x_6)+f(x_2;x_3;t;x_4;x_5)|}{(x_6-x_1)(x_6-x_2)}+$$
$$+\frac{|f(x_2;x_3;t;x_4;x_5)+f(x_1;x_2;x_3;t;x_4)|}{(x_6-x_1)(x_5-x_1)}.$$

Для любых $t_1,t_2,t_3,t_4,t_5\in[a,b]$, таких, что $t_1<t_2<t_3<t_4<t_5$

$$|f(t_1;t_2;t_3;t_4;t_5)|\le\left|\frac{f(t_2;t_3;t_4;t_5)+f(t_1;t_2;t_3;t_4)}{6(t_5-t_1)}\right|=$$
$$=\left|\frac{f^{///}(\xi_2)-f^{///}(\xi_1)}{6(t_5-t_1)}\right|\le\frac{M\left|\xi_2-\xi_1\right|^{\alpha}}{6(t_5-t_1)}\le\frac{M}{6}\left|t_5-t_1\right|^{\alpha-1},$$

где $\xi_1\in[t_1;t_3]$, $\xi_2\in[t_2;t_4]$.
Оценим каждую из разделенных разностей четвертого порядка по отдельности:

$$|f(x_3;t;x_4;x_5;x_6)|=|f(x_1;x_2;x_3;t;x_4)|\le\frac{M}{6}(k_2+1)^{\alpha-1}h_n^{\alpha-1}$$

$$|f(x_2;x_3;t;x_4;x_5)|\le\frac{M}{6}(2k_1)^{\alpha-1}h_n^{\alpha-1}.$$

Сама разделенная разность шестого порядка удовлетворяет неравенству

$$|f(t;x_1;x_2;x_3;x_4;x_5;x_6)|\le\left[\frac{(k_2+1)^{\alpha-1}+(2k_1)^{\alpha-1}}{6k_2(k_1+k_2)}\right]Mh_n^{\alpha-3}.$$

Отсюда получаем

$$\|L_n(\varphi(t),x)\|\le\frac{(k_2+1)^{\alpha-1}+2^{\alpha-1}k_1^{\alpha-1}}{6k_2(k_1+k_2)}Mh_n^{\alpha-3}\beta_n^{(6)}+$$

$$+\frac{((k_2+1)^{\alpha-1}+2^{\alpha-1}k_1^{\alpha-1})(k_1^2+k_2^2+1)}{6k_2(k_1+k_2)}Mh_n^{\alpha-1}\beta_n^{(4)}+$$

$$+\frac{((k_2+1)^{\alpha-1}+2^{\alpha-1}k_1^{\alpha-1})(k_1^2+k_2^2+k_1^2k_2^2)}{6k_2(k_1+k_2)}Mh_n^{\alpha+1}\beta_n^{(2)}+$$

$$+\frac{((k_2+1)^{\alpha-1}+2^{\alpha-1}k_1^{\alpha-1})k_1^2k_2}{6(k_1+k_2)}Mh_n^{\alpha+3}\beta_n^{(0)}.$$

Суммируя оценки, получаем указанный в теореме результат.

Заметим, что полученная оценка верна и в том случае, если k_1, k_2 зависят от n ($k_1 = k_1(n)$, $k_2 = k_2(n)$). Разумеется, должны выполняться неравенства $1 < k_1(n) < k_2(n)$.

Список литературы

1. Абакумов Ю. Г., Забелина Н. А., Шестакова О. Н. О последовательностях линейных функционалов и некоторых операторах класса S_{2m} // Сибирский математический журнал, 2000. №2. С. 247–252.

2. Абакумов Ю. Г. Последовательности линейных функционалов и аппроксимационные свойства линейных операторов. Чита: ЧитГУ, 2004. 179 с.

3. Баскаков В. А. Об операторах класса S_{2m}, построенных на ядрах Фейера // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь: ТвГУ, 2001. С. 5–11.

4. Ершова Е. М. Операторы класса S_{2m} и их аппроксимативные свойства: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Москва, 2002. 17 с.

5. Мэдэгэй М. Б. Об аппроксимационной оценке приближения функций одного класса// Моделирование. Системный анализ. Технологии. Чита: ЗабИЖТ, 2008. С. 36–40.

6. Шестакова О. Н. Аппроксимативные свойства некоторых операторов класса S_m и их двумерных аналогов: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Владивосток, 2004. 18 с.

Рукопись поступила в редакцию 20 апреля 2011 г.