

УДК 539.18+517.97  
ББК В3 В1161.8

*Саид Насим Хусейн Шах*

*г. Карачи, Пакистан*

*перевод: В. Е. Архинчеев*

*г. Улан-Удэ, Россия*

**Вычисление энергии состояний атомов (H и He) вариационным методом  
в линейном и нелинейном приближениях**

Как хорошо известно, задача многих тел не решается точно, поэтому в настоящем сообщении мы использовали различные приближенные методы расчета. Вначале была вычислена энергия атомов с помощью линейного гамильтониана, затем с использованием нелинейного гамильтонова оператора, и полученные результаты были сравнены между собой. В рамках такого подхода были установлены различия между энергиями при использовании различных волновых функций и дано обсуждение полученных результатов.

*Ключевые слова:* энергия состояния, волновая функция, гамильтониан, нелинейность.

*Syed Naseem Hussain Shah*

*Karachi, Pakistan*

*translation: V. Ye. Arkhincheev*

*Ulan-Ude, Russia*

**(H и He) Atomic State Energy Estimation  
by Variation Method in Linear and Nonlinear Approximation**

As well known the exact solution of several particles is not possible so here we used approximation methods. We have calculated the ground state energy of the wave function of atoms with the help of linear and nonlinear Hamiltonian operator and then compared these ground state energies. This gave us a new difference between the energies of different wave functions.

*Keywords:* state energy, wave function, Hamiltonian, nonlinearity.

**Введение**

Вариационный метод вычисления – один из самых используемых приближенных методов при вычислениях собственных значений энергии основного состояния атомов и первых возбужденных, для которых в основном известны лишь качественные представления о виде волновых функций. В случае атома водорода, когда система состоит из двух тел, возможно точное решение уравнения Шредингера. Однако, если система состоит из трех и более тел, то тогда точное решение невозможно, и используются приближенные методы расчета, к ним относится и вариационный метод. Вариационный метод является одним из наиболее полезных при расчетах химических соединений; а также при вычислении энергии основного состояния и первых возбужденных состояний систем, для которых невозможно построить точную волновую функцию.

В соответствии с квантово-механическим подходом энергия системы описывается выражением:

$$E = \frac{\int \Psi^* H \Psi dV}{\int \Psi^* \Psi dV}. \quad (1)$$

Т. е. используя выражение (1) можно найти энергию любой системы, если известны гамильтониан и волновая функция. Согласно вариационному методу можно показать, что минимальная энергия  $E_0$  получается при использовании точной волновой функции  $\Psi_0$  для системы; использование любой другой пробной волновой функции  $\Psi_i$  дает энергию, больше минимального значения.

Следовательно, энергия системы, полученная при использовании пробных волновых функций волны, будет больше минимального значения. Таким образом, не зная точных волновых функций и используя некоторые пробные волновые функции, мы сможем, по крайней мере, оценить, какие из нескольких пробных функций являются достаточно точным приближением к истинной волновой функции в смысле получения минимальной энергии.

Э. Шредингер [1] одним из первых сформулировал квантовую механику в форме вариационного принципа и во многих задачах, особенно когда находятся приближительные решения, это наиболее удобная форма использования. Дифференциальное уравнение Шредингера описывает движение волнового пакета  $\Psi(r, t)$ . Волна, связанная со свободным перемещением нерелятивистской частицы с хорошо определенным импульсом «P» и энергией «E» представляется в виде:

$$\Psi(r, t) = Ae^{\frac{i(r_0 P - Et)}{\hbar}}, \quad (2)$$

где  $P = \hbar K$  и  $E = \hbar w$ ,  $K$  – волновой вектор и  $w$  – угловая скорость.

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(r, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(r, t). \quad (3)$$

Дифференциальное уравнение (3) является волновым уравнением Шредингера для свободной частицы в нерелятивистском приближении, где  $\nabla^2$  – оператор Лапласа. В случае внешних потенциальных сил  $V(r)$ , когда  $F = -\nabla \Delta$ , уравнение принимает вид:

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) \right\} \Psi(r, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(r, t)}{\partial t} \quad (4)$$

Вышеупомянутое уравнение описывает движение частицы массы «m» в силовом поле ( $F = -\nabla \Delta$ ), и это может также быть представлено как:

$$\hat{H}\Psi = \hat{E}\Psi,$$

где  $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r)$ ,  $\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$  и  $\hat{H}$  – линейный оператор Гамильтона, который дает собственное значение – полную энергию частицы, когда действует на  $\Psi$ .

Нелинейное уравнение Шредингера было получено независимо исследователями Гроссом [2] и Pitaevskii [3, 4]. Уравнение Гросса-Питаевского (GPE) оказалось чрезвычайно успешным для объяснения многих экспериментально наблюдаемых фактов при исследовании конденсата Бозе-Эйнштейна. Также гамильтонов оператор стационарного уравнения GPE используется и для вычисления основного состояния с использованием различных волновых функций. Однако оно не в состоянии учесть статистические квантовые эффекты, необходимые для того, чтобы рассматривать спонтанно начатые процессы [5, 6]. Уравнение Гросса-Питаевского аналогично уравнению Шредингера, но с добавлением взаимодействующего термина, к тому же уравнение GPE – нелинейное уравнение. Введем константу связи  $g$ , пропорциональную длине рассеяния двух бозонов  $a_s$  :

$$g = \frac{4\pi\hbar^2 a_s}{m}. \quad (5)$$

Тогда зависящее от времени уравнение Гросса-Питаевского имеет вид:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(r)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(r) + V(r) \Psi(r) + g |\Psi(r)|^2 \Psi(r). \quad (6)$$

В случае G.P.E оператор Гамильтона становится нелинейным:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) + g |\Psi(r)|^2 \quad (7)$$

## 2. Случай линейного гамильтониана

Для решения линейных уравнения разработано много методов, дающих точное решение. Энергия основного состояния атомов может быть вычислена с помощью уравнения Шредингера с использованием линейного гамильтонова оператора

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r).$$

### 2.1. Атом водорода

В этом случае волновая функция имеет вид:

$$\Psi(r) = e^{-ar} \quad (8)$$

Для основного состояния атома водорода потенциальная энергия будет  $-\frac{e^2}{r}$ , и следовательно, гамильтон оператор описывается выражением:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \frac{e^2}{r}. \quad (9)$$

Согласно вариационному методу (2.1) энергия водородного атома может быть вычислена как:

$$E = \frac{\int e^{-ar} \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \frac{e^2}{r}\right) e^{-ar} dV}{\int e^{-ar} e^{-ar} dV},$$

где  $dV = 4\pi r^2 dr$  – объем сферы, заключенной между расстояниями  $r$  и  $r+dr$  от ядра. Пределы интегрирования меняются от 0 до  $\infty$ , поскольку меняется от нуля до бесконечности. Поскольку энергия описывается только радиальной частью уравнения, мы должны только рассмотреть радиальную часть оператора Лапласа  $\nabla^2$ :

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right)$$

Таким образом, энергия основного состояния атома водорода равна:

$$E = \frac{\hbar^2 \alpha^2}{2m} - e^2 \alpha. \quad (10)$$

Далее выбираем параметр « $\alpha$ » таким образом, чтобы получить минимальную энергию. Итак, из (10) следует:

$$\frac{\partial E}{\partial \alpha} = \frac{\hbar^2 \alpha}{m} - e^2 = 0, \quad \text{т. е.} \quad \alpha = \frac{me^2}{\hbar^2}$$

Подставляя значение параметра в уравнение (10), получим энергию основного состояния водородного атома:

$$E = -\frac{me^4}{2\hbar^2}. \quad (11)$$

### 2. 2. Атом гелия

Уравнение Шредингера может быть решено точно для атома водорода, но уже для атома гелия оно не может быть решено, потому что возникает проблема многих (трех) тел. Здесь и можно использовать вариационный метод, чтобы получить энергию основного состояния атома гелия. Атом гелия состоит из ядра с зарядом  $+Ze (Z = 2)$  и двух электронов с зарядом  $-e$ , как показано на рис. 1.

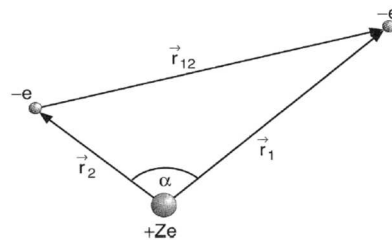


Рис.1. Атом гелия

Основная проблема вариационного метода состоит в выборе пробной функции. Выберем в качестве пробной волновую функцию в виде произведения одночастичных функций:

$$\Psi(r_1, r_2) = \Psi_1(r_1) \Psi_2(r_2),$$

где

$$\Psi_j(r_j) = \sqrt{\frac{z^3}{\pi\alpha_0^3}} e^{-\frac{zr_j}{\alpha_0}}$$

$j = 1, 2, \dots$  и общая волновая функция равна:

$$\Psi(r_1, r_2) = \frac{z^3}{\pi\alpha_0^3} e^{-\frac{z(r_1+r_2)}{\alpha_0}}, \quad \text{где} \quad \alpha_0 = \frac{\hbar^2}{me^2}.$$

Потенциальная энергия системы описывается выражением:

$$V(r) = -\frac{2e^2}{r_1} - \frac{2e^2}{r_2} + \frac{e^2}{r_{12}}, \quad (12)$$

где  $r_1$  и  $r_2$  – расстояния электронов от ядра  $r_{12}$  – расстояние между электронами. Оператор Гамильтона равен:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} (\nabla_1^2 + \nabla_2^2) - \frac{2e^2}{r_1} - \frac{2e^2}{r_2} + \frac{e^2}{r_{12}}.$$

Вначале вычислим  $H\Psi$  и рассмотрим часть, относящуюся к первому электрону:

$$\begin{aligned} \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_1^2 - \frac{Ze^2}{r_1} \right] \Psi &= \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_1^2 - \frac{Ze^2}{r_1} \right] \frac{Z^3}{\pi\alpha_0^3} e^{-\frac{z(r_1+r_2)}{\alpha_0}} = \\ &= \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \frac{1}{r_1^2} \frac{\partial}{\partial r_1} r_1^2 \frac{\partial}{\partial r_1} \right\} - \frac{Zt^2}{r_1} \right] \frac{Z^3}{\pi\alpha_0^3} e^{-\frac{z(r_1+r_2)}{\alpha_0}} = -\frac{Z^2\hbar^2}{2m\alpha_0^2} \left[ \frac{Z^3}{\pi\alpha_0^3} e^{-\frac{z(r_1+r_2)}{\alpha_0}} \right]. \end{aligned}$$

Аналогично, найдем для второго электрона:

$$\begin{aligned} \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_2^2 - \frac{Ze^2}{r_2} \right] \Psi &= \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_2^2 - \frac{Ze^2}{r_2} \right] \frac{Z^3}{\pi\alpha_0^3} e^{-\frac{z(r_1+r_2)}{\alpha_0}} = \\ &= -\frac{Z^2\hbar^2}{2m\alpha_0^2} \left[ \frac{Z^3}{\pi\alpha_0^3} e^{-\frac{z(r_1+r_2)}{\alpha_0}} \right]. \end{aligned}$$

Таким образом получим:

$$H\Psi = \left[ 2 \left( -\frac{Z^2\hbar^2}{2m\alpha_0^2} \right) + \frac{(Z-2)e^2}{r_1} + \frac{(Z-2)e^2}{r_2} + \frac{e^2}{r_{12}} \right] \frac{Z^3}{\pi\alpha_0^3} e^{-\frac{z(r_1+r_2)}{\alpha_0}}.$$

Хотя нелегко оценить погрешность вычисления волновой функции, полученной таким образом, тем не менее можно найти собственные значения для этих функций – значения для энергии [7, 8]. Согласно вышеописанному энергия равна:

$$E = \int \Psi^* \left( -\frac{Z^2\hbar^2}{m\alpha_0^2} \right) \Psi dV + \int \Psi^* (Z-2)e^2 \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \Psi dV + \int \Psi^* \frac{e^2}{r_{12}} \Psi dV$$

Рассмотрим интеграл:

$$\begin{aligned} \int \Psi^* \left( -\frac{Z^2\hbar^2}{m\alpha_0^2} \right) \Psi dV &= -\frac{Z^2\hbar^2}{m\alpha_0^2} \int_0^\infty \left( \frac{Z^3}{\pi\alpha_0^3} \right) e^{-2Z\frac{(r_1+r_2)}{\alpha_0}} dV. \\ &= -\frac{Z^2\hbar^2}{m\alpha_0^2} \left( \frac{Z^3}{\pi\alpha_0^3} \right)^2 \int_0^\infty e^{-2Z\frac{r_1}{\alpha_0}} 4\pi r_1^2 dr_1 \int_0^\infty e^{-2Z\frac{r_2}{\alpha_0}} 4\pi r_2^2 dr_2 \\ &= -\frac{Z^2\hbar^2}{m\alpha_0^2} \left( \frac{Z^3}{\pi\alpha_0^3} \right)^2 \times 16\pi^2 \times \left( \frac{2}{(2Z/\alpha_0)^3} \right)^2 = -\frac{Z^2 m e^4}{\hbar^2}. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим 2-й интеграл и предположим, что  $r_1 \approx r_2$ , т. е.  $\Psi_1(r_1) = \Psi_2(r_2)$  :

$$\begin{aligned} \Psi^* (Z - 2) e^2 \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \Psi dV &= \int 2 (Z - 2) e^2 \frac{1}{r_1} \frac{Z^3}{\pi \alpha_0^3} e^{-\frac{2Zr_2}{\alpha_0}} d\theta_1 \\ &= 2 (Z - 2) e^2 \left( \frac{Z^3}{\pi \alpha_0^3} \right) \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{e^{-\frac{2Zr_1}{\alpha_0}}}{r_1} r_1^2 dr_1 \sin \theta d\theta d\varphi \\ &= \frac{2 (Z - 2) t^2 Z}{\alpha_0} = \frac{2 (Z - 2) Z m e^4}{\hbar^2}. \end{aligned}$$

Рассмотрим третий интеграл:

$$\begin{aligned} \Psi^* \frac{e^2}{r_{12}} \Psi dV &= \int_0^\infty \left( \frac{Z^3}{\pi \alpha_0^3} \right)^2 \frac{r^2}{r_{12}} e^{-2Z \frac{(r_1+r_2)}{\alpha_0}} dr_1^3 dr_2^3 \\ &= e^2 \left( \frac{Z^3}{\pi \alpha_0^3} \right)^2 \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{2Zr_1}{\alpha_0}} e^{-\frac{2Zr_2}{\alpha_0}}}{r_{12}} dr_1^3 dr_2^3. \end{aligned}$$

Введем безразмерные величины  $R_1 = \frac{2Zr_2}{\alpha_0}$ ,  $R_2 = \frac{2Zr_1}{\alpha_0}$  и  $R_{12} = \frac{2Zr_{12}}{\alpha_0}$ , что соответствует  $dR_1 = \frac{2Zdr_1}{\alpha_0}$ ,  $dR_2 = \frac{2Zdr_2}{\alpha_0}$  и  $dR_{12} = \frac{2Zdr_{12}}{\alpha_0}$ .

Поэтому можно записать интеграл как:

$$\begin{aligned} &= e^2 \left( \frac{Z^3}{\pi \alpha_0^3} \right)^2 \int_0^\infty \frac{e^{-R_1} e^{-R_2}}{\frac{\alpha_0}{2Z} R_{12}} \left( \frac{\alpha_0}{2Z} dR_1 \right)^3 \left( \frac{\alpha_0}{2Z} dR_2 \right)^3 \\ &= e^2 \left( \frac{Z^3}{\pi \alpha_0^3} \right)^2 \left( \frac{\alpha_0}{2Z} \right)^2 \left( \frac{\alpha_0}{2Z} \right)^3 \times \frac{2Z}{\alpha_0} \int_0^\infty \frac{e^{-(R_1+R_2)}}{R_{12}} dR_1^3 dR_2^3 \\ &= e^2 \left( \frac{Z^3}{\pi \alpha_0^3} \right)^2 \left( \frac{\alpha_0}{2Z} \right)^2 \left( \frac{\alpha_0}{2Z} \right)^3 \times \frac{2Z}{\alpha_0} \times 20\pi^2 = \frac{5}{8\hbar^2} Z m e^4. \end{aligned}$$

Таким образом, энергия равна:

$$\begin{aligned} E &= -\frac{Z^2 m e^4}{\hbar^2} + \frac{2 (Z - 2) Z m^4}{\hbar^2} + \frac{5}{8\hbar^2} Z m e^4 \\ E &= \left( Z^2 - \frac{27}{8} Z \right) \frac{m e^4}{\hbar^2}. \end{aligned}$$

Для минимизации выражения используем условие  $\frac{\partial E}{\partial Z} = 0$ , которое дает значение  $Z = \frac{27}{16} < 2$ . Таким образом, получим:

$$E = -2.8477 \frac{m e^4}{\hbar^2}. \quad (13)$$

### 3. Случай нелинейного гамильтониана

Далее используем нелинейное уравнение Гросса-Питаевского для нахождения энергетического спектра атомов водорода и гелия. В этом случае оператор Гамильтона имеет вид:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) + g |\Psi(r)|^2.$$

#### 3.1. Атом водорода

Мы рассматриваем водородный атом как систему двух тел (ядро и электрон). Взаимодействие возникает из-за кулоновского притяжения электрических зарядов. Обозначим заряд ядра  $Ze$  и заряд электрона  $-e$ . Нелинейный гамильтониан для атома водорода:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \frac{e^2}{r} + g |e^{-\alpha r}|^2. \quad (14)$$

Используя вариационный метод, получим выражение для энергии:

$$E = \frac{\int e^{-\alpha r} \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \frac{e^2}{r} + g |e^{-\alpha r}|^2 \right) e^{-\alpha r} dV}{\int e^{-\alpha r} e^{-\alpha r} dV}.$$

Используя соотношение

$$\int_0^\infty x^n e^{-\alpha x} dx = \frac{\Gamma(n+1)}{\alpha^{n+1}},$$

где  $\Gamma(n) = (n-1)!\Gamma(n) = (n-1)!$

$$E = \frac{\hbar^2 \alpha^2}{2m} - e^2 \alpha + \frac{g}{8}. \quad (15)$$

Подставляя значение « $\alpha$ » в соотношении (13)  $\alpha = \frac{me^2}{\hbar^2}$ , получим:

$$E = -\frac{me^2}{2\hbar^2} + \frac{g}{8}. \quad (16)$$

### 3. 2. Атом гелия

Далее исследуем спектр атома гелия и будем рассматривать атом как систему трех частиц (ядро и два электрона). Взаимодействие возникает из-за кулоновского взаимодействия электрических зарядов. Потенциальная энергия системы в отсутствие внешних полей равна  $-\frac{2e^2}{r_1} - \frac{2e^2}{r_2} + \frac{e^2}{r_{12}}$ . Нелинейный гамильтониан для атома гелия описывается выражением:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} (\nabla_1^2 + \nabla_2^2) - \frac{2e^2}{r_1} - \frac{2e^2}{r_2} + \frac{e^2}{r_{12}} + g |\Psi(r_1, r_2)|^2.$$

Все вычисления аналогичные, кроме нелинейного члена.

$$\begin{aligned} \int \Psi^* g |\Psi(r_1, r_2)|^2 \Psi dV &= \int_0^\infty g \left( \frac{Z^3}{\pi \alpha_0^3} \right)^4 e^{-4Z \frac{(r_1+r_2)}{\alpha_0}} 4\pi r_1^2 dr_1 \times 4\pi r_2^2 dr_2 \\ &= \left( \frac{Z^3}{\pi \alpha_0^3} \right)^4 \times g (4\pi)^2 \int_0^\infty e^{-4Z \frac{r_1}{\alpha_0}} r_1^2 dr_1 \times \int_0^\infty e^{-4Z \frac{r_2}{\alpha_0}} r_2^2 dr_2. \end{aligned}$$

Используем соотношение

$$\int_0^\infty x^n e^{-\alpha x} dx = \frac{\Gamma(n+1)}{\alpha^{n+1}},$$

где  $\Gamma(n) = (n-1)!$

$$= g \frac{Z^6}{64\pi^2 \alpha_0^6} = g \frac{Z^6 m^6 e^{12}}{64\pi^2 \hbar^6}.$$

Суммируя все вклады, получим:

$$E = \left( Z^2 - \frac{27}{8} Z \right) \frac{me^4}{\hbar^2} + g \frac{Z^6 m^6 e^{12}}{64\pi^2 \hbar^6}.$$

Используя значения для параметра  $Z = \frac{27}{16}$ , найдем значения для энергии основного состояния:

$$E = -2.8477 \frac{me^4}{\hbar^2} + g \left( \frac{27}{16} \right)^6 \frac{m^6 e^{12}}{64\pi^2 \hbar^6}. \quad (17)$$

#### 4. Результат и заключение

Полученный результаты для удобства сравнения ниже сведены в таблицу

VARIATION METOD $E = \frac{\int \Psi^* H \Psi dV}{\int \Psi^* \Psi dV}$	LINEAR YAMILTONIAN $H = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r)$	NON-LINEAR HAMILTONIAN $H = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) + V_0  \Psi(r) ^2$	ENERGY DIFERENCES
WAVE FUNCTIONS	ENERGY WITH LINESR METHOD	ENERGY WITH NONLINEFR METHOD	
HYDROGEN ATOM $\Psi(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi\alpha^3}} e^{-r/\alpha}$	$E = -\frac{me^4}{2\hbar^2}$	$e = -\frac{me^4}{2\hbar^2} + \frac{V_0}{8}$	$\Delta E = \frac{V_0}{8}$
HELIUM ATOM $\Psi(r_1, r_2) = \frac{Z^3}{\pi\alpha_0^3} e^{-\frac{Z(r_1+r_2)}{\alpha_0}}$	$E = -2.8477 \frac{me^4}{\hbar^2}$	$E = -2.8477 \frac{me^4}{\hbar^2} + V_0 \left(\frac{27}{16}\right)^6 \frac{m^6 e^{12}}{64\pi^2 \hbar^6}$	$\Delta E = V_0 \left(\frac{27}{16}\right)^6 \frac{m^6 e^{12}}{64\pi^2 \hbar^6}$

В таблице приведены значения энергии основного состояния, вычисленные с использованием уравнений Шредингера и Гросса-Питаевского, а также различие в энергиях. Эти различия энергии основного состояния атомов водорода и гелия могут указать на преимущества метода вычисления энергии при использовании различных пробных функций.

Напомним еще раз кратко. Энергия основного состояния водородного атома при вычислении с линейным гамильтонианом равна:

$$E = -\frac{me^4}{2\hbar^2},$$

а та же энергия, вычисленная с использованием нелинейного гамильтониана, описывается выражением:

$$E = -\frac{me^4}{2\hbar^2} + \frac{V_0}{8}.$$

Различие энергии основного состояния атома водорода, вычисленная двумя методами, равно:

$$\Delta E = \frac{V_0}{8}$$

Аналогичный результат получен и для атома гелия:

$$\Delta E = V_0 \left(\frac{27}{16}\right)^6 \frac{m^6 e^{12}}{64\pi^2 \hbar^6}.$$

Согласно выполненным выше вычислениям изменение в энергии происходит из-за нелинейного поведения частиц, которое наблюдается экспериментально при очень низкой температуре  $T = 2mK$ , то есть в конденсатах Бозе-Эйнштейна. Замедление атомов до очень низких температур при помощи лазерного охлаждения приводит к появлению нового квантового состояния, которое известно как конденсат Бозе или конденсат Боз-Эйнштейна. Новое квантовое состояние – конденсат Бозе-Эйнштейна основано на понятии Бозе газа. Бозе газ описывается статистикой Бозе-Эйнштейна, описывающее статистическое распределение неразличимых частиц с целым значением спина и названными бозонами. К бозонам относятся и фотоны, и атомы, такие, как гелий 4. Эйнштейн предположил, что бозоны, охлажденные до очень низких температур, образуют новое квантовое состояние, и ввел концепцию новой формы материи – конденсата.

В конденсате Бозе-Эйнштейна при очень низких температурах все атомы переходят в основное состояние и становятся «одним» атомом, который называют суператомом. В этом основном состоянии происходит сильное взаимодействие между частицами, из-за которого может произойти вышеупомянутое изменение в энергии. Эти результаты могут быть проверены экспериментально в будущем.

*Список литературы*

1. Schrodinger // Ann. der Physic, 1926. V. 79/ P. 361.
2. Gross E. P. «Structure of a Quantized Vortex in Boson Systems», 1961, Nuovo Cimento V. 20. P. 454.
3. Pitaevskii L. P. // Sov. Phys. JETP, 1961. V. 13. P. 451.
4. Huang K. and Yang C. N. Phys. Rev., 1957. V. 105. P. 767.
5. Fetter A. L. and Walecka J. D. // «Quantum Theory of Many-Particle Systems» McGraw-Hill, 1971.
6. Edwards M. and Burnett K. // Phys. Rev. A, 1995. V. 51. P. 1382.
7. Eckart C., Phys. Rev. 1930. V. 36. P. 878.
8. Gardiner C. W. and Davis M. J. // J. Phys. B. 2003. V. 36. P. 4731.

**Рукопись поступила в редакцию 28 апреля 2011 г.**