УДК 539.219.3
ББК В 375.6

Н. В. Юможапова, В. Е. Архинчеев
г. Улан-Удэ, Россия

Асимптотическое решение обобщенного диффузионного уравнения дробного порядка по времени[1]

Исследовано асимптотическое поведение решений уравнения дробного порядка по времени, возникающие при описании диффузии в неоднородных и пористых системах. Показано, что в отличие от гауссовых решений полученные решения оказываются несимметричными относительно координат X и Y.

Ключевые слова: аномальная диффузия, уравнения дробного порядка, гауссовы распределения, устойчивые распределения, асимптотические решения.

N. V. Yumozhapova, V. Ye. Arkhincheev
Ulan-Ude, Russia

Asymptotic Solution of Generalized Diffusion Equation of Fractional Order on Time

The asymptotic behavior of solutions of fractional temporal equations, which have obtained at the descrip-tion of the diffusion in heterogeneous and porous media are investigated. It is shown that in the opposite of Gaussian solutions the obtained solutions are asymmetric in relation to coordinates X and Y.

Keywords: anomalous diffusion, equations of fractional order, Gaussian distributions, stable distributions, asymptotic solutions.

1. Введение

Интерес к исследованиям стохастического транспорта в неупорядоченных средах обусловлен особенностями переноса в неупорядоченных системах. Одним из наиболее известных примеров необычного поведения транспорта в неупорядоченных системах является изменение характера стохастического диффузионного транспорта, а именно степенная субдиффузионная зависимость от времени среднеквадратичного смещения случайных блужданий в этих системах [7–9]. В качестве базовых уравнений для описания аномального стохастического транспорта выступают обобщенные дифференциальные уравнения, в том числе и уравнения дробного порядка. Область применимости дифференциальных уравнений дробного порядка значительно шире, чем дифференциальных уравнений с целочисленным дифференцированием, поскольку последние оказываются их частным случаем. Дополнительный интерес к дифференциальным уравнениям дробного порядка обусловлен также и отсутствием ясной физической интерпретацией [10]. Было показано, что переход к производной дробного порядка по времени позволяет учитывать эффекты памяти системы [4]. Как правило, решения уравнений дробного порядка имеют сложный вид и строятся в классе функций, свойства которых не являются хорошо изученными. Поэтому исследование асимптотического поведения решений уравнений дробного порядка представляет интерес, асимптотические пределы важны также для различных приложений. Таким образом, целью настоящей работы будет исследование асимптотического поведения решений уравнений дробного порядка.

Вначале кратко обсуждается гребешковая модель и вывод эффективного диффузионного уравнения дробного порядка по времени. Получено обобщение закона Фика для анизотропных аномальных случайных блужданий. В Заключении дано краткое обсуждение полученных результатов и сравнение с результатами, полученными ранее.

[1]Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ №10-02-00573а

2. Модель гребешковой структуры

Впервые структура гребешковой модели была введена для описания субдиффузии на перколяционных кластерах [6], [7]. Она состоит из хорошо проводящей оси (аналог скелета перколяционного кластера) и ребер, прикрепленных к оси. Особенность диффузии в гребешковой структуре состоит в возможности смещения по x – направлению только вдоль оси структуры (при y=0).

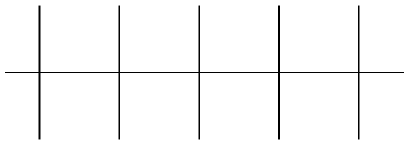

Рис. 1. Модель гребешковой структуры: проводящая ось и ребра, перпендикулярно прикрепленные к оси структуры

В работах [1, 2, 5] выведено обобщенное диффузионное уравнение дробного порядка по времени в рамках гребешковой модели перколяционных кластеров:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - D_1\delta(y)\frac{\partial^2}{\partial x^2} - D_2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\cdot G\left(x,y,t\right) = \delta\left(x\right)\delta\left(y\right)\delta\left(t\right). \tag{1}$$

Здесь $G(x,y,t)$ – функция Грина для уравнения диффузии, в качестве начальных данных используется точечный источник. Из-за сингулярного поведения коэффициента диффузии вдоль оси структуры решение уравнение диффузии в гауссовом виде невозможно. Поэтому для вывода решения и дальнейшего удобства сделаем преобразование Лапласа по времени и преобразование Фурье по x-координате [3], [6]:

$$\left[s + D_1k^2\delta\left(y\right) - D_2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]\widehat{G}\left(s,k,y\right) = \delta\left(\left(y\right)\right). \tag{2}$$

Здесь $\widehat{G}\left(s,k,y\right)$ – преобразованная по времени и координате функция Грина уравнения диффузии. В результате преобразований получено одномерное уравнение второго порядка по координате y с сингулярным коэффициентом. Решение уравнения (2) будем искать в следующем виде методом разделения переменных :

$$\widehat{G}\left(s,k,y\right) = g\left(s,k\right)exp\left(-\lambda\left|y\right|\right), \tag{3}$$

где λ – неизвестный параметр, а $g\left(s,k\right)$ – неизвестная функция, которые необходимо определить. Подставляя решение (3) в уравнение (2), получим две части: регулярное выражение и выражение с сингулярным коэффициентом $\delta\left(y\right)$:

$$\left[s - D_2\lambda^2\right]\widehat{G}\left(s,k,y\right) = 0$$

$$\left[D_1k^2 + 2\lambda D_2\right]\delta\left(y\right)g\left(s,k,e\right) = \delta\left(y\right). \tag{4}$$

Из первого уравнения мы определим значение параметра λ, а из второго уравнения (4) выражение для функции $g\left(s,k\right)$:

$$\lambda = \sqrt{\frac{s}{D_2}},\ g\left(s,k\right) = \frac{1}{2D_2\lambda + D_1k^2} \tag{5}$$

Сделаем фурье-преобразование решения (3) по координате y:

$$\widehat{G} = \frac{2\lambda}{\left(2D_2\lambda + d_1k_x^2\right)\left(\lambda^2 + k_x^2\right)}. \tag{6}$$

Возвращаясь в обычное представление в координатах x,y,t, получим формальное решение уравнения дробного порядка по времени:

$$G\left(x,y,z\right) = \int\int\int\int e^{st}e^{-s\tau}e^{-\sqrt{s}D_xk_x^2\tau}e^{-D_yk_y^2\tau}e^{ik_xx+ik_xy}\frac{dk_xdk_y}{2\pi}dsd\tau \tag{7}$$

Из полученного формального решения трудно последить пространственное распределение и изменение во времени. Поэтому в следующем разделе будет исследовано асимптотическое поведение в двух предельных случаях.

3. Асимптотическое поведение решения обобщенного диффузионного уравнения дробного порядка

В связи с вышесказанным найдем асимптотическое поведение решения уравнения дробного порядка в двух предельных случаях: при произвольных X, t и малых значениях Y; при произвольных Y, t и малых значениях X, т. е. вблизи начала координат. Для исследования асимптотик выполним интегрирование по переменным k_x, k_y и представим общее решение в виде произведения двух следующих интегралов:

$$G\left(x,y,t\right)=\int\int dsd\tau\frac{e^{-\frac{x^2}{2\sqrt{\pi D_x\tau}s^{1/4}}}}{2\sqrt{\pi D_x\tau}s^{1/4}}\frac{e^{--\frac{y^2}{4D_y\tau}}}{2\sqrt{\pi D_y\tau}}e^{s(t-\tau)}. \tag{8}$$

Асимптотическое поведение решения уравнения, описываемое интегралом (8), будем искать методом перевала по переменной τ. Для этого определим точку перевала:

$$\tau_0^{1,2}=\pm\sqrt{\frac{x^2}{4D_x\sqrt{s}}+\frac{y^2}{4D_y}\frac{1}{\sqrt{s}}}. \tag{9}$$

Соответственно, функция, стоящая в выражении для экспоненты, в перевальных точках равна:

$$f\left(\tau_0\right)=-2\sqrt{\frac{x^2\sqrt{s}}{4D_x}+\frac{y^2}{4D_y}s}+st. \tag{10}$$

Далее необходимо вычислить интеграл по другой переменной s также методом перевала. После выполненных вычислений уравнение для перевальной точки принимает вид:

$$t^2\tau^2\frac{y^2}{4D_y}+\frac{x^2}{4D_x}s^{3/2}t^2=\left(\frac{y^2}{4D_y}\right)^2s+\frac{x^2}{4D_x}\frac{y^2}{4D_y}s^{3/2}+\left(\frac{x^2}{8D_x}\right)^2 \tag{11}$$

3.1. Первый асимптотический предел – при произвольных и t и малых значениях

Проанализируем первый предельный случай – малые значения координаты Y. Будем искать решение для параметра s в виде разложения: 1) $s=s_0\left(x\right)+s_1\left(y\right)$. Решение уравнения в исследуемом приближении и главном порядке $s_0\left(x\right)$ имеет вид:

$$s_0=A\frac{x^{4/3}}{t^{4/3}}. \tag{12}$$

Здесь постоянная величина. Следующее приближение $s_1\left(y\right)$ описывается выражением:

$$s_1=\frac{y^2}{8D_yt^2} \tag{13}$$

Таким образом в полученном приближении

$$G\left(x,y,t\right)\approx exp\left\{-\frac{Cx^{4/3}}{t^{1/3}}+\frac{y^2}{8D_yt}\right\}. \tag{14}$$

Здесь константа

$$C=\left(\frac{1}{\sqrt{D_x}}A^{1/4}-A\right).$$

Полученное асимптотическое решение имеет необычное, отличное от гауссового поведение по координате X.

3.2. Второй асимптотический предел – при произвольных и t и малых значениях

В этом предельном случае искать решение для параметра s в другом виде

$$s = s_0(y) + s_1(x) + s_2(x, y).$$

В главном порядке

$$s_0(y) = \frac{y^2}{4D_y t^2}.$$

Первый порядок по координате X равен нулю, в следующем приближении получим:

$$s_2 = \frac{x^4 D_y}{64 D_x^2 y^2}.$$

Следовательно, решение в этом асимптотическом пределе имеет вид:

$$G(x, y, t) \infty \frac{e^{-\frac{y^2}{4D_y t}}}{\sqrt{4\pi D_y t}} e^{-\frac{x^4 D_y t}{64 D_x^2 y^2}}. \quad (15)$$

Полученное асимптотическое решение в этом пределе имеет гауссовое поведение по координате У. Дополнительный малый множитель, описывающий поведение при малых значениях координаты X, появляется только во втором приближении

4. Заключение

Таким образом, исследовано поведение решения обобщенного диффузионного уравнения дробного порядка по времени при различных асимптотических пределах. Исследование этих пределов показало, что решение оказывается асимметричным в начале координат в отличие от двумерных гауссовых решений обычного уравнения диффузии, которые являются сферически симметричными относительно начала координат (см. формулу ниже).

$$G(x, y, t) = G(x, t)\, G(e, t) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4D_x t}}}{2\sqrt{\pi D_x t}} \frac{e^{-\frac{y^2}{4D_{xy} t}}}{2\sqrt{\pi D_y t}}. \quad (16)$$

Список литературы

1. Архинчеев В. Е., Баскин Э. М. // ЖЭТФ. 1991. Т. 100. С. 292–297.

2. Архинчеев В. Е.// Письма в ЖЭТФ. 2007. Т. 86, С. 580–583.

3. Архинчеев В. Е.// ЖЭТФ. 2009. Т. 136. С. 560–565.

4. Applications of fractional calculus in physics by Editor R. Hilfer. 2000. World Scientific.

5. Arkhincheev V. E // Chaos. 2007. V. 17. P. 043102.

6. Arkhincheev V. E. // Physica A . 2010, V. 386. P. 1–10.7. Isichenko M. B. // Rev. Mod. Phys.. 1992 . V. 64. P. 961–1004.

7. Weiss G., Havlin S., Physica A // 1986. V. 134. P. 474.

8. Klafter J. and Metzler R.// Phys. Reports.. 2000. V 339. P. 1–79.

9. Metzler R., Klafter J. Advances in Chem. Physics. 2001. V. 116. P. 223.

10. Samko S. G., Kilbas A. A. and Marichev O. I // «Fractional integrals and derivatives. Theory and Applications».1993. Gordond and Breach, Amsterdam.

11. White S., Barma M., J. Phys. A // 1984. V. 17. P. 2995.

Рукопись поступила в редакцию 10 мая 2011 г.