

УДК 517.512, 004.383.3
ББК 22.161, 32.811

С. В. Долгов
г. Чита, Россия

**Приложение тригонометрических операторов Баскакова
к некоторым вопросам расчёта цифровых фильтров**

В статье рассматривается связь некоторых задач проектирования цифровых фильтров (ЦФ) с задачами приближения периодических функций Λ -средними сумм Фурье. Рассмотрены конкретные Λ -средние – тригонометрические операторы Баскакова. Предложена методика проектирования и исследования свойств ЦФ нижних частот с линейной фазовой характеристикой.

Ключевые слова: цифровой фильтр, тригонометрические операторы Баскакова, метод Блэкмана, амплитудная характеристика, спектр

S. V. Dolgov
Chita, Russia

**Application of Trigonometric Operators of Baskakov to Some Questions of
Calculation of Digital Filters**

In this article the connection of some problems of designing digital filters with problems of approximation periodical functions Λ -averages sums of Fourier is considered. Concrete Λ -averages – trigonometric operators of Baskakov are analyzed. The procedure of design and research of low-pass digital filters with linear phase characteristic is offered.

Keywords: digital filter, trigonometric operators of Baskakov, Blackman method, amplitude curve, spectrum.

Аппроксимирующие последовательности операторов, которые получили название тригонометрические операторы Баскакова, определены исчерпывающим образом в работе В. А. Баскакова [3]. Изучению аппроксимативных свойств операторов Баскакова посвящён ряд публикаций, краткий обзор которых приведён, например, в [1].

В предлагаемой статье рассматривается частный вид операторов Баскакова

$$M_n^{[1](k)}(f(t), x) = \frac{\sin^2 \frac{k\pi}{n}}{2n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) \frac{\sin^2 \frac{nt}{2}}{\sin^2 \frac{t}{2} (\cos t - \cos \frac{2k\pi}{n})} dt, \tag{1}$$

здесь параметр $k > 0$ – целое положительное число.

Операторы $M_n^{[1](k)}$ представляются также в виде

$$M_n^{[1](k)}(f(t), x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^n \lambda_{j,n} (a_j \cos jx + b_j \sin jx), \tag{2}$$

где $\lambda_{j,n} = 1 - jn^{-1} + n^{-1} \frac{\sin j \frac{2k\pi}{n}}{\sin \frac{2k\pi}{n}}$, a_j, b_j – коэффициенты Фурье.

Равенство (2) показывает, что операторы (1) относятся к классу Λ -средних сумм Фурье.

Содержание предлагаемой статьи относится к связи двух задач из разных областей знаний: задачи исследования аппроксимативных свойств Λ -средних сумм Фурье (теория приближений) и задачи проектирования и анализа цифровых фильтров (ЦФ) нижних частот с линейной фазовой характеристикой (цифровая обработка сигналов).

Из публикаций на эту тему отметим работы [2; 5]. Вторая из них является коллективной монографией, вопросы связи Λ -средних и расчёта ЦФ затронуты в «Заключении» и «Приложении Г» (с. 61–64, 106–107).

Приведём необходимые для понимания дальнейшего сведения о цифровых фильтрах (более подробно см., например, [6]).

Цифровой фильтр является преобразованием входного цифрового сигнала $\{\chi(j)\}_{-\infty}^{\infty}$ в выходной $\{y(j)\}$. Математическим представлением ЦФ является дискретная свёртка

$$y(j) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} h(\mu)\chi(j - \mu).$$

Последовательность $h(j)$, конечная или бесконечная, которая фигурирует в приведённой выше формуле свертки, называется импульсной характеристикой ЦФ.

Передаточная функция ЦФ определяется равенством

$$H(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} h(j)z^{-j},$$

здесь z – комплексная переменная.

О частотно избирательных свойствах ЦФ судят по функции $|H(e^{it})|$, где t – действительная переменная – условная частота. Частота в герцах определяется по формуле $f = \frac{t}{T2\pi}$, где T – период дискретизации в секундах.

При проектировании фильтров нижних частот с линейной фазой $|H(e^{it})|$ ищется как приближение функции $\eta^{w_c}(t)$, где w_c – так называемая частота среза, $w_c \in (0, \pi)$. Функция $\eta^{w_c}(t)$ 2π -периодическая, определяемая на $[-\pi, \pi]$ следующим образом:

$$\eta^{w_c}(t) = \begin{cases} 1, & t \in [-w_c, w_c], \\ 0, & t \in [-\pi, \pi] \setminus [-w_c, w_c]. \end{cases}$$

При проектировании ЦФ нижних частот с линейной фазой (проектирование сводится к нахождению $\{h(j)\}$) можно использовать следующий алгоритм:

1) функцию $\eta^{w_c}(t)$ приближают симметричной суммой косинусов $\eta^{w_c}(t) \approx \sum_{j=-n}^n a(j) \cos jt$ так, чтобы $a(j) = a(-j)$;

2) в качестве амплитудной характеристики ЦФ полагают $h(j) = a(j - n)$, $j = 0, 1, \dots, 2n$.

Качество фильтра будет тем лучше, чем точнее указанная выше симметричная сумма косинусов приближает функцию $\eta^{w_c}(t)$. Построение же этой суммы можно произвести следующим образом: пусть $\tau_m(t) = \sum_{j=0}^n A(j) \cos jt$ – тригонометрический полином, приближающий $\eta^{w_c}(t)$, тогда положим $a(0) = A(0)$, $a(j) = \frac{1}{2}A(j)$ при $j = 1, 2, \dots, n$, $a(-j) = a(j)$.

Популярными методами проектирования являются метод, основанный на использовании приближения $\eta^{w_c}(t)$ суммами Фурье, так называемый метод без взвешивания, или использование прямоугольного окна, и методы, основанные на приближении $\eta^{w_c}(t)$ методами суммирования рядов Фурье – методы взвешивания.

При расчёте методом без взвешивания получаются следующие расчётные формулы:

$$A(0) = \frac{w_c}{\pi}, A(j) = \frac{2 \sin jw_c}{\pi j}, j = 1, \dots, n.$$

Если же используются методы взвешивания, то расчётные формулы принимают следующий вид:

$$A(0) = W(0, n) \frac{w_c}{\pi}, A(j) = W(j, n) \frac{2 \sin jw_c}{\pi j}, j = 1, \dots, n.$$

При этом $W(j, n)$ могут совпадать с $\lambda_{j,n}$ того или иного метода суммирования рядов Фурье, с помощью которого получают Λ -средние, либо подбираться экспериментально. Среди полученных экспериментально методов взвешивания выделим метод Блэкмана. Взвешивающие коэффициенты этого метода определяются формулами

$$W(j, n) = 0,42 - 0,5 \cos \frac{\pi(j+n)}{n} + 0,08 \cos \frac{2\pi(j+n)}{n}.$$

Качество ЦФ определяется исходя из следующих соображений. Вблизи частоты среза выделяют полосу среза $[w_c - \delta, w_c]$. Амплитудная характеристика в этой полосе должна убывать и иметь «почти линейный» вид, при этом значение $\varphi(t) = |H(e^{it})|$ в точке $t = w_c - \delta$ должно по возможности мало отличаться от единицы. В качестве показателя «крутизны склона» возьмём величину

$$kr = \frac{\varphi(w_c - \delta) - \varphi(w_c)}{\delta}.$$

Чем больше крутизна склона kr , тем выше качество фильтра. Вторым показателем качества фильтра является величина

$$g = \max_{t \in [0, w_c - \delta]} |\varphi(t)|.$$

Чем меньше g , тем выше качество фильтра.

Проблема заключается в том, что, как правило, при улучшении одного показателя другой ухудшается. Выходом из положения является предоставление пользователю набора (спектра) методов взвешивания, в котором можно выбрать подходящий в зависимости от смысла задачи.

Изложим кратко методику получения спектров с использованием метода без взвешивания, метода на основе операторов Баскакова и метода Блэкмана.

Поясним сначала мотивы, по которым был сделан такой выбор методов.

Метод без взвешивания даёт самый крутой склон, но при этом самое большое из известных значение g . Метод Блэкмана, напротив, даёт весьма малое значение g , но очень пологий склон (см. рис. 1).

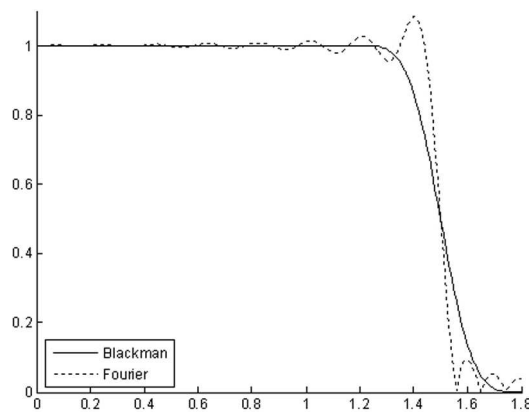


Рис. 1. Амплитудные характеристики ЦФ, полученного методом без взвешивания (Фурье) и методом Блэкмана. Пример карты стратегии

Можно ожидать удачного решения от какого-либо среднего метода. Однако опыт исследований показал, что выбор среднего наталкивается в данном случае на ряд трудностей, связанных с необходимостью перебора большого количества вариантов. Метод на основе операторов Баскакова занимает промежуточное положение между двумя указанными методами и позволяет производить поиск в два этапа, о чём подробнее будет сказано ниже.

Для получения спектров в начале зададим значение n (например, $n = 32$). Число отсчетов фильтра в данном случае будет равно $2n + 1$. Определим частоту среза, например, $w_c = 1,5$.

Введем обозначения для элементов импульсных характеристик методов: $h_F(j)$ для метода без взвешивания, $h_{BL}(j)$ для метода Блэкмана, $h_B(j)$ для метода на основе операторов Баскакова.

Найдём значение δ такое, чтобы амплитудная характеристика ЦФ с элементами импульсной характеристики $h_\delta(j) = \delta h_F(j) + (1 - \delta)h_B(j)$ имела как можно меньший максимум. Как показывают результаты, изложенные в [4], это значение следует искать вблизи 0,32078.

После этого «предъявляем» спектр ЦФ с элементами импульсной характеристики вида $\lambda h_{BL}(j) + (1 - \lambda)h_\delta(j)$. На рис. 2 приведён пример графического изображения данного спектра для $\lambda = 0; 0,1; 0,3; 0,6; 0,9; 1$.

Подробному описанию эксперимента предполагается посвятить отдельную публикацию.

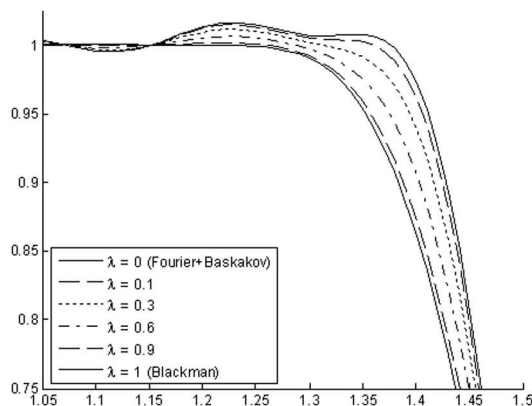


Рис.2. Спектр амплитудной характеристики ЦФ с элементами импульсной характеристики $\lambda h_{BL}(j) + (1 - \lambda)h_{\delta}(j)$ при значениях $\lambda = 0; 0.1; 0.3; 0.6; 0.9; 1$

Список литературы

1. Абакумов Ю. Г. Тригонометрические операторы Баскакова – уникальный пример совокупности аппроксимирующих последовательностей // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь: ТвГУ, 2007. С. 8–13.
2. Аганин С. С., Алферов А. А., Долгов С. В. Тригонометрические операторы В. А. Баскакова и некоторые методы взвешивания в расчете цифровых фильтров // 9 Всероссийская научно-практ. конф. «Кулагинские чтения». Часть 2. Чита: ЧитГУ, 2009. С. 40–41.
3. Баскаков В. А. Об операторах класса S_{2m} , построенных на ядрах Фейера // Применение функционального анализа в Теории приближений. Тверь: ТвГУ, 2001. С. 5–11.
4. Долгов С. В. Функциональные характеристики приближения функции Хевисайда вблизи точки разрыва и некоторые задачи, связанные с проектированием цифровых фильтров // Труды института прикладных математических исследований КарНЦ РАН. Вып. 6. Петрозаводск, 2005. С. 51–57.
5. Карымова Е. Ю., Абакумов Ю. Г., Долгов С. В., Дубровина Т. В., Коган Е. С. Приближение функции Хевисайда некоторыми методами суммирования рядов Фурье: монография. Чита: ЧитГУ, 2010. 121 с.
6. Рабинер Л., Голд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. М.: «Мир», 1978. 848 с.

Рукопись поступила в редакцию 10 мая 2011 г.