**УДК 517.956**
**ББК В 143**

***А. С. Зимнякова***
*г. Чита, Россия*

## О построении потенциалов на кусочно-однородной анизотропной плоскости с параболической линией сопряжения

Построены потенциалы плоских установившихся процессов на анизотропной плоскости с параболическим включением, когда процессы индуцируются заданными особыми точками (источниками, стоками и т.д.), расположенными внутри включения. Потенциалы выражены через гармонические функции при сохранении их особых точек.

*Ключевые слова*: краевые задачи, кусочно-однородная анизотропная плоскость, криволинейные области, особые точки потенциала.

***A. S. Zimnyakova***
*Chita,Russia*

## The Construction of the Potentials on Piecewise Homogeneous Anisotropic Plane with a Parabolic Line Interface

Potentials of plane steady-state processes on the ani-sotropic plane with a parabolic inclusion, when the processes are induced by the given singular points (sources, sinks, etc.) located inside the inclusion are con-structed in the article. Potentials are expressed in terms of harmonic functions, while maintaining their singular points.

*Keywords*: boundary value problems, piecewise homogeneous anisotropic plane, curvilinear areas, singular points of the potential.

Рассмотрим на плоскости с декартовыми координатами $x, y$ установившиеся динамические процессы, индуцированные заданными особыми точками (источниками, стоками и т.д.), когда плоскость состоит из двух анизотропных областей $D_1(y^2 < 4l^2(x + l^2))$ и $D_2(y^2 > 4l^2(x + l^2))$, разделенных параболой $y^2 = 4l^2(x + l^2)$, с тензорами проницаемости $T_j$ в $D_j$. Здесь $D_1$ и $D_2$ соответственно внутренняя и внешняя области, ограниченные параболой. Пусть особые точки потенциала расположены внутри области $D_1$. Аналитическая функция $z = \zeta^2$ конформно отображает полуплоскость $\eta > 0$ вспомогательной плоскости $\xi, \eta$ на всю плоскость $x, y$ с разрезом $L(x > 0, y = 0)$. При этом области $G_1(0 < \eta < l)$ и $G_2(l < \eta < \infty)$, $\xi \in R$ отображаются соответственно на области $D_1$ и $D_2$, где $z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$,

$$x = \xi^2 - \eta^2, \qquad y = 2\xi\eta, \tag{1}$$

$-\infty < \xi < \infty$, $0 \leq \eta < \infty$. Пусть в координатах $\xi, \eta$ тензоры проницаемости $T_j$ постоянны:

$$T_j = \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ b_j & c_j \end{pmatrix}, \qquad (\xi, \eta) \in G_j, \qquad j = 1, 2,$$

где $a_j > 0$, $c_j > 0$, $a_j c_j - b_j^2 > 0$. В данном случае эллипсы анизотропии произвольны по величине и направлению в $D_j$, но они остаются неизменными при движении вдоль семейства парабол $\xi = const$ и $\eta = const$ (1) в каждой области $D_j$.

В параболических координатах $\xi, \eta$ (1) плоскости течения (или то же самое в декартовых координатах вспомогательной плоскости $\zeta$) для потенциалов $u_j(\xi, \eta)$ задача имеет вид [1–3]:

$$a_j \partial_\xi^2 u_j + 2b_j \partial_{\xi\eta}^2 u_j + c_j \partial_\eta^2 u_j = 0, \qquad (\xi, \eta) \in G_j, \tag{2}$$

$$\eta = l: \qquad u_1 = u_2, \qquad v_1 = v_2, \tag{3}$$

$$u_1(\xi, 0) = u_1(-\xi, 0), \qquad v_1(\xi, 0) = -v_1(-\xi, 0), \tag{4}$$

где $v_j = b_j \partial_\xi u_j + c_j \partial_\eta u_j$ – нормальные к линиям $\eta = const$ компоненты скорости, при этом функция $u_1(\xi, \eta)$ имеет заданные особые точки (уравнение (2) для функции $u_1$ выполняется вне особых точек), $\partial_\xi^n = \partial^n / \partial \xi^n$. Условия (3) и (4) выражают непрерывность потенциала и нормальной скорости на общей границе $\eta = l$ зон $G_i$ и на разрезе $L$ плоскости течения $x, y$, т. е. этим разрезом можно пренебречь.

Для решения задачи (2)–(4) перейдем на плоскости $\zeta = \xi + i\eta$ к новым переменным $\rho, \sigma$:

$$\rho = \xi - \int_0^\eta M(\eta) d\eta, \qquad \sigma = \int_0^\eta N(\eta) d\eta, \tag{5}$$

где $M(\eta)$ и $N(\eta)$ – кусочно-постоянные функции вида

$$M(\eta) = \begin{cases} b_1/c_1, & 0 < \eta < l \\ b_2/c_2, & \eta > l \end{cases}, \qquad N(\eta) = \begin{cases} k_1/c_1, & 0 < \eta < l \\ k_2/c_2, & \eta > l \end{cases},$$

$k_j = \sqrt{a_j c_j - b_j^2}$. При этом функции $\rho(\xi, \eta)$ и $\sigma(\eta)$ (5) непрерывны на всей плоскости $\zeta = \xi + i\eta$, включая линию разрыва проницаемости $\eta = l$. Замена переменных (5) приводит к непрерывной деформации плоскости $\zeta$ так, что ось $\xi$ остается неподвижной, т. к. при $\eta = 0$ имеем $\rho = \xi$, $\sigma = 0$ (5). Общая граница областей $G_j$ (прямая $\eta = l$) переходит в прямую $\sigma = h = k_1 l / c_1$. Обозначим на плоскости с декартовыми координатами $\rho, \sigma$ области, соответствующие областям $G_1$ и $G_2$, через $G_1'(\rho \in R, 0 < \sigma < h)$ и $G_2'(\rho \in R, \sigma > h)$.

В переменных $\rho, \sigma$ (5) с учетом равенства $v_j = b_j \partial_\xi u_j + c_j \partial_\eta u_j = k_j \partial_\sigma u_j$ задача (2)-(4) примет вид

$$\partial_\rho^2 u_j + \partial_\sigma^2 u_j = 0, \qquad (\rho, \sigma) \in G_j', \tag{6}$$

$$\sigma = h: \qquad u_1 = u_2, \qquad k_1 \partial_\sigma u_1 = k_2 \partial_\sigma u_2, \tag{7}$$

$$u_1(\rho, 0) = u_1(-\rho, 0), \qquad \partial_\sigma u_1(\rho, 0) = -\partial_\sigma u_1(-\rho, 0), \tag{8}$$

при этом функция $u_1(\rho, \sigma)$ имеет заданные особые точки в $G_1'$.

Пусть на всей плоскости $\rho, \sigma$ определена гармоническая функция $f(\rho, \sigma)$, имеющая заданные особые точки при $0 < \sigma < h$. Функция $f(\rho, \sigma)$ является потенциалом рассматриваемых динамических процессов на однородной плоскости. Наряду с функцией $f$ рассмотрим функцию

$$F(\rho, \sigma) = f(\rho, \sigma) + f(-\rho, -\sigma), \tag{9}$$

которую также считаем заданной функцией.

Методом работ [4; 5] выразим решение задачи (6)–(8) непосредственно через заданную гармоническую функцию $F(\rho, \sigma)$. Предположим, что функция $F(\rho, h)$ разлагается в интеграл Фурье с коэффициентами Фурье $f_j$. Отсюда на плоскости $\rho, \sigma$ гармоническая функция $F(\rho, \sigma)$ при $\sigma \geq h$ (где $F$ не имеет особых точек) представима в виде

$$F(\rho, \sigma) = \int_0^\infty e^{-\lambda(\sigma - h)} (f_1 s_1 + f_2 s_2) d\lambda, \qquad \sigma > h, \tag{10}$$

где $s_1 = \sin\lambda\rho$, $s_2 = \cos\lambda\rho$. Данная формула представляет собой решение задачи Дирихле в полуплоскости $\sigma > h$ с граничной функцией $F(\rho, h)$, полученное методом Фурье. Представим решение задачи (6)–(8) в виде разложений Фурье

$$u_1 = F(\rho,\sigma) + \int\limits_0^\infty (a_1 s_1 \operatorname{sh}\lambda\sigma + a_2 s_2 \operatorname{ch}\lambda\sigma) d\lambda, \qquad 0 < \sigma < h, \tag{11}$$

$$u_2 = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda(\sigma-h)}(b_1 s_1 + b_2 s_2) d\lambda, \qquad \sigma > h, \tag{12}$$

при этом функции (11), (12) удовлетворяют условиям (6), (8) и функция $u_1$ в $G_1'$ имеет особые точки заданной функции $f(\rho,\sigma)$. Из условий сопряжения (7) с учетом (10) найдем $a_j = (k_1 - k_2)p_j$, $b_j = k_1 e^{\lambda h} p_j$, где $p_1 = f_1(k_2 \operatorname{sh}\lambda h + k_1 \operatorname{ch}\lambda h)^{-1}$, $p_2 = f_2(k_1 \operatorname{sh}\lambda h + k_2 \operatorname{ch}\lambda h)^{-1}$. Отсюда следует

$$p_j = \frac{2e^{-\lambda h} f_j}{(k_1+k_2)[1-(-1)^j q]}, \qquad q = \nu e^{-2\lambda h}, \qquad \nu = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}, \tag{13}$$

где $|q| < 1$ при $0 \le \lambda < \infty$. Разлагая $p_j$ в геометрические прогрессии, получим

$$p_j = \frac{2f_j}{k_1+k_2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{jn} \nu^n e^{-\lambda h(2n+1)}.$$

Выделяя в разложениях (11), (12) интегралы вида (10), выразим функции $u_i$ непосредственно через заданную гармоническую функцию $f(\rho,\sigma)$ в виде

$$u_1 = F(\rho,\sigma) + \sum_{n=1}^{\infty} \nu^n \left[ F((-1)^{n-1}\rho, -\sigma + 2hn) + F((-1)^n \rho, \sigma + 2hn) \right], \tag{14}$$

$$u_2 = (1+\nu) \sum_{n=0}^{\infty} \nu^n F((-1)^n \rho, \sigma + 2hn), \tag{15}$$

где постоянная $\nu$ имеет вид (13), функция $F(\rho,\sigma)$ равна (9).

**Теорема.** *Если гармоническая функция $f(\rho,\sigma)$ имеет произвольные особые точки в полосе $0 < \sigma < h$ и удовлетворяет условию $f(\rho,\sigma) = O(\sigma^p)$ при $\sigma \to +\infty$, $\forall p \in N$, то решение задачи* (6)–(8) *строится по формулам* (14), (15).

**Доказательство**. В условиях теоремы функция $f(\rho,\sigma)$ может иметь в бесконечности полюс произвольного порядка, при этом ряды (14), (15) и их производные мажорируются сходящимися числовыми рядами $\sum_{n=0}^{\infty} \nu^n n^p$, где $|\nu| < 1$ (12), т. е. ряды (14), (15) сходятся и допускают дифференцирование необходимое число раз. Условия задачи (6)-(8) для функций (14), (15) проверяются непосредственно.

Решение исходной задачи (2)–(4) в параболических координатах (1) строится по формулам (14), (15), (5) без квадратур.

*Список литературы*

1. Качанов М. Л. Об анизотропии фильтрационных свойств трещиноватой среды // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1975. №4. С. 171–173.

2. Ромм Е. С. Структурные модели порового пространства горных пород. Л.: Недра, 1985. 240 с.

3. Тихонов А. Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.

4. Kholodovskii S. E. The Convolution Method for Fourier Expansions. The Case of Generalized Transmission Conditions of Crack (Screen) Type in Piecewise Inhomogeneous Media // Differential Equations, 2009, Vol. 45, No. 6, pp. 873–877.

5. Kholodovskii S. E. The convolution method for fourier expansions: The case of a crack (screen) in an inhomogeneous space // Differential Equations, 2009, Vol. 45, №. 8, pp. 1229–1233.

**Рукопись поступила в редакцию 16 апреля 2011 г.**