УДК 517.956
ББК В 143

Н. Н. Шадрина
г. Чита, Россия

О решении задачи Неймана в полуплоскости с трещиной (завесой)

Выведены формулы, позволяющие по известному решению классической задачи Неймана в полуплоскости строить решения второй краевой задачи в полуплоскости с трещиной или завесой, параллельной границе.

Ключевые слова: краевые задачи, трещина, завеса, метод свертывания разложений Фурье.

N. N. Shadrina
Chita, Russia

Solution of the Neumann Problem in the Half Plane with a Crack (Screen)

There have been derived formulas that make it possible in the half plane to build the second boundary value problem in the half plane with a crack or a screen, parallel to the boundary using the known solution of the classical Neumann problem.

Keywords: boundary value problems, crack, screen, the method of convolution of Fourier expansions.

Во многих прикладных задачах математической физики большой интерес имеют задачи в средах, содержащих пленочные включения в виде сильно проницаемых трещин и слабо проницаемых экранов-завес. Пленочные включения существенно изменяют пластичные свойства материалов, что широко используется в промышленности. В данной статье рассматриваются краевые задачи в полуплоскости с трещиной (завесой), параллельной границе, с граничными условиями второго рода.

1. Случай трещины. Рассмотрим в однородной полуплоскости $D(y<0)=D_1(y<-l)\cup D_2(-l<y<0)$, $x\in R$ с трещиной $y=-l$ задачу Неймана вида [1; 2]:

$$\Delta u_i=0,\qquad (x,y)\in D_i;\qquad \partial_y u_{2|y=0}=f(x), \tag{1}$$

$$y=-l:\qquad u_2=u_1,\qquad \partial_y u_2-\partial_y u_1=A\partial_y^2 u_1, \tag{2}$$

где A – параметр трещины [3; 4]. Пусть известно решение $F(x,y)$ аналогичной задачи Неймана в полуплоскости D без трещины

$$\Delta F=0,\qquad (x,y)\in D;\qquad \partial_y F_{|y=0}=f(x). \tag{3}$$

Методом свертывания разложений Фурье [3; 4] выразим решение задачи (1), (2) через функцию $F(x,y)$. Предположим, что функция $F(x,0)$ разлагается в интеграл Фурье:

$$F(x,0)=\int\limits_0^\infty g(x,\lambda)d\lambda,\qquad g(x,\lambda)=f_1\sin\lambda x+f_1\cos\lambda x, \tag{4}$$

© Шадрина Н. Н., 2011

где f_i – коэффициенты Фурье функции $F(x,0)$. Рассмотрим задачу Дирихле в полуплоскости $D(y<0)$ с граничной функцией $F(x,0)$ вида $\Delta u = 0$, $u_{|y=0} = F(x,0)$, решением которой является функция $F(x,y)$. С другой стороны, решая эту задачу методом Фурье, получим разложение функции $F(x,y)$ в интеграл Фурье вида

$$F(x,y) = \int\limits_0^\infty e^{\lambda y} g d\lambda, \qquad y \le 0, \tag{5}$$

где функция $g(x,\lambda)$ имеет вид (4). Представим решение задачи (1), (2) также в виде разложений Фурье:

$$u_1 = \int\limits_0^\infty a_1\, e^{\lambda(y+l)} g\, d\lambda, \qquad u_2 = F(x,y) + \int\limits_0^\infty a_2\, g \operatorname{ch} \lambda y\ d\lambda, \tag{6}$$

при этом функции (6) удовлетворяют уравнению и граничному условию (1). Из условий сопряжения (2) с учетом разложения (5) для параметров a_i получим систему алгебраических уравнений, решение которой имеет вид

$$a_1 = \frac{1}{d}, \qquad a_2 = -\frac{e^{-\lambda l} A\lambda}{d},$$

где

$$d = A\lambda \operatorname{ch} \lambda l + e^{\lambda l} > 0, \qquad 0 \le \lambda < \infty. \tag{7}$$

Отсюда решение (6) задачи (1), (2) получим в виде

$$u_1 = \int\limits_0^\infty \frac{e^{\lambda(y+l)} g}{d}\, d\lambda, \qquad y < -l, \tag{8}$$

$$u_2 = F(x,y) - A \int\limits_0^\infty \frac{e^{-\lambda l} \lambda g \operatorname{ch} \lambda y}{d}\, d\lambda, \qquad -l < y < 0, \tag{9}$$

где функции d, g равны (7), (4), $F(x,y)$ – решение задачи Неймана (3). При этом подынтегральные функции (8), (9) при $\lambda \to 0$ ограничены и при $\lambda \to \infty$ имеют соответственно асимптотику $O(\lambda^{-1} e^{\lambda y})$ при $y < -l$ и $O(e^{-\lambda(y+2l)})$ при $-l < y < 0$. Отсюда интегралы (8), (9) в соответствующей зоне D_i сходятся и допускают дифференцирование необходимое число раз. Условия задачи (1), (2) для функций (8), (9) проверяются непосредственной подстановкой.

Приведем решение (8), (9) к виду, не содержащему разложений Фурье (сильные осцилляции). Из равенства (7) следует

$$\frac{1}{d} = \frac{\gamma e^{-\lambda l}}{(\lambda+\gamma)(1-q)},$$

где

$$\gamma = \frac{2}{A} > 0, \qquad q = -\frac{\lambda e^{-2\lambda l}}{\lambda+\gamma}, \tag{10}$$

при этом $|q| < 1$ при $0 \le \lambda < \infty$. Разлагая дробь $(1-q)^{-1}$ в геометрическую прогрессию, найдем

$$\frac{1}{d} = \gamma \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{e^{-\lambda l(2n+1)} \lambda^n}{(\lambda+\gamma)^{n+1}}.$$

Заменяя в разложении (5) переменную $y \le 0$ на $y - z$ $(z > 0)$, умножая полученное равенство на $e^{-\gamma z} z^n (n!)^{-1}$, где $\gamma > 0$, $n = 0, 1, 2, ...$, и интегрируя по $z \in (0, \infty)$, аналогично [3; 4] получим формулу:

$$\frac{1}{n!} \int\limits_0^\infty e^{-\gamma z} z^n F(x, y - z) dz = \int\limits_0^\infty \frac{e^{\lambda y} g(x, \lambda)}{(\lambda + \gamma)^{n+1}} d\lambda, \qquad y \le 0.$$

Дифференцируя последнее равенство по y, получим

$$\frac{1}{n!} \int\limits_0^\infty e^{-\gamma z} z^n \partial_y^k F(x, y - z) dz = \int\limits_0^\infty \frac{e^{\lambda y} \lambda^k \ g(x, \lambda)}{(\lambda + \gamma)^{n+1}} d\lambda, \tag{11}$$

где функция g имеет вид (4). Отсюда решение (8), (9) задачи (1), (2) приведем к виду

$$u_1 = \gamma \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!} \int\limits_0^\infty e^{-\gamma z} z^n \partial_y^n F(x, y - 2nl - z) dz,$$

$$u_2 = F(x, y) + \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \int\limits_0^\infty e^{-\gamma z} z^{n-1} \partial_y^n [F(x, y - 2nl - z) + F(x, -y - 2nl - z)] dz,$$

где γ имеет вид (10), $F(x, y)$ – решение задачи Неймана (3).

2. Случай завесы. Пусть в рассматриваемой полуплоскости D зоны D_i разделены слабо проницаемой завесой $y = -l$ с параметром B. Отсюда для потенциалов u_i в D_i получим задачу (см. [3; 4]) вида: (1),

$$y = -l: \qquad u_2 - u_1 = B \partial_y u_1, \qquad \partial_y u_2 = \partial_y u_1. \tag{12}$$

Представляя решение задачи (1), (12) в виде (6), из условий сопряжения (12) с учетом разложения (5) для параметров a_i получим систему алгебраических уравнений, решение которой имеет вид

$$a_1 = \frac{1}{d}, \qquad a_2 = \frac{e^{-\lambda l} B \lambda}{d},$$

где

$$d = B \lambda \operatorname{sh} \lambda l + e^{\lambda l}. \tag{13}$$

Отсюда функции u_i (6) примут вид

$$u_1 = \int\limits_0^\infty \frac{e^{\lambda (y+l)} g}{d} d\lambda, \qquad y < -l, \tag{14}$$

$$u_2 = F(x, y) + B \int\limits_0^\infty \frac{e^{-\lambda l} \lambda \, g \operatorname{ch} \lambda y}{d} \, d\lambda, \qquad -l < y < 0, \tag{15}$$

где функции d, g равны (13), (4). Из равенства (13) следует

$$\frac{1}{d} = \frac{\gamma e^{-\lambda l}}{(\lambda + \gamma)(1 - q)},$$

где

$$\gamma = \frac{2}{B} > 0, \qquad q = \frac{\lambda e^{-2\lambda l}}{\lambda + \gamma}, \tag{16}$$

при этом $|q| < 1$ при $0 \le \lambda < \infty$. Разлагая дробь $(1-q)^{-1}$ в геометрическую прогрессию, найдем

$$\frac{1}{d} = \gamma \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda l(2n+1)} \lambda^n}{(\lambda+\gamma)^{n+1}}.$$

Отсюда с учетом формулы (11) функции u_i (14), (15) приведем к виду

$$u_1 = \gamma \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int\limits_0^{\infty} e^{-\gamma z} z^n \partial_y^n F(x, y - 2nl - z) dz,$$

$$u_2 = F(x,y) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \int\limits_0^{\infty} e^{-\gamma z} z^{n-1} \partial_y^n [F(x, y - 2nl - z) + F(x, -y - 2nl - z)] dz,$$

где γ имеет вид (16), $F(x,y)$ – решение задачи Неймана (3).

Список литературы

1. Арсенин В. Я. Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1974. 431 с.

2. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.

3. Kholodovskii S. E. The Convolution Method for Fourier Expansions. The Case of Generalized Transmission Conditions of Crack (Screen) Type in Piecewise Inhomogeneous Media // Differential Equations, 2009, Vol. 45, № 6, pp. 873–877.

4. Kholodovskii S. E. The convolution method for fourier expansions: The case of a crack (screen) in an inhomogeneous space // Differential Equations, 2009, Vol. 45, № 8, pp. 1229–1233.

Рукопись поступила в редакцию 18 апреля 2011 г.