УДК 517.956
ББК В 143

А. А. Тупякова
г. Чита, Россия

О решении краевых задач в двухслойной анизотропной полуплоскости с особыми точками потенциала в нижнем слое

Рассмотрена первая краевая задача в двухслойной анизотропной полуплоскости при заданных особых точках потенциала, расположенных в нижнем слое. Потенциалы выражены через заданные гармонические функции.

Ключевые слова: краевые задачи, двухслойная анизотропная полуплоскость, особые точки потенциала.

A. A. Tupjakova
Chita, Russia

Boundary Value Problems in Two-layered Aniso-tropic Half-plane with Singular Points of the Potential in the Lower Layer

We consider the first boundary value problem in a two-layered anisotropic half-plane at the given singular points of the potential, which are in the lower layer. Po-tentials are expressed in terms of the given harmonic functions.

Keywords: boundary value problem, two-layered anisotropic half-plane, singular points of potential.

Рассмотрим в двухслойной анизотропной полуплоскости $D(y<0)=D_1(y<-l)\cup D_2(-l<y<0)$, $x\in R$ первую краевую задачу [1-3]:

$$a_i\partial_x^2u_i+2b_i\partial_{xy}^2u_i+c_i\partial_y^2u_i=0,\qquad (x,y)\in D_i;\qquad u_{2|y=0}=0, \tag{1}$$

$$y=-l:\qquad u_1=u_2,\qquad v_1=v_2, \tag{2}$$

где функция $u_1(x,y)$ в D_1 имеет заданные особые точки (источники, стоки и т.д.), при этом уравнение (1) для функции u_1 выполняется вне особых точек, $\partial_x^n=\partial^n/\partial x^n$, $v_i=b_i\partial_xu_i+c_i\partial_yu_i$ - нормальные к $y=const$ компоненты скорости; x,y – декартовы координаты, T_i – постоянные в D_i тензоры проницаемости вида

$$T_i=\begin{pmatrix} a_i & b_i\\ b_i & c_i\end{pmatrix},\qquad a_i>0,\qquad c_i>0,\qquad a_ic_i-b_i^2>0,\qquad i=1,2.$$

В данном случае эллипсы анизотропии произвольны по величине и направлению в каждой зоне D_i, но они не меняются при движении вдоль координатных линий системы x,y [2]. Условия сопряжения (2) выражают непрерывность потенциала и нормальной скорости на общей границе зон D_i.

Для решения задачи (1), (2) перейдем на плоскости x,y к новым переменным ξ,η:

$$\xi=x-\int\limits_0^y M(y)dy,\qquad \eta=\int\limits_0^y N(y)dy, \tag{3}$$

© Тупякова А. А., 2011

где $M(y)$ и $N(y)$ – кусочно-постоянные функции вида

$$M(y) = \begin{cases} b_1/c_1, & y < -l \\ b_2/c_2, & -l < y < 0 \end{cases}, \qquad N(y) = \begin{cases} k_1/c_1, & y < -l \\ k_2/c_2, & -l < y < 0 \end{cases},$$

$k_i = \sqrt{a_i c_i - b_i^2}$. Функции $\xi(x, y)$ и $\eta(y)$ (3) непрерывны на всей плоскости x, y, включая линию разрыва проницаемости $y = -l$. При этом ось x остается неподвижной: при $y = 0$ имеем $\xi = x$, $\eta = 0$ (3), прямая $y = -l$ переходит в прямую $\eta = -h = -k_2 l/c_2$. На плоскости с декартовыми координатами ξ, η областям D_1 и D_2 соответствуют области $G_1(\xi \in R, \eta < -h)$ и $G_2(\xi \in R, -h < \eta < 0)$.

В переменных ξ, η (3) с учетом равенства $v_i = b_i \partial_x u_i + c_i \partial_y u_i = k_i \partial_\eta u_i$ задача (1), (2) примет вид задачи относительно уравнения Лапласа с классическими условиями сопряжения:

$$\partial_\xi^2 u_i + \partial_\eta^2 u_i = 0, \qquad (\xi, \eta) \in G_i; \qquad u_{2|\eta=0} = 0, \tag{4}$$

$$\eta = -h: \qquad u_1 = u_2, \qquad k_1 \partial_\eta u_1 = k_2 \partial_\eta u_2, \tag{5}$$

где функция $u_1(\xi, \eta)$ имеет заданные особые точки в $G_1(\xi \in R, \eta < -h)$.

Пусть на всей плоскости ξ, η определена гармоническая функция $F(\xi, \eta)$, имеющая заданные особые точки в полуплоскости $\eta < -h$, т. е. функция u_1 имеет особые точки заданной гармонической функции F. Например, для фундаментального решения, моделирующего источник-сток в точке (ξ_0, η_0), функция F имеет вид

$$F(\xi, \eta) = Q \ln[(\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2], \qquad \eta_0 < -h. \tag{6}$$

Предположим сначала, что функция $F(\xi, -h)$ разлагается в интеграл Фурье с коэффициентами Фурье f_i:

$$F(\xi, -h) = \int_0^\infty g(\xi, \lambda) d\lambda, \qquad g(\xi, \lambda) = f_1 \sin \lambda\xi + f_2 \cos \lambda\xi, \tag{7}$$

при этом функция $F(\xi, -h)$ должна удовлетворять условию

$$F(\xi, -h) \to 0, \qquad \xi \to \pm\infty. \tag{8}$$

Отметим, что условие (8) существенно сужает класс особых точек, в частности, фундаментальное решение типа источника (6) не удовлетворяет условию (8). Из равенства (7) следует, что функция $F(\xi, \eta)$ при $\eta \geq -h$, где она не имеет особых точек, представима в виде

$$F(\xi, \eta) = \int_0^\infty e^{-\lambda(\eta + h)} g d\lambda, \qquad \eta > -h. \tag{9}$$

Интеграл справа является решением задачи Дирихле в полуплоскости $\eta > -h$ с граничной функцией $F(\xi, -h)$, полученным методом Фурье.

Представим решение задачи (4), (5) также в виде разложений Фурье

$$u_1(\xi, \eta) = F(\xi, \eta) + \int_0^\infty a_1 \, e^{\lambda(\eta + h)} g \, d\lambda, \qquad u_2(\xi, \eta) = \int_0^\infty a_2 \, g \, \operatorname{sh} \lambda\eta \, d\lambda, \tag{10}$$

где функция $g(\xi,\lambda)$ имеет вид (7). Отсюда функции u_i удовлетворяют условиям задачи (4). Из условий сопряжения (5) с учетом разложения (9) найдем

$$a_1 = \frac{k_1 \operatorname{sh}\lambda h - k_2 \operatorname{ch}\lambda h}{d}, \qquad a_2 = -\frac{2k_1}{d}, \qquad d = k_2 \operatorname{ch}\lambda h + k_1 \operatorname{sh}\lambda h, \tag{11}$$

где $d > 0$ при $0 \le \lambda < \infty$. Тогда решение задачи (4), (5) строится по формулам (10), (11).

Полученное решение (10), (11) содержит две квадратуры – внешнюю и внутреннюю (в коэффициентах Фурье f_i) от сильно осциллирующих тригонометрических функций. Кроме того, как отмечалось, решение (10), (11) справедливо для достаточно узкого класса особых точек.

Следуя методу свертывания разложений Фурье [4; 5], выразим функции u_i непосредственно через заданную функцию $F(\xi,\eta)$ без разложений Фурье. Представим дробь $1/d$ (11) в виде

$$\frac{1}{d} = \frac{2e^{-\lambda h}}{(k_1+k_2)(1-q)}, \qquad q = e^{-2\lambda h}\nu, \qquad \nu = \frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}, \tag{12}$$

при этом $|q| < 1$ при $0 \le \lambda < \infty$. Разлагая $(1-q)^{-1}$ в геометрическую прогрессию, найдем

$$\frac{1}{d} = \frac{2}{k_1+k_2}\sum_{n=0}^{\infty}\nu^n e^{-\lambda h(2n+1)}.$$

Отсюда функции u_i (10), (11) примут вид

$$u_1(\xi,\eta) = F(\xi,\eta) + \sum_{n=0}^{\infty}\nu^n \int_0^{\infty}\left[e^{\lambda(\eta+h-2hn)}\nu - e^{\lambda(\eta-h-2hn)}\right] g d\lambda,$$

$$u_2(\xi,\eta) = (1+\nu)\sum_{n=0}^{\infty}\nu^n \int_0^{\infty}\left[e^{-\lambda(\eta+h+2hn)} - e^{\lambda(\eta-h-2hn)}\right] g d\lambda.$$

Свертывая с помощью формулы (9) полученные интегралы, приведем решение задачи (4), (5) к виду

$$u_1(\xi,\eta) = F(\xi,\eta) + \sum_{n=0}^{\infty}\nu^n[F(\xi,-\eta+2hn-2h)\nu - F(\xi,-\eta+2hn)], \tag{13}$$

$$u_2(\xi,\eta) = (1+\nu)\sum_{n=0}^{\infty}\nu^n[F(\xi,\eta+2hn) - F(\xi,-\eta+2hn)]. \tag{14}$$

где постоянная ν имеет вид (12).

Теорема. *Если гармоническая функция $F(\xi,\eta)$ имеет произвольные особые точки в полуплоскости $\eta < -h$ и удовлетворяет условию $F(\xi,\eta) = O(\eta^p)$ при $\eta \to +\infty$, $\forall p \in N$, то решение задачи* (4), (5) *строится по формулам* (13), (14).

Доказательство. Функция $F(\xi,\eta)$ может иметь в бесконечности особую точку типа полюса произвольного порядка. При этом ряды (13), (14) и их производные мажорируются сходящимися числовыми рядами $\sum_{n=0}^{\infty}\nu^n n^p$, где $|\nu| < 1$ (12), т. е. ряды (13), (14) сходятся и допускают дифференцирование необходимое число раз. Условия задачи (4), (5) для функций (13), (14) проверяются непосредственно.

В частности, формулы (13), (14) имеют место для фундаментального решения F (6).

Список литературы

1. Качанов М. Л. Об анизотропии фильтрационных свойств трещиноватой среды // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1975. №4. С. 171–173.

2. Кочин Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М.: Наука, 1965. 426 с.

3. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.

4. Kholodovskii S. E. The Convolution Method for Fourier Expansions. The Case of Generalized Transmission Conditions of Crack (Screen) Type in Piecewise Inhomogeneous Media // Differential Equations, 2009, Vol. 45, №. 6, pp. 873–877.

5. Kholodovskii S. E. The convolution method for fourier expansions: The case of a crack (screen) in an inhomogeneous space // Differential Equations, 2009, Vol. 45, №. 8, pp. 1229–1233.

Рукопись поступила в редакцию 20 апреля 2011 г.