УДК 517.956
ББК В143

И. А. Гуримская
г. Нерюнгри, Россия

Об эффективном решении краевых задач в неоднородных областях на плоскости

Рассмотрены первая и третья краевые задачи соответственно в полосе и полуплоскости для дивергентного уравнения с квадратичным коэффициентом, что моделирует установившиеся процессы в неоднородных средах. Методом свертывания разложений Фурье решения задач выражены через решение задачи Дирихле в однородной полуплоскости.

Ключевые слова: краевые задачи, дивергентное уравнение, метод свертывания разложений Фурье.

I. A. Gurimskaya
Neryungri, Russia

On the Efficient Solution of Boundary Value Problems in Inhomogeneous Fields Plane

The first and third boundary value problems, respectively, in the strip and half-plane for the divergence equation with a quadratic coefficient that simulates the steady-state processes in heterogeneous environments are considered. By the method of convolution of Fourier expansions the solution of the problems expressed in terms of solution of the Dirichlet problem in a homogeneous half-plane.

Keywords: boundary value problem, the divergence equation, the method of convolution of Fourier expansions.

Естественные проницаемые среды, в которых происходят процессы теплопроводности, фильтрации жидкости, диффузии и т. д., в той или иной степени являются неоднородными [1–3]. Краевые задачи в указанных средах имеют вид задач относительно дифференциальных уравнений с функциональными коэффициентами, что существенно расширяет возможности моделирования реальных проницаемых сред [1; 4]. При этом большой интерес имеют краевые задачи с монотонными коэффициентами дифференциальных уравнений.

1. Рассмотрим на плоскости с декартовыми координатами x, y первую краевую задачу в неоднородной полосе $D(0 < y < l)$ вида

$$p(y)\partial_x^2\varphi + \partial_y[p(y)\partial_y\varphi] = 0, \qquad \varphi_{|y=0} = f(x), \qquad \varphi_{|y=l} = 0, \tag{1}$$

где

$$p(y) = k(y-b)^2, \tag{2}$$

$k > 0$ и b - постоянные, $b < 0$ или $b > l$, т. е. нулевая линия проницаемости $p(y)$ лежит вне полосы D, при этом функция $p(y)$ возрастает при $b < 0$ или убывает при $b > l$ в D, $\partial_x^n = \partial^n/\partial x^n$. В данном случае граничное условие на одной из границ полосы D однородно, что не умаляет общности, т. к. при однородном граничном условии на другой границе задача решается аналогично, а в общем случае при неоднородных граничных условиях решение строится в виде суммы решений указанных задач.

Наряду с задачей (1) рассмотрим классическую задачу Дирихле в однородной полуплоскости $D_0(y > 0)$ относительно уравнения Лапласа с сохранением граничной функции $f(x)$ (1):

$$\Delta F = 0, \qquad y > 0; \qquad F_{|y=0} = f(x). \tag{3}$$

Решение $F(x, y)$ задачи (3) строится по формуле Пуассона [1; 4]:

$$F(x,y) = \frac{y}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi)d\xi}{(x-\xi)^2 + y^2}$$

и для кусочно-непрерывных граничных функций $f(x)$, составленных из многочленов, функция $F(x, y)$ вычисляется в конечном виде. Далее считаем функцию $F(x, y)$ заданной. Методом работ [5; 6] выразим решение задачи (1) в неоднородной полосе D через функцию $F(x, y)$ (3).

Представляя решение задачи (1) в виде

$$\varphi(x,y) = \frac{u(x,y)}{y-b}, \tag{4}$$

для функции $u(x, y)$ в D получим задачу относительно уравнения Лапласа:

$$\Delta u = 0, \qquad u_{|y=0} = -bf(x), \qquad u_{|y=l} = 0. \tag{5}$$

Предположим, что граничная функция $f(x)$ разлагается в интеграл Фурье с коэффициентами Фурье f_i:

$$f(x) = \int\limits_0^{\infty} g(x,\lambda)d\lambda, \tag{6}$$

где

$$g = f_1 \sin\lambda x + f_2 \cos\lambda x, \qquad \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) \begin{pmatrix} \sin\lambda x \\ \cos\lambda x \end{pmatrix} dx. \tag{7}$$

Решая задачу Дирихле (3) методом Фурье, представим ее решение в виде

$$F(x,y) = \int\limits_0^{\infty} e^{-\lambda y} g(x,\lambda)d\lambda, \qquad y > 0. \tag{8}$$

Решая задачу (5) методом Фурье, получим

$$u(x,y) = b\int\limits_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh}\lambda(y-l)}{\operatorname{sh}\lambda l} g(x,\lambda)d\lambda, \tag{9}$$

где функция $g(x, \lambda)$ имеет вид (7).

Полученное решение (9) содержит две квадратуры – внешнюю и внутреннюю в коэффициентах Фурье f_i (7) от сильно осциллирующих тригонометрических функций, что существенно снижает практическую ценность этого решения.

Избавимся от разложений Фурье. Раскладывая дробь $1/\operatorname{sh}\lambda l$ в геометрическую прогрессию:

$$\frac{1}{\operatorname{sh}\lambda l} = \frac{2e^{-\lambda l}}{1 - e^{-2\lambda l}} = 2\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda l(2n+1)},$$

представим функцию $u(x, y)$ (9) в виде

$$u(x,y) = b\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_0^{\infty} [e^{\lambda(y-2nl-2l)} - e^{-\lambda(y+2nl)}] g(x,\lambda)d\lambda, \qquad 0 < y < l.$$

Отсюда с учетом формулы (8) выразим решение задачи (5) непосредственно через заданную функцию $F(x, y)$ (без разложений Фурье):

$$u(x,y) = b\sum_{n=0}^{\infty}[F(x, -y + 2nl + 2l) - F(x, y + 2nl)]. \tag{10}$$

Решение исходной задачи (1) строится по формулам (4), (10).

2. В качестве второго случая рассмотрим, например, третью краевую задачу в неоднородной полуплоскости $D(y < 0)$ вида:

$$p(y)\partial_x^2\varphi + \partial_y[p(y)\partial_y\varphi] = 0, \qquad \partial_y\varphi + h\varphi_{|y=0} = f(x), \tag{11}$$

где $h > 0$ – постоянная, функция $p(y)$ имеет вид (2), $b > 0$. Представляя решение данной задачи в виде (11), для функции $u(x, y)$ получим задачу

$$\Delta u = 0, \qquad \partial_y u + \gamma u_{|y=0} = -bf(x), \tag{12}$$

где $\gamma = (1 + bh)/b > 0$. Представляя решение задачи (12) в виде

$$u(x, y) = \int\limits_0^\infty ae^{\lambda y} g d\lambda, \qquad y < 0, \tag{13}$$

где функция $g(x, \lambda)$ имеет вид (7), из граничного условия (12) с учетом разложения (6) найдем

$$a = -\frac{b}{\lambda + \gamma}. \tag{14}$$

Отсюда решение задачи (12) строится по формулам (13), (14) в виде разложения Фурье, содержащего двукратные квадратуры от сильно осциллирующих функций.

Как и выше, выразим решение этой задачи непосредственно через решение $F(x, y)$ задачи Дирихле (3) в однородной полуплоскости. Из разложения (8) следует формула [5; 6]:

$$\int\limits_0^\infty e^{-\gamma t} F(x, y + t)dt = \int\limits_0^\infty \frac{e^{-\lambda y} g}{\lambda + \gamma} d\lambda, \qquad \gamma > 0, \qquad y > 0.$$

Отсюда решение (13) задачи (12) приводится к виду

$$u(x, y) = -b\int\limits_0^\infty e^{-\gamma t} F(x, -y + t)dt. \tag{15}$$

Решение исходной задачи (11) строится по формулам (4), (15).

Отметим, что полученные решения (10), (15) с одной стороны проще решений (9), (13), полученных методом Фурье, а с другой – решения (10), (15) справедливы для более широкого класса граничных функций в смысле их поведения на бесконечности.

Список литературы

1. Арсенин В. Я. Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1974. 431 с.

2. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 487 с.

3. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 680 с.

4. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 735 с.

5. Kholodovskii S. E. The Convolution Method for Fourier Expansions. The Case of Generalized Transmission Conditions of Crack (Screen) Type in Piecewise Inhomogeneous Media // Differential Equations, 2009, Vol. 45, No. 6, pp. 873-877..

6. Kholodovskii S. E. The convolution method for fourier expansions: The case of a crack (screen) in an inhomogeneous space // Differential Equations, 2009, Vol. 45, No. 8, pp. 1229–1233.

Рукопись поступила в редакцию 14 апреля 2011 г.