УДК 517.51
ББК 22.161

О. С. Лямина
г. Чита, Россия

О некоторых аппроксимационных константах в оценках приближения операторами Баскакова $M_n^{[1](k)}$ и $M_n^{[2](k_1,\,k_2)}$ функций класса $Lip\alpha$

Рассматриваются некоторые факты, касающиеся зависимости от параметров $k_{j,\,\alpha}$ аппроксимационных констант $A_{O,\alpha}^{[1](k)}$ и $A_{O,\alpha}^{[2]k_1,\,k_2)}$, характеризующих качество приближения функций классов $Lip\alpha$ тригонометрическими операторами Баскакова. Доказано, что при любом фиксированном $\alpha \in (0,\ 1)$ константы $A_{O,\alpha}^{[1](k)}$равномерно по k ограничены, а константы $A_{O,\alpha}^{[2]k_1,\,k_2)}$ этим свойством не обладают.

Ключевые слова: тригонометрические операторы Баскакова, функции классов $Lip\alpha$, аппроксимационные константы.

O. S. Lyamina
Chita, Russia

About Some Approximation Constants in Estimations of Approximant by Operators of Baskakova $M_n^{[1](k)}$ и $M_n^{[2](k_1,\,k_2)}$ of Functions of $Lip\alpha$ Class

In this article some facts related to the dependence upon parameters of approximating constants $A_{O,\alpha}^{[1](k)}$ and $A_{O,\alpha}^{[2]k_1,\,k_2)}$, which characterize the quality of approximant functions $Lip\alpha$ by trigonometric operators of Baskakov are considered. It was proved that for any fixed $\alpha \in (0,\ 1)$ constants $A_{O,\alpha}^{[1](k)}$ are uniformly limited on k, and constants $A_{O,\alpha}^{[2]k_1,\,k_2)}$ doesn't have this property.

Keywords: Baskakov's trigonometric operators, classes of functions $Lip\alpha$, the approximation constant.

Тригонометрическими операторами Баскакова называют (см.[1]) аппроксимирующие последовательности вида

$$M_n^{[m](k_1,\ldots,k_m)}(f,x) = \frac{2^{m-1}\prod\limits_{j=1}^{m}\sin^2\frac{\pi k_j}{n}}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{f(t+x)\sin^2\frac{nt}{2}dt}{\sin^2\frac{t}{2}\prod\limits_{j=1}^{m}\left(\cos t-\cos\frac{2\pi k_j}{n}\right)}, \tag{1}$$

где целые параметры $m,\ k_j$ не зависят от n и удовлетворяют неравенствам $m > 0, 0 < k_1 < k_2 < \ldots < k_m, f(t) \in C_{2\pi}$. Если $m = 1$, то вместо k_1 пишут k.

Известно [1; 2], что, если $f(t) \in Lip_M\alpha$, то

$$\left\|M_n^{[m](k_1,\ldots,k_m)}(f,x) - f\left(x\right)\right\| \le MA_{O,\alpha}^{[m](k_1,\ldots,k_m)}n^{-\alpha} + o\left(n^{-\alpha}\right), \tag{2}$$

где

$$A_{O,\alpha}^{[m](k_1,\ldots,k_m)} = 2^{1+\alpha}\pi^{2m-1}\prod_{j=1}^{m}k_j^2\int\limits_0^{\infty}\frac{t^\alpha sin^2tdt}{t^2\prod\limits_{j=1}^{m}\left|k_j^2\pi^2-t^2\right|}.$$

Содержание работы составляют следующие два результата. Говорят, что $f(t)$ принадлежит классу $Lip_M\alpha,\ M > 0,\ \alpha \in (0,\ 1]$, если $\forall t_1,\ t_2$ выполняется $|f(t_1) - f(t_2)| \le M\,|t_1 - t_2|^\alpha$.

Теорема 1.При любом фиксированном $\alpha \in (0,\ 1)$ *величина*

$$A^{(k)}_{o,\alpha} = 2^{1+\alpha} k^2 \pi \int\limits_0^\infty \frac{t^{\alpha-2} sin^2 t\ dt}{|k^2\pi^2 - t^2|}$$

равномерно по k *ограничена.*

Доказательство. Представим $A^{(k)}_{o,\alpha}$ в виде суммы

$$A^{(k)}_{o,\alpha} = 2^{1+\alpha} k^2 \pi \int\limits_0^{k\,\pi} \frac{t^{\alpha} sin^2 t\ dt}{t^2\left(k^2\pi^2 - t^2\right)} + 2^{1+\alpha} k^2 \pi \int\limits_{k\,\pi}^\infty \frac{t^{\alpha} sin^2 t\ dt}{t^2\left(t^2 - k^2\pi^2\right)} = 2^{\alpha}\left(J_1 + J_2\right).$$

Преобразуем J_1:

$$J_1 = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{k\,\pi} t^{\alpha} \left(\frac{sin^2 t}{t^2} + \frac{sin^2 t}{k^2\pi^2 - t^2}\right) dt = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{k\,\pi} \frac{sin^2 t}{t^{2-\alpha}} dt + \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{k\,\pi} \frac{t^{\alpha} sin^2 t\ dt}{k^2\pi^2 - t^2} =$$

$$= J_{1,1} + J_{1,2}.$$

Оценивая первое слагаемое имеем

$$J_{1,1} = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{k\,\pi} \frac{sin^2 t\ dt}{t^{2-\alpha}} < \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\infty} \frac{sin^2 t\ dt}{t^{2-\alpha}}.$$

Последний интеграл сходится при любом $\alpha \in (0,\ 1)$. Далее покажем, что $J_{1,2} = o(1)$. Действительно,

$$J_{1,2} = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{k\,\pi} \frac{t^{\alpha} sin^2 t\ dt}{k^2\pi^2 - t^2} = \frac{1}{k\,\pi^2} \left(\int\limits_0^{k\,\pi} \frac{t^{\alpha} sin^2 t\ dt}{k\,\pi + t} + \int\limits_0^{k\,\pi} \frac{t^{\alpha} sin^2 t\ dt}{k\,\pi - t} \right) = J_{1,2,1} + J_{1,2,2}.$$

$$J_{1,2,1} = \frac{1}{k\,\pi^2} \int\limits_0^{k\,\pi} \frac{t^{\alpha} sin^2 t\ dt}{k\,\pi + t} < \frac{(k\,\pi)^{\alpha}}{k^2\,\pi^3} \int\limits_0^{k\,\pi} sin^2 t\ dt < \frac{1}{\pi}(k\,\pi)^{\alpha-1} = o(1).$$

$$J_{1,2,2} = \frac{1}{k\,\pi^2} \int\limits_0^{k\,\pi} \frac{t^{\alpha} sin^2 t\ dt}{k\,\pi - t} < \frac{(k\,\pi)^{\alpha}}{k\,\pi^2} \int\limits_0^{k\,\pi} \frac{sin^2 t\ dt}{t} = O\left(\frac{ln\ k}{k^{1-\alpha}}\right).$$

Осталось оценить J_2.

$$J_2 = 2\pi\,k^2 \int\limits_{k\,\pi}^{\infty} \frac{t^{\alpha} sin^2 t\ dt}{t^2\left(t^2 - k^2\pi^2\right)} < \frac{2}{\pi} \int\limits_{k\,\pi}^{\infty} \frac{t^{\alpha} sin^2 t\ dt}{t^2 - k^2\pi^2}.$$

Сделаем замену $\tau = t - k\,\pi$, затем вновь обозначим t вместо τ

$$J_2 = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\infty} \frac{(t + k\,\pi)^{\alpha} sin^2 t\ dt}{t(t + 2k\,\pi)} < \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\infty} \frac{sin^2 t\ dt}{t(t + k\,\pi)^{1-\alpha}} < \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\infty} \frac{sin^2 t\ dt}{t^{2-\alpha}}.$$

Последний интеграл сходится, следовательно, $J_2 = O(1)$.Теорема 1 доказана.

Заметим, что $A^{(k)}_{o,\alpha}$ равномерно ограничено при каждом фисированном $\alpha \in (0,\,1)$, но не по всем α в совокупности. Известно (см., например, [2]), что $A^{(k)}_{o,1} = O(ln\ k)$.

Как мы увидим далее, при $m = 2$ положение дел меняется.

Теорема 2. При любом $\alpha \in (0,\ 1]$ множество констант $A_{O,\ \alpha}^{[2]\ (k_1,\ k_2)}$, $k_1,\ k_2 = 1, 2, \ldots$ не имеет конечной верхней грани.

Доказательство. Обозначим

$$J = J(\alpha,\ k_1,\ k_2) = 2^{1+\alpha}\pi^3 k_1^2 k_2^2 \int\limits_0^{k_1\,\pi} \frac{t^\alpha sin^2 t\ dt}{t^2(k_1^2\pi^2 - t^2)(k_2^2\pi^2 - t^2)}$$

.

Очевидно $J < A_{O,\ \alpha}^{[2](k_1,\ k_2)}$. Преобразуем J:

$$J = 2^{1+\alpha}\pi^3 k_1^2 k_2^2 \int\limits_0^{k_1\,\pi} \frac{t^\alpha sin^2 t\ dt}{t^2(k_1^2\pi^2-t^2)(k_2^2\pi^2-t^2} =$$
$$= 2^{1+\alpha}\frac{\pi\ k_1^2\ k_2^2}{k_2^2-k_2^1}\int\limits_0^{k_1\,\pi}\frac{t^\alpha\ sin^2 t}{t^2}\Big(\frac{1}{k_1^2\pi^2-t^2} -$$
$$-\frac{1}{k_2^2\pi^2-t^2}\Big)dt = 2^{1+\alpha}\pi\frac{k_1^2\ k_2^2}{k_2^2-k_2^1}\int\limits_0^{k_1\,\pi} t^\alpha\ sin^2 t\Big(\frac{1}{\pi^2 k_1^2}\left(\frac{1}{t^2}+\frac{1}{k_1^2\pi^2-t^2}\right) -$$
$$-\frac{1}{\pi^2 k_1^2}\left(\frac{1}{t^2}+\frac{1}{k_2^2\pi^2-t^2}\right)\Big)dt = 2^{1+\alpha}\pi^{-1}\int\limits_0^{k_1\,\pi}\frac{sin^2 t}{t^{2-\alpha}dt} +$$
$$+2^{1+\alpha}\pi\frac{k_1^2\ k_2^2}{k_2^2-k_2^1}\int\limits_0^{k_1\,\pi} t^\alpha\ sin^2 t\cdot\left(\frac{1}{\pi^2 k_1^2}\frac{1}{k_1^2\pi^2-t^2} - \frac{1}{\pi^2 k_1^2}\frac{1}{k_2^2\pi^2-t^2}\right)dt = J_1 + J_2.$$

J_1 равномерно ограничен (он от k_2 не зависит), действительно $J_1 = 2^{1+\alpha}\pi^{-1}\int\limits_0^{k_1\,\pi}\frac{sin^2 t}{t^{2-\alpha}}dt$ (интеграл сходится при $\alpha < 1$).

Для исследования J_2 произведем преобразования выражения в скобках:

$$\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{1}{k_1^2}\frac{1}{k_1^2\pi^2-t^2} - \frac{1}{k_1^2}\frac{1}{k_2^2\pi^2-t^2}\right) = \pi^{-2}\frac{k_2^2-k_1^2}{k_1^2\ k_2^2}\cdot\frac{\pi^2(k_1^2+k_2^2)-t^2}{(k_1^2\pi^2-t^2)(k_2^2\pi^2-t^2)} =$$
$$= \pi^{-2}\frac{k_2^2-k_1^2}{k_1^2\ k_2^2}\left(\frac{1}{k_1^2\pi^2-t^2}+\frac{1}{k_2^2\pi^2-t^2}+\frac{t^2}{(k_1^2\pi^2-t^2)(k_2^2\pi^2-t^2)}\right).$$

Таким образом,

$$J_2 = 2^{1+\alpha}\pi^{-1}\int\limits_0^{k_1\,\pi}\frac{t^\alpha sin^2 t}{k_1^2\pi^2-t^2}dt + 2^{1+\alpha}\pi^{-1}\int\limits_0^{k_1\,\pi}\frac{t^\alpha sin^2 t}{k_2^2\pi^2-t^2}dt +$$
$$+2^{1+\alpha}\pi^{-1}\int\limits_0^{k_1\,\pi} t^\alpha\ sin^2 t\frac{t^2}{(k_1^2\pi^2-t^2)(k_2^2\pi^2-t^2)}dt = J_{2,1}+J_{2,2}+J_{2,3}.$$

Очевидно, что $J_{2,1} > 0$ и $J_{2,2} > 0$. Исследуем $J_{2,3}$ при $k_1 = k,\ k_2 = k+1:$

$$J_{2,3} = 2^{1+\alpha}\pi^{-1}\int\limits_0^{k_1\,\pi} t^\alpha\ sin^2 t\frac{t^2}{(k_1^2\pi^2-t^2)(k_2^2\pi^2-t^2)}dt =$$
$$= 2^{1+\alpha}\pi^{-1}\int\limits_0^{k_1\,\pi}\frac{t^2}{(k\ \pi+t)(k\ \pi+\pi+t)}\cdot\frac{t^\alpha sin^2 t}{(k\ \pi-t)(k\ \pi+\pi-t)}dt >$$
$$> 2^{1+\alpha}\pi^{-1}\int\limits_{(k-1)\pi}^{k\,\pi}\frac{t^2}{(k\ \pi+t)(k\ \pi+\pi+t)}\cdot\frac{t^\alpha sin^2 t}{(k\ \pi-t)(k\ \pi+\pi-t)}dt.$$

По теореме о среднем получим

$$J(k) = 2^{1+\alpha}\pi^{-1}\frac{\xi^2}{(k\ \pi+\xi)(k\ \pi+\pi+\xi)}\int\limits_{(k-1)\pi}^{k\,\pi}\frac{t^\alpha sin^2 t}{(k\ \pi-t)(k\ \pi+\pi-t)}dt,$$

$$\xi \in ((k-1)\pi,\ k\,\pi).$$

Множитель перед интегралом равномерно ограничен сверху и снизу. Исследуем сам интеграл

$$\int\limits_{(k-1)\pi}^{k\,\pi} \frac{t^{\alpha} sin^2 t}{(k\,\pi - t)(k\,\pi + \pi - t)} dt = \int\limits_{0}^{\pi} \frac{(k\,\pi - t)^{\alpha} sin^2 t}{t\,(t+\pi)} dt = (k\,\pi - \delta)^{\alpha} \int\limits_{0}^{\pi} \frac{sin^2 t}{t\,(t+\pi)} dt,$$

где $\delta \in (0,\ \pi)$. Итак, $J(k) = O(k^{\alpha})$. Теорема 2 доказана.

Список литературы

1. Абакумов Ю. Г. Приближение периодических функций тригонометрическими операторами Баскакова. Научное издание. Чита: ЧитГУ, 2006. 158 с.

2. Коган Е. С. Некоторые методы получения точных и экстремальных констант в оценках приближения линейными операторами функций классов $Lip_M\alpha$: автореф. дис. ...канд. физ.-мат. наук. Красноярск, 2005. 16 с.

Рукопись поступила в редакцию 18 апреля 2011 г.