УДК 517.956
ББК 143

С. Е. Холодовский
г. Чита, Россия

О решении краевых задач в полупространстве, ограниченном многослойной пленкой

Для определенного достаточно широкого класса дифференциальных уравнений рассмотрены краевые задачи в полупространстве, ограниченном многослойной пленкой. Выведены обобщенные граничные условия на этой пленке, которые соответствуют граничным условия n-го рода. Решения задач выражены в однократных квадратурах через решение соответствующей краевой задачи с граничными условиями первого рода.

Ключевые слова: краевые задачи, многослойные пленки, сильно проницаемые трещины, слабо проницаемые завесы, метод свертывания разложений Фурье.

S. Ye. Kholodovsky
Chita, Russia

On the Solution of Boundary Value Problems in Half-space Limited Multilayer Film

Boundary value problem in a half-space bounded of the multilayer film are considered for rather a wide class of differential equations. We derive the generalized boundary conditions on this film, which correspond to the boundary conditions of the n kind. The problems solutions are expressed in single quadratures through the solution of the corresponding boundary value problem with boundary conditions of the first kind.

Keywords: boundary value problems, multilayer films, strongly permeable cracks, weakly permeable screens, the method of convolution of Fourier expansions.

В решении многих прикладных проблем большую роль играют материалы с пленочными покрытиями. Это связано с широким применением композитных материалов, развитием нанотехнологий и т. д. Поэтому большой интерес имеют краевые задачи тепломассопереноса в областях, ограниченных многослойными пленками.

1. Обобщенные граничные условия на многослоной пленке. Постановка задач. Рассмотрим в полупространстве $D(y < 0, x = (x_1, ..., x_m) \in R^m)$ класс краевых задач относительно уравнения

$$\partial_y^2 u + L[u] = 0, \tag{1}$$

когда граница $y = 0$ является многослойной пленкой. Здесь L – произвольный линейный дифференциальный оператор по переменным x_i, $\partial_y^n = \partial^n / \partial y^n$. Для вывода граничных условий на пленке $y = 0$ предположим, что на внешней стороне границы $y = +0$ можно определить значения потенциала и нормальной скорости

$$y = 0: \qquad u = \varphi(x), \qquad k\partial_y u = \psi(x), \tag{2}$$

где $k > 0$ – постоянная, характеризующая проницаемость области D, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – некоторые заданные функции. Пусть пленка $y = 0$ состоит из i примыкающих друг к другу трещин и завес, которые моделируем бесконечно тонкими слоями с бесконечно большой для трещин и бесконечно малой для завес проницаемостью [1–4]. Рассмотрим граничные условия на данной пленке вида

$$y = -0: \qquad \varphi(x) - u = F_i[u], \qquad \psi(x) - k\partial_y u = G_i[u], \tag{3}$$

где F_i и G_i – искомые линейные операторы с постоянными коэффициентами.

Добавим к данной пленке трещину или завесу $y = +0$, которую заменим слоем $D_0(0 < y < l)$ толщины l и проницаемости k_0. Тогда с учетом (2), (3) на границах слоя D_0 для потенциалов $u_0(x,y)$ в D_0 и $u(x,y)$ в D выполняются условия

$$y = l: \qquad u_0 = \varphi(x), \qquad k_0\partial_y u_0 = \psi(x),$$

$$y = 0: \qquad u_0 - u = F_i[u], \qquad k_0\partial_y u_0 - k\partial_y u = G_i[u]. \tag{4}$$

При этом предполагаем, что функции u_0 в D_0 и u в D удовлетворяют уравнению (1). Отсюда на границах слоя D_0 получим условия

$$\varphi - u_{|y=0} = u_{0|y=l} - u_{0|y=0} + F_i[u]_{|y=0} = \frac{l}{k_0}k_0\partial_y u_{0|y=c_1} + F_i[u]_{|y=0}, \tag{5}$$

$$\psi - k\partial_y u_{|y=0} = k_0\partial_y u_{0|y=l} - k_0\partial_y u_{0|y=0} + G_i[u]_{|y=0} = lk_0\partial_y^2 u_{0|y=c_2} + G_i[u]_{|y=0}, \tag{6}$$

где $c_i \in (0,l)$. Пусть слой D_0 вырождается в трещину с параметром A [1–3], т. е. $l \to 0$, $k_0 \to \infty$, $k_0 l \to A$. Отсюда с учетом (5), (4) получим $\lim u_{0|y=l} = \lim u_{0|y=0} = \lim(u + F_i[u])_{|y=0}$. Полагая, что для уравнения (1) имеет место принцип максимума, из последних равенств найдем $\lim u_{0|y=c_2} = \lim(u + F_i[u])_{|y=0}$ для $\forall c_2 \in (0,l)$. Применяя оператор L к последнему соотношению, с учетом уравнения (1) получим $\lim \partial_y^2 u_{0|y=c_2} = \lim(\partial_y^2 u + F_i[\partial_y^2 u])_{|y=0}$. Тогда из равенств (5), (6) следуют граничные условия на данной пленке с дополнительной трещиной $y = +0$ вида

$$y = -0: \qquad \varphi(x) - u = F_{i+1}[u], \qquad \psi(x) - k\partial_y u = G_{i+1}[u], \tag{7}$$

где

$$F_{i+1}[u] = F_i[u], \qquad G_{i+1}[u] = A(\partial_y^2 u + F_i[\partial_y^2 u]) + G_i[u]. \tag{8}$$

Если слой D_0 вырождается в завесу с параметром B [1–3], т. е. $l \to 0$, $k_0 \to 0$, $l/k_0 \to B$, то из равенств (6), (4) получаем $\lim k_0\partial_y u_{0|y=l} = \lim k_0\partial_y u_{0|y=0} = \lim(k\partial_y u + G_i[u])_{|y=0}$. Отсюда $\lim k_0\partial_y u_{0|y=c_1} = \lim(k\partial_y u + G_i[u])_{|y=0}$ для $\forall c_1 \in (0,l)$. Тогда из равенств (5), (6) следуют граничные условия на данной пленке с дополнительной завесой $y = +0$ в виде (7), где

$$F_{i+1}[u] = B(k\partial_y u + G_i[u]) + F_i[u], \qquad G_{i+1}[u] = G_i[u]. \tag{9}$$

Пусть пленка $y = 0$ состоит из n трещин и завес. Тогда для уравнения (1) в D можно рассматривать два типа задач при граничных условиях соответственно вида

$$y = -0: \qquad \varphi(x) - u = F_n[u],$$

$$y = -0: \qquad \psi(x) - k\partial_y u = G_n[u], \tag{10}$$

где операторы F_i и G_i строятся по рекуррентным формулам (8), (9), в которых $F_0 = G_0 = 0$, $i = 0, ..., n-1$.

В полученных граничных условиях порядок производных от искомого потенциала может быть произвольным. Это позволяет определять граничные условия n-го рода с указанием их физического смысла.

2. Решение краевых задач второго типа для двухслойной пленки. Рассмотрим краевые задачи (1), (10) в случае двухслойной пленки $y = 0$, состоящей из трещины $y = +0$ и завесы $y = -0$, при этом граничное условие (10) примет вид

$$y = -0: \qquad \psi(x) - k\partial_y u = A(\partial_y^2 u + Bk\partial_y^3 u). \tag{11}$$

Решение этой задачи определяется с точностью до аддитивной постоянной.

Пусть известно решение $F(x,y)$ классической первой краевой задачи в D с граничной функцией $\psi(x)$ (11):

$$\partial_y^2 F + L[F] = 0, \qquad y < 0, \qquad F_{|y=0} = \psi(x). \tag{12}$$

Методом работ [1-4] выразим решение задачи (1), (11) с многослойной пленкой непосредственно через функцию $F(x,y)$ (12). Следуя указанному методу, для вывода общих формул рассмотрим частные (модельные) случаи задач (1), (11) и (12), допускающие применение метода Фурье. Пусть $L = \partial_x^2$, $x \in R$. Отсюда в полуплоскости $D(y<0)$ получим задачи (1), (11) и (12) соответственно вида

$$\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0, \qquad y < 0 \tag{13}$$

при граничном условии (11), и

$$\partial_x^2 F + \partial_y^2 F = 0, \qquad y < 0; \qquad F_{|y=0} = \psi(x). \tag{14}$$

Решая задачу Дирихле (14) методом Фурье, представим функцию F в виде

$$F(x,y) = \int_0^\infty e^{\lambda y} g d\lambda\,, \qquad y \le 0, \qquad g = f_1 \sin\lambda x + f_2 \cos\lambda x, \tag{15}$$

где $f_i(\lambda)$ – коэффициенты Фурье граничной функции $\psi(x)$. Из разложения (15) следуют равенства (см. [1–3])

$$\frac{1}{n!}\int_0^\infty e^{-\gamma t} t^n F(x, y-t)dt = \int_0^\infty \frac{e^{\lambda y} g}{(\lambda+\gamma)^{n+1}} d\lambda\,, \qquad \gamma > 0\,, \qquad n = 0,1,2,\ldots. \tag{16}$$

$$\int_0^\infty [F(x,y-t) - F(0,-t)]dt = \int_0^\infty \frac{e^{\lambda y} g - f_2}{\lambda} d\lambda, \tag{17}$$

где g имеет вид (15) (последний интеграл сходится при $\lambda = 0$ за счет аддитивной постоянной).

Представляя решение задачи (13), (11) в виде

$$u = \int_0^\infty a e^{\lambda y} g d\lambda\,, \qquad y \le 0. \tag{18}$$

из условия (11) с учетом (15) при $y = 0$ найдем

$$a = \frac{1}{\lambda(ABk\lambda^2 + A\lambda + k)}. \tag{19}$$

Пусть $A \ne 4Bk^2$. Тогда, раскладывая дробь (19) на простейшие, из (18) получим

$$u(x,y) = \int_0^\infty \left[\frac{e^{\lambda y} g - f_2}{\lambda k} - \frac{e^{\lambda y} g}{(\lambda+\gamma_1)\gamma_1\sqrt{d}} + \frac{e^{\lambda y} g}{(\lambda+\gamma_2)\gamma_2\sqrt{d}}\right] d\lambda\,, \tag{20}$$

где $g(x,\lambda) = f_1 \sin\lambda x + f_2 \cos\lambda x$ (15), $\gamma_j = [A + (-1)^j\sqrt{d}]/(2ABk) > 0$, $d = A(A - 4Bk^2)$ (интеграл (20) сходится при $\lambda = 0$ за счет аддитивной постоянной).

Формула (20) содержит двукратные квадратуры внешнюю и внутреннюю в коэффициентах f_i от сильно осциллирующих тригонометрических функций. С учетом формул (16), (17) решение (20) задачи (13), (11) непосредственно выражается через функцию $F(x,y)$ (без разложений Фурье):

$$u = \frac{1}{k}\int_0^\infty [F(x,y-t) - F(0,-t)]dt - \frac{AB}{\sqrt{d}}\int_0^\infty F(x,y-t)\left(\gamma_2 e^{-\gamma_1 t} - \gamma_1 e^{-\gamma_2 t}\right)dt, \tag{21}$$

где $F(x,y)$ – решение задачи Дирихле (14). В случае комплексных корней γ_i (20) (при $d < 0$) функция (21) действительна.

Если $A = 4Bk^2$, то с учетом (16) и (17) решение задачи (13), (11) примет вид

$$u = \frac{1}{k}\int\limits_0^\infty \left\{F(x,y-t)\left[1-e^{-\gamma t}(1+\gamma t)\right]-F(0,-t)\right\}dt, \qquad \gamma = \frac{1}{2Bk}. \tag{22}$$

Полученные решение (21), (22) имеют вид операторов, действующие на функцию $F(x,y)$ по одной переменной y (переменная x остается свободной). Отсюда решение исходной задачи (1), (11) в соответствующих случаях также строится по формулам (21), (22), где $F(x,y)$ – решение задачи (12), что проверяется непосредственно.

3. Решение краевых задач первого типа типа в кусочно-однородных областях. В качестве примера задачи 1-го типа рассмотрим полупространство $D(y<l, x\in R^m)$, ограниченное слабо проницаемой завесой $y=l$, когда область D состоит из двух зон $D_1(y<0)$ и $D_2(0<y<l)$, $x\in R^m$ проницаемости k_i в D_i. Задача для потенциалов u_i в D_i имеет вид

$$\partial_y^2 u_i + L[u_i] = 0, \tag{23}$$

$$y=l: \qquad u_2 + Bk_2\partial_y u_2 = \psi(x), \tag{24}$$

$$y=0: \qquad u_1=u_2, \qquad k_1\partial_y u_1 = k_2\partial_y u_2. \tag{25}$$

Выразим решение данной задачи через решение классической задачи (12). Для вывода общих формул рассмотрим модельные случаи задач (23)–(25) и (12) в полуплоскости $D(y<0)$, $x\in R$ соответственно вида

$$\partial_x^2 u_i + \partial_y^2 u_i = 0, \qquad y<0 \tag{26}$$

при условиях (24), (25) и (14). Представляя решение задачи (23)-(25) в виде

$$u_1 = \int\limits_0^\infty p\,e^{\lambda y} g\,d\lambda\,, \qquad u_2 = \int\limits_0^\infty (a\operatorname{sh}\lambda y + b\operatorname{ch}\lambda y) g\,d\lambda\,, \tag{27}$$

из условий (24), (25) найдем

$$a = k_1 d, \qquad b = p = k_2 d,$$

где

$$d = \frac{1}{k_1(Bk_2\lambda\operatorname{ch}\lambda l + \operatorname{sh}\lambda l) + k_2(Bk_2\lambda\operatorname{sh}\lambda l + \operatorname{ch}\lambda l)} = \frac{2\gamma e^{-\lambda\lambda l}}{(\lambda+\gamma)(k_1+k_2)(1-q)},$$

$$q = \frac{\lambda-\gamma}{\lambda+\gamma}\,e^{-2\lambda l}\nu, \qquad \nu = \frac{k_2-k_1}{k_1+k_2}, \qquad \gamma = \frac{1}{Bk_2},$$

функция g имеет вид (15), при этом $|q|<1$ при $0\le\lambda<\infty$. Раскладывая дробь $(1-q)^{-1}$ в геометрическую прогрессию, получим решение (27) задачи (24)–(26) в виде

$$u_1 = (1+\nu)\gamma\sum_{n=0}^\infty \nu^n \int\limits_0^\infty \frac{(\lambda-\gamma)^n}{(\lambda+\gamma)^{n+1}}\,e^{\lambda(y-l-2nl)} g\,d\lambda,$$

$$u_2 = \gamma\sum_{n=0}^\infty \nu^n \int\limits_0^\infty \frac{(\lambda-\gamma)^n}{(\lambda+\gamma)^{n+1}}\,\left[e^{\lambda(y-l-2nl)} + e^{-\lambda(y+l+2nl)}\nu\right] g\,d\lambda.$$

Из разложения заданной функции $F(x,y)$ (15) следует формула

$$\frac{(-1)^n}{n!}\int\limits_0^\infty e^{-2\gamma t} t^n \frac{\partial^n}{\partial t^n}\left[e^{\gamma t}F(x,y-t)\right]dt = \int\limits_0^\infty \frac{(\lambda-\gamma)^n}{(\lambda+\gamma)^{n+1}}\,e^{\lambda y} g\,d\lambda, \qquad y<0.$$

Отсюда решение задачи (24)–(26) примет вид (без разложений Фурье):

$$u_1 = (1+\nu)\gamma \sum_{n=0}^{\infty} \nu^n \frac{(-1)^n}{n!} \int\limits_0^{\infty} e^{-2\gamma t} t^n \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left[e^{\gamma t} F(x, y - l - 2nl - t) \right] dt,$$

$$u_2 = \gamma \sum_{n=0}^{\infty} \nu^n \frac{(-1)^n}{n!} \int\limits_0^{\infty} e^{-2\gamma t} t^n \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left\{ e^{\gamma t} [F(x, y - l - 2nl - t) + \right.$$

$$\left. + \nu F(x, -y - l - 2nl - t)] \right\} dt. \qquad (28)$$

Решение задачи (23)–(25) также строится по формулам (28), где $F(x, y)$ – решение классической задачи (12), что проверяется непосредственно.

Список литературы

1. Холодовский С. Е. Метод свертывания разложений Фурье в решении краевых задач с пересекающимися линиями сопряжения // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2007. Т. 47. № 9. С. 1550-1556.

(Kholodovskii S. Ye. A Method of Convolution of Fourier Expansions as Applied to Solving Boundary Value Problems with Intersecting Interface Lines // Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2007, Vol. 47, No. 9, pp. 1489–1495).

2. Холодовский С. Е. Метод свертывания разложений Фурье. Случай обобщенных условий сопряжения типа трещины (завесы) в кусочно-неоднородных средах // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 6. С. 855-859.

(Kholodovskii S. Ye. The Convolution Method of Fourier Expansions. The Case of Generalized Transmission Conditions of Crack (Screen) Type in Piecewise Inhomogeneous Media // Differential Equations, 2009, Vol. 45, No. 6, pp. 873–877).

3. Холодовский С. Е. Метод свертывания разложений Фурье. Случай трещины (завесы) в неоднородном пространстве // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 8. С. 1204–1208.

(Kholodovskii S. Ye. The Convolution Method of Fourier Expansions. The Case of a Crack (Screen) in an Inhomogeneous Space // Differential Equations, 2009, Vol. 45, No. 8, pp. 1229–1233).

4. Холодовский С. Е., Гуримская И. А., Игнатьева Н. В. О решении краевых задач на неоднородной плоскости с трещиной и завесой, соединенными последовательно // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47. № 3. С. 396–404.

(Kholodovskii S. E., Gurimskaya I. A., Ignat'eva N. V. On the Solution of Boundary Value Problems on an Inhomogeneous Plane with a Crack and a Barrier Connected in Series // Differential Equations, 2011, Vol. 47, No. 3, pp. 393–401).

Рукопись поступила в редакцию 14 апреля 2011 г.