УДК 378.14
ББК Ч486.51

С. Н. Холодова
г. Армавир, Россия

Некоторые вопросы методики изложения темы «Переменный ток»

В статье предлагается своеобразная методика изучения закономерностей переменного тока, которая раскрывает глубину этого раздела электродинамики. Введение комплексной амплитуды в теории переменных токов и электрических колебаний позволяет заменить дифференциальные уравнения более простыми алгебраическими уравнениями. Этот метод называется символическим.

Ключевые слова: методика изучения темы, закономерности переменного тока, символический метод.

S. N. Kholodova
Armavir, Russia

Some Questions of a Technique of Presenting the Theme “Alternating Current”

The paper presents an original technique of studying the laws of alternating current, which reveals the depth of this section of electrodynamics. The introduction of the complex amplitude in the theory of alternating currents and electric oscillations allows us to replace differential equations with simpler algebraic equations. This method is called symbolic.

Keywords: methods of studying the topic, the laws of alternating current, symbolic method.

Процесс распространения переменного тока намного сложнее, чем у тока постоянного. Поэтому при изучении закономерностей переменного тока нельзя излагать эту тему как простое обобщение законов постоянного тока, необходима своеобразная методика изложения, раскрывающая перед студентами всю глубину и многогранность этого раздела электродинамики.

Для расчета цепей, по которым текут гармонические переменные токи, удобно пользоваться наглядными векторными диаграммами и представлением амплитуды A и фазы φ в виде комплексного числа $\widehat{A} = A \cdot e^{i\varphi} = A(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Введение комплексной амплитуды в теории переменных токов и электрических колебаний позволяет заменить дифференциальные уравнения более простыми алгебраическими. Этот метод получил название символического.

Известно, что каждому вектору $\vec{A}$, расположенному в плоскости XOY (рис. 1), можно сопоставить комплексное число $\widehat{A} = x + iy = Ae^{i\varphi}$, где x и y проекции вектора на оси координат, A– модуль вектора и комплексного числа, φ – аргумент комплексного числа.

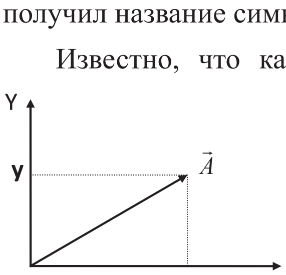

Рис. 1

Причём $A = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $\mathrm{tg}\varphi = \frac{y}{x}$.

Напомним, что при сложении комплексных чисел отдельно складываются их действительные и мнимые части

$$\hat{A} = \sum \hat{A}_K = \sum x_K + i\sum y_K \qquad (1)$$

Существенной особенностью этого равенства является его соответствие сумме векторов $\vec{A}$. В этом легко убедиться, рассмотрев рис. 2 , у векторов $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$ компоненты равны $(x_1 y_1)$ и $(x_2 y_2)$, а компоненты у суммарного вектора $\vec{A}$ есть (xy).

Из рис.2 следует, что $x = x_1 + x_2$ и $y = y_1 + y_2$ в полном согласии с равенством (1).

Перейдем к рассмотрению операции умножения комплексных чисел. Если они представлены в виде $\hat{A} = A \cdot e^{i\varphi}$ и $\widehat{B} = B \cdot e^{i\psi}$, то как известно,

Рис. 2

$$\widehat{A}\widehat{B} = Ae^{i\varphi}\cdot Be^{i\psi} = AB\cdot e^{i(\varphi+\psi)} \qquad (2)$$

Отсюда следует, что произведение комплексного числа $\widehat{A} = A\cdot e^{i\varphi}$, соответствующего вектору $\vec{A}$ на координатной плоскости (рис. 3), на комплексную величину с модулем равным 1, т. е. $e^{i\psi}$, геометрически сводится к повороту вектора $\vec{A}$ на угол ψ против часовой стрелки.

В частности, если величина $\psi = \dfrac{\pi}{2}$, то $e^{i\psi} = \cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2} = 0 + i\cdot 1 = i$. Следовательно, умножение некоторого вектора на $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ геометрически сводится к повороту вектора на угол $\dfrac{\pi}{2}$ против часовой стрелки. Нетрудно заключить, что при умножении вектора на комплексную величину

$$e^{-\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{i} = -i$$

геометрически означает поворот вектора на 90° по часовой стрелке.

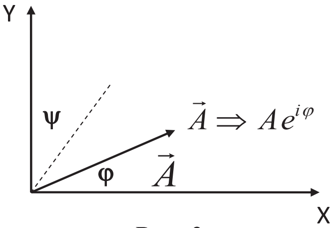

Рис. 3

Приведём примеры, иллюстрирующие удобство применения комплексного метода при рассмотрении различных процессов, происходящих в цепи переменного тока. Но прежде подчеркнем важность понимания физического смысла уравнений, записанных в комплексной форме, не производя перехода к вещественной форме этих уравнений. Комплексная форма менее громоздка и делает сами формулы более общими и более понятными.

В качестве первого примера, следуя И. В. Савельеву [1], представим в комплексной форме формулу для ЭДС самоиндукции. Рассмотрим простейший электрический контур, содержащий катушку индуктивности L. Пусть к катушке мы приложили переменное напряжение

$$U = U_0\cos\omega t \qquad (3)$$

(сопротивлением и емкостью катушки пренебрежем).

Ясно, что поскольку все внешнее напряжение приложено к индуктивности L, то падение напряжения на ней U_L равно

$$U_L = L\frac{dI}{dt} \qquad (4)$$

Отсюда получаем $dI = \dfrac{U_0}{L}\cos\omega t\,dt$ Интегрирование этого равенства дает формулу

$$I = \frac{U_0}{\omega L}\sin\omega t \ ,$$

которую можно записать в виде

$$I = \frac{U_0}{\omega L}\sin\omega t = I_0\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right), \qquad (5)$$

где мы обозначили

$$I_0 = \frac{U_0}{\omega L}\ . \qquad (6)$$

Отсюда следует, что индуктивное сопротивление

$$X_L = \omega L\ . \qquad (7)$$

Объединяя соотношения (3), (4) и (5) приходим к выражению

$$U_L = \omega L I_0\cos\omega t \qquad (8)$$

Сравнивая соотношения (5) и (8), приходим к заключению, что падение напряжения на индуктивности U_L опережает по фазе ток, текущий по катушке на угол $\dfrac{\pi}{2}$.

Построим соответствующую векторную диаграмму: направим ось токов I горизонтально, тогда вектор напряжения U_L пойдёт вертикально вверх (рис. 4).

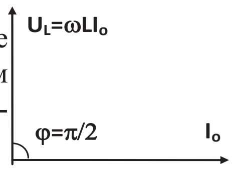

Рис. 4

Теперь проведем те же вычисления символическим методом. В этом случае формула (4) принимает вид

$$\hat{U}_L = L\frac{d\hat{I}}{dt} \qquad (9)$$

где сила пременного тока равна

$$\hat{I} = I_0 e^{i\omega t} \qquad (9')$$

Подставляя (9') в (9), получаем

$$\widehat{U} = L\frac{d}{dt}(I_0 e^{i\omega t}) = i\omega L I_0 e^{i\omega t} = i\omega L\hat{I}\ . \qquad (10)$$

Это равенство показывает, что вектор напряжения $\vec{U}_L$ равен по величине умноженному на индуктивное сопротивление $X_L=\omega L$ вектору силы тока $\vec{I}_0$, а затем полученный вектор поворачивают на угол $\dfrac{\pi}{2}$ против часовой стрелки. Т. е. мы пришли более простым путем к векторной диаграмме рис. 4.

Применим теперь символический метод к току через ёмкость C. Рассмотрим контур, содержащий конденсатор ёмкости *C*. Индуктивность и активное сопротивление контура ничтожно малы и ими можно пренебречь. Мы знаем, что переменный ток может протекать через конденсатор, падение напряжения на нём равно.

$$U_C = \frac{q}{C} \qquad (11)$$

Пренебрегая активным сопротивлением проводов, можно записать, что $q = \int I\,dt$. Подставляя это выражение в формулу (11) и переходя к символической записи, получим $\hat{U}_C = \frac{1}{C}\int I\,dt$

Полагая, что в цепи течет ток (9') , имеем

$$\hat{U} = \frac{1}{C}\int I_0 e^{i\omega t}\,dt = \frac{1}{i\omega C} I_0 e^{i\omega t} = -i\frac{\hat{I}}{\omega C} \qquad (12)$$

Т. е. вектор падения напряжения на конденсаторе емкости *C* $\vec{U}_C$ равен по величине деленному на ω*C* (или умноженному на ёмкостное сопротивление $X_C = \frac{1}{\omega C}$) вектору силы тока $\vec{I}_0$ и повернутому на угол $\frac{\pi}{2}$ по часовой стрелке (рис. 5).

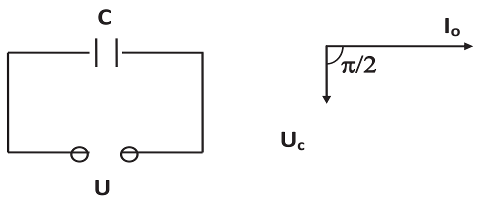

Рис. 5

В общем случае, когда в цепи имеется активное сопротивление *R*, катушка индуктивности *L*, конденсатор емкости *C*, внешнее напряжение $\hat{U}$ равно сумме комплексных величин

$$\hat{U}_R = R\hat{I}, \qquad \hat{U} = i\omega L\hat{I}, \qquad \hat{U}_C = -\frac{i}{\omega C}\hat{I},$$

т. е.

$$\hat{U} = \hat{I}\left[R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right] \qquad (13)$$

Комплексная величина

$$\hat{Z} = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + iX \qquad (14)$$

где *X* – реактивное сопротивление цепи, есть комплексное сопротивление, его модуль равен

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \qquad (14')$$

А аргумент, т. е. угол φ вектора $\vec{U}$ с осью токов, как легко убедиться, определяется формулой $\varphi = \mathrm{srctg}\frac{X_L - X_C}{R}$ (рис. 6).

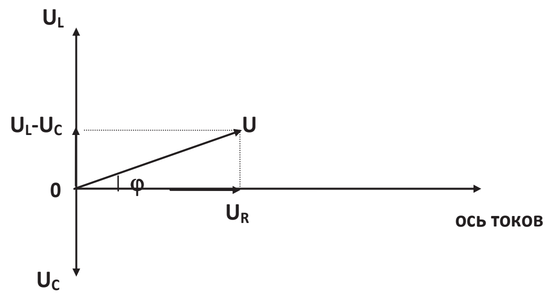

Рис. 6

Следовательно, комплексное сопротивление

$$\hat{Z} = Ze^{i\varphi} \qquad (15)$$

Список литературы

1. Савельев И. В. Курс общей физики: в 5 кн. Кн. 2. Электричество и магнетизм. М.: Астрель: АСТ, 2005. 336 с.
2. Сивухин Д. В. Общий курс физики: в 5 т. Т. 3. Электричество. М.: ФизМатЛит, 2006. 543 с.

Рукопись поступила в редакцию 20.08.2011 г.