УДК 517.956
DOI: 10.21209/2658-7114-2020-15-3-38-45

Святослав Евгеньевич Холодовский,
доктор физико-математических наук, профессор,
Забайкальский государственный университет
(672039, Россия, г. Чита, ул. Александро-Заводская, 30),
e-mail: hol47@yandex.ru
ORCID: 0000-0002-3983-1384

О решении задачи Дирихле в полуплоскости для дивергентных уравнений с кусочно-гладкими коэффициентами

Рассмотрена первая краевая задача в полуплоскости $y < 0$, состоящей из двух квадрантов $D_1(x < 0)$ и $D_2(x > 0)$, в которых дивергентное уравнение имеет коэффициенты соответственно вида $k_1(x) = a(b_1x-1)^{-2}$ и $k_2(x) = a(b_2x+1)^{-2}$. На линии $x = 0$ имеют место условия сопряжения. Данная задача моделирует установившиеся процессы тепломассопереноса в неоднородных средах с непрерывной функцией проницаемости, имеющей максимум на линии $x = 0$. Методом свёртывания разложений Фурье решение задачи выражено через решение классической задачи Дирихле в полуплоскости для уравнения Лапласа.

Ключевые слова: краевые задачи, дивергентное уравнение, неоднородные проницаемые среды, обобщённые условия сопряжения, метод свёртывания разложений Фурье

Реальные проницаемые среды, в которых происходят процессы тепломассопереноса, как правило, являются неоднородными. В математических моделях задачи тепломассопереноса в неоднородных средах приводят к краевым задачам математической физики для дивергентных уравнений с функциональным коэффициентом $k(x)$, который характеризует проницаемость среды. Для некоторых функций $k(x)$ известны явные решения соответствующих уравнений [1]–[6]. Однако указанные функции $k(x)$ могут обращаться в ноль или в бесконечность и поэтому моделируют проницаемость реальных сред лишь на малых участках, вне которых расхождение между проницаемостью и функцией $k(x)$ может быть значительным. Рассмотрение кусочно-непрерывных функций $k(x)$ расширяет возможности моделирования проницаемости реальных сред.

Рассмотрим в нижней полуплоскости $D(x \in R, y < 0)$, состоящей из двух квадрантов $D_1(x < 0, y < 0)$ и $D_2(x > 0, y < 0)$, относительно функций $\varphi_i(x, y)$ в D_i первую краевую задачу (задачу Дирихле) для дивергентных уравнений с обратно-квадратичными коэффициентами:

$$\partial_x[k_i(x)\partial_x\varphi_i(x, y)] + k_i(x)\partial_{yy}\varphi_i(x, y) = 0, \qquad (x, y) \in D_i; \tag{1}$$

$$\varphi_{1|y=0} = 0, \qquad \varphi_{2|y=0} = h(x), \tag{2}$$

$$x = 0: \qquad \varphi_1 = \varphi_2, \qquad \partial_x \varphi_1 = \partial_x \varphi_2; \tag{3}$$

где

$$k_1(x) = \frac{a}{(b_1 x - 1)^2}, \qquad k_2(x) = \frac{a}{(b_2 x + 1)^2}, \tag{4}$$

a, b_i – произвольные положительные постоянные, $h(x)$ – заданная функция, ($h(x)$ ограничена при $0 < x < \infty$), $\partial_x = \partial/\partial_x$, $\partial_{yy} = \partial^2/\partial y^2$, функции $\varphi_i(x, y)$ ограничены в D_i. Задача (1)-(3) описывает установившиеся процессы тепломассопереноса (теплопроводности, фильтрации жидкости, диффузии и др.) в кусочно-неоднородных средах с функциями проницаемости $k_i(x)$ в соответствующем квадранте D_i при заданном потенциале на границе полуплоскости. В задаче (1)–(3) граничное условие однородно при $x < 0$, что не умаляет общности, т. к. при однородном граничном условии при $x > 0$ (и неоднородном условии при $x < 0$) задача решается аналогично, а в общем случае при неоднородном граничном условии на всей границе $y = 0$ решение задачи имеет вид суммы решений указанных задач с однородными граничными условиями в одной из зон.

В задаче (1)–(3) проницаемость (4) в зонах D_i меняется вдоль оси x и не меняется по переменной y. При этом функция проницаемости непрерывна во всей полуплоскости $y < 0$, имеет максимум на линии $x = 0$ и убывает при удалении от этой линии в обе стороны. Отметим, что точки, в окрестности которых функции проницаемости (4) неограниченны, лежат вне соответствующей зоны D_i.

Условия сопряжения (3) выражают непрерывность потенциала и нормальной скорости на линии разрыва производной функции проницаемости.

Следуя работе «Задачи математической физики...»[7, с. 155], в задаче (1)–(3) перейдём к новым неизвестным функциям $u_i(x, y)$ в квадрантах D_i по формулам

$$\varphi_1(x, y) = (b_1 x - 1)\partial_x u_1(x, y) - b_1 u_1(x, y); \tag{5}$$

$$\varphi_2(x, y) = (b_2 x + 1)\partial_x u_2(x, y) - b_2 u_2(x, y). \tag{6}$$

Отсюда уравнения (1) для функций $u_i(x, y)$ примут вид уравнения Лапласа:

$$\Delta u_i(x, y) = 0, \qquad (x, y) \in D_i, \tag{7}$$

где $\Delta u = \partial_{xx} u + \partial_{yy} u$. Граничные условия (2) примут вид линейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций $u_i(x, 0)$ вида

$$\partial_x u_1(x, 0) - \frac{b_1}{b_1 x - 1} u_1(x, 0) = 0, \qquad x < 0; \tag{8}$$

$$\partial_x u_2(x, 0) - \frac{b_2}{b_2 x + 1} u_2(x, 0) = \frac{h(x)}{b_2 x + 1}, \qquad x > 0. \tag{9}$$

Решения уравнений (8), (9) соответственно при $x \in (-\infty, 0)$ и $x \in (0, \infty)$ имеют вид

$$u_{1|y=0,\,x<0} = 0, \qquad u_{2|y=0,\,x>0} = H(x), \tag{10}$$

где

$$H(x) = (b_2 x + 1)\left[\int\limits_0^x \frac{h(t)dt}{(b_2 t + 1)^2} + c\right], \tag{11}$$

постоянная c подбирается из условия ограниченности функции $H(x)$ при $0 < x < \infty$, иначе решение задачи Дирихле (см. (14)) имеет особую точку в бесконечности.

Условия сопряжения (3) для функций $u_i(x, y)$ (5), (6) примут вид

$$x = 0: \qquad -\partial_x u_1 - b_1 u_1 = \partial_x u_2 - b_2 u_2, \qquad -\partial_{xx} u_1 = \partial_{xx} u_2. \tag{12}$$

Последнее условие с учётом уравнения Лапласа (7) для функций $u_i(x, y)$ примет вид тождества $-\partial_{yy} u_1(0, y) \equiv \partial_{yy} u_2(0, y)$. Интегрируя дважды последнее тождество с учётом ограниченности функций $u_i(x, y)$ в D_i, получим $-u_1(0, y) = u_2(0, y)$. Отсюда условия сопряжения (12) приводятся к виду (первое условие сохраняется):

$$x = 0: \qquad -\partial_x u_1 - b_1 u_1 = \partial_x u_2 - b_2 u_2, \qquad -u_1 = u_2. \tag{13}$$

Таким образом, для функций $u_i(x, y)$ получили задачу Дирихле с обобщёнными условиями сопряжения при $x = 0$ вида (7), (10), (13).

Для решения задачи (7), (10), (13) применяем метод свёртывания разложений Фурье [8], который приспособлен к решению краевых задач с обобщёнными условиями сопряжения. Следуя указанному методу, наряду с задачей (7), (10), (13) рассмотрим классическую задачу Дирихле для уравнения Лапласа относительно функции $F(x, y)$ в полуплоскости $y < 0$ с сохранением граничной функции (10):

$$\Delta F = 0, \qquad y < 0; \qquad F_{|y=0} = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ H(x), & x > 0. \end{cases} \tag{14}$$

Решение последней задачи строится по формуле Пуассона и имеет вид

$$F(x, y) = -\frac{y}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{H(t)dt}{(x-t)^2 + y^2}, \qquad y < 0. \tag{15}$$

Отметим, что для широкого класса граничных функций $H(x)$ (например, для кусочно-непрерывных функций, составленных из многочленов) функция $F(x, y)$ вычисляется в конечном виде в элементарных функциях. Далее считаем функцию $F(x,y)$ (14), (15) известной.

Выведем формулы, выражающие решение задачи (7), (10), (13) через функцию $F(x,y)$. Для этого дальнейшие рассуждения проведём формально и проверим окончательный результат. Предположим сначала, что функция $F(0,y)$ при $-\infty < y < 0$ разлагается в интеграл Фурье по синусам:

$$F(0,y) = \int\limits_0^\infty f_1(\lambda) \sin \lambda y \, d\lambda,$$

где

$$f_1(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\infty F(0,y) \sin \lambda y \, dy. \tag{16}$$

Отсюда функция $F(x,y)$ (14) в квадранте D_1 имеет вид

$$F(x,y) = \int\limits_0^\infty f_1(\lambda) e^{\lambda x} \sin \lambda y \, d\lambda, \qquad x \le 0, \qquad y < 0 \tag{17}$$

(здесь функция $F(x,y)$ является решением задачи Дирихле в квадранте D_1: $\Delta u = 0$, $u_{|y=0} = 0$, $u_{|x=0} = F(0,y)$, $u(x,y) = O(1)$, полученным методом Фурье).

Представим решение задачи (7), (10), (13) также в виде интегралов Фурье:

$$u_1(x,y) = \int\limits_0^\infty p_1(\lambda) e^{\lambda x} \sin \lambda y \, d\lambda, \qquad x < 0, \qquad y < 0, \tag{18}$$

$$u_2(x,y) = F(x,y) + \int\limits_0^\infty p_2(\lambda) e^{-\lambda x} \sin \lambda y \, d\lambda, \qquad x > 0, \qquad y < 0 \tag{19}$$

с неизвестными коэффициентами $p_i(\lambda)$. Отсюда функции $u_i(x,y)$ удовлетворяют уравнению Лапласа (7) в соответствующем квадранте D_i и граничным условиям (10) (при условии сходимости и дифференцируемости интегралов (18), (19)). Подставляя функции $u_i(x,y)$ (18), (19) (где $F(x,y)$ имеет вид (17)) в условия сопряжения (13) и приравнивая коэффициенты слева и справа при функции $\sin \lambda y$, для функций $p_i(\lambda)$ получим однозначно разрешимую систему алгебраических уравнений вида

$$-(\lambda + b_1)p_1 + (\lambda + b_2)p_2 = (\lambda - b_2)f_1, \qquad p_1 + p_2 = -f_1.$$

Отсюда находим

$$p_1(\lambda) = \left(\frac{\gamma}{\lambda + \gamma} - 1 \right) f_1(\lambda), \qquad p_2(\lambda) = -\frac{\gamma}{\lambda + \gamma} f_1(\lambda), \tag{20}$$

где постоянная

$$\gamma = \frac{b_1 + b_2}{2} > 0. \tag{21}$$

Выразим полученное решение $u_i(x, y)$ (18)–(20) задачи (7), (10), (13) непосредственно через функцию $F(x, y)$ (14), (15). Заменяя в выражении (17) переменную x на $x - t$, умножая полученное равенство на $e^{-\gamma t}$ и интегрируя по $t \in (0, \infty)$, получим формулу

$$\int\limits_0^\infty e^{-\gamma t} F(x - t, y)\, dt = \int\limits_0^\infty \frac{f_1(\lambda) e^{\lambda x} \sin \lambda y}{\lambda + \gamma}\, d\lambda, \qquad x < 0,\ y < 0,$$

где функция $f_1(\lambda)$ имеет вид (16). Отсюда с учётом (17) функции $u_i(x, y)$ (18)–(20) приведём к виду без разложений Фурье:

$$u_1(x, y) = -F(x, y) + \gamma \int\limits_0^\infty e^{-\gamma t} F(x - t, y)\, dt, \qquad x < 0; \tag{22}$$

$$u_2(x, y) = F(x, y) - \gamma \int\limits_0^\infty e^{-\gamma t} F(-x - t, y)\, dt, \qquad x > 0, \tag{23}$$

где γ имеет вид (21). Можно непосредственно проверить, что функции (22), (23) являются решением задачи (7), (10), (13). Подставляя функции $u_i(x, y)$ (22), (23) в формулы (5), (6) и вычисляя соответствующие интегралы по частям, получим решение исходной задачи (1)–(3) в виде

$$\varphi_1(x, y) = (1 - b_1 x)\partial_x F(x, y) +$$

$$+ \left(\gamma b_1 x + \frac{b_1 - b_2}{2}\right) \left[F(x, y) - \gamma \int\limits_0^\infty e^{-\gamma t} F(x - t, y)\, dt\right], \qquad x < 0, \tag{24}$$

$$\varphi_2(x, y) = (b_2 x + 1)[\partial_x F(x, y) + \gamma F(-x, y)] - b_2 F(x, y) -$$

$$-\gamma \left(\gamma b_2 x + \frac{b_1 - b_2}{2}\right) \int\limits_0^\infty e^{-\gamma t} F(-x - t, y)\, dt, \qquad x > 0. \tag{25}$$

Таким образом, решение исходной задачи (1)–(3) выражается через решение $F(x, y)$ задачи Дирихле (14), (15) по формулам (24), (25).

В качестве примера рассмотрим задачу (1)–(3) с кусочно-постоянной граничной функцией вида

$$h(x) = \begin{cases} q, & x \in (\alpha, \beta), \\ 0, & x \notin (\alpha, \beta), \end{cases}$$

где $\alpha > 0$, q – постоянные. В данном случае граничная функция (11) имеет вид

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ c(b_2 x + 1), & 0 < x < \alpha, \\ (x-\beta)q/(b_2\beta + 1), & \alpha < x < \beta, \\ 0, & x > \beta, \end{cases}$$

где

$$c = -\frac{q(\beta - \alpha)}{(b_2\beta + 1)(b_2\alpha + 1)}. \tag{26}$$

При этом функция $H(x)$ ограничена при $x \in R$ для постоянной c (11) вида (26). Решение (15) соответствующей задачи Дирихле (14) строится в конечном виде

$$F(x,y) = \frac{q}{\pi}\left(\frac{U(x-\alpha,y)}{b_2\alpha+1} - \frac{U(x-\beta,y)}{b_2\beta+1} - \frac{(\beta-\alpha)[b_2U(x,y) - \operatorname{arctg} x/y]}{(b_2\alpha+1)(b_2\beta+1)}\right), \tag{27}$$

где гармоническая функция $U(x,y)$ равна

$$U(x,y) = \frac{y}{2}\ln(x^2+y^2) - x\operatorname{arctg}\frac{x}{y}.$$

Отметим, что функция $F(x,y)$ (27) ограничена в бесконечности, т. к. суммарная степень $r^2 = x^2 + y^2$ под знаками логарифмов в (27) при $r \to \infty$ равна нулю. В данном случае решение исходной задачи (1)-(3) строится в однократных квадратурах по формулам (24)–(27).

Список литературы

1. Берс Л. Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики. М.: ИЛ, 1961. 208 с.

2. Домбровский Г. А. О некоторых системах уравнений с частными производными первого порядка и соответствующих обобщённых уравнениях Эйлера – Пуассона – Дарбу // Дифференциальные уравнения. 1978. Т. 14, № 1. С. 121–124.

3. Панько С. В. О представлении решения обобщённого уравнения Эйлера – Пуассона – Дарбу // Дифференциальные уравнения. 1992. Т. 28, № 2. С. 278–281.

4. Положий Г. И. Теория и применение p-аналитических и (p,q)-аналитических функций. Киев: Наукова думка, 1973. 424 с.

5. Хоан Динь Э. Некоторые интегральные представления y^k-аналитических функций и их применение в теории фильтрации в неоднородной среде // Дифференциальные уравнения. 1982. Т. 18, № 3. С. 505–514.

6. Черняев А. П. Построение основных решений обобщённой системы Коши – Римана первого порядка с коэффициентом, зависящим от одной переменной по гипертангенсальному закону // Дифференциальные уравнения. 1981. Т. 17, № 11. С. 2071–2083.

7. Холодовский С. Е. Задачи математической физики в областях с плёночными включениями и плёночными границами: монография. Чита: ЗабГУ, 2017. 235 с.

8. Холодовский С. Е. Метод свертывания разложений Фурье. Случай трещины (завесы) в неоднородном пространстве // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45, № 8. С. 1204–1208.

Статья поступила в редакцию 23.03.2020; принята к публикации 30.04.2020

Библиографическое описание статьи

Холодовский С. Е. О решении задачи Дирихле в полуплоскости для дивергентных уравнений с кусочно-гладкими коэффициентами // Учёные записки Забайкальского государственного университета. 2020. Т. 15, № 3. С. 38–45. DOI: 10.21209/2658-7114-2020-15-3-38-45.

Svyatoslav Ye. Kholodovskii,
Doctor of Physics and Mathematics, Professor,
Transbaikal State University
(30 Aleksandro-Zavodskaya st., Chita, 672039, Russia),
e-mail: hol47@yandex.ru
ORCID: 0000-0002-3983-1384

On the Solution of the Dirichlet Problem in the Half-Plane for Divergent Equations with Piecewise Smooth Coefficients

The first boundary-value problem in a half-plane $y < 0$ consisting of two quadrants $D_1(x < 0)$ and $D_2(x > 0)$, in which the divergence equation has coefficients of the form respectively, $k_1(x) = a(b_1x - 1)^{-2}$ and $k_2(x) = a(b_2x + 1)^{-2}$, is considered. On the line $x = 0$ there are conjugation conditions. This problem simulates the established processes of heat and mass transfer in inhomogeneous media with a continuous permeability function that has a maximum on the line $x = 0$. By the method of convolution of Fourier expansions, the solution of the problem is expressed through the solution of the classical Dirichlet problem in the half-plane for the Laplace equation.

Keywords: boundary value problems, divergence equation, inhomogeneous permeable media, generalized conjugation conditions, method of convolution of Fourier expansions

Translit

1. Bers, L. Matematicheskie voprosy dozvukovoj i okolozvukovoj gazovoj dinamiki. M.: IL, 1961. 208 c.

2. Dombrovskij, G. A. O nekotoryh sistemah uravnenij s chastnymi proizvodnymi pervogo poryadka i sootvetstvuyushchih obobshchennyh uravneniyah Ejlera-Puassona-Darbu // Differencial'nye uravneniya. 1978. T. 14/ № 1. S. 121–124.

3. Pan'ko, S. V. O predstavlenii resheniya obobshchennogo uravneniya Ejlera-Puassona-Darbu // Differencial'nye uravneniya. 1992. T. 28. № 2. S. 278–281.

4. Polozhij, G. I. Teoriya i primenenie p-analiticheskih i (p,q)-analiticheskih funkcij. Kiev: Naukova dumka, 1973. 424 c.

5. Hoan Din', E. Nekotorye integral'nye predstavleniya y^k-analiticheskih funkcij i ih primenenie v teorii fil'tracii v neodnorodnoj srede // Differencial'nye uravneniya. 1982. T. 18. № 3. S. 505–514.

6. Chernyaev, A. P. Postroenie osnovnyh reshenij obobshchennoj sistemy Koshi-Rimana pervogo poryadka s koefficientom, zavisyashchim ot odnoj peremennoj po gipertangensal'nomu zakonu // Differencial'nye uravneniya. 1981. T. 17. № 11. S. 2071–2083.

7. Holodovskij, S. E. Zadachi matematicheskoj fiziki v oblastyah s plenochnymi vklyucheniyami i plenochnymi granicami. Monografiya. Izd-vo ZabGU. CHita 2017. 235 s.

8. Holodovskij, S. E. Metod svertyvaniya razlozhenij Fur'e. Sluchaj treshchiny (zavesy) v neodnorodnom prostranstve // Differencial'nye uravneniya. 2009. T. 45. № 8. S. 1204–1208.

Received: March 23, 2020; accepted for publication April 30, 2020

Reference to article

Kholodovskii S. Ye. On the Solution of the Dirichlet Problem in the Half-Plane for Divergent Equations with Piecewise Smooth Coefficients // Scholarly Notes of Transbaikal State University. 2020. Vol. 15, No 3. PP. 38–45. DOI: 10.21209/2658-7114-2020-15-3-38-45.