УДК 517.956
ББК В143

Галина Михайловна Давиденко,
аспирант,
Забайкальский государственный университет
(Чита, Россия), e-mail: y.g.m@mail.ru

О решении краевых задач на плоскости с параллельными линиями разрыва проницаемости при классическом и обобщённом условиях сопряжения[1]

В работе решена краевая задача для уравнения Лапласа на кусочно-однородной плоскости, состоящей из трёх зон с различной проницаемостью. На границах зон выполняются классические и обобщённые условия сопряжения, соответствующие идеальному контакту и сильно проницаемой трещине. Для решения задачи применяется метод свертывания разложений Фурье, позволяющий выразить искомые потенциалы через заданную гармоническую функцию с сохранением её особых точек.

Ключевые слова: особые точки гармонических функций, уравнение Лапласа, сильно проницаемые трещины, кусочно-однородные зоны, метод свертывания разложений Фурье.

Galina Mikhailovna Davidenko
Graduate Student,
Trans-Baikal State University
(Chita, Russia), e-mail: y.g.m@mail.ru

Solving Boundary Value Problems on the Plane with Parallel Lines of Permeability Discontinuity in Classical and Generalized Conjugation Conditions

This paper solves the boundary value problem for the Laplace equation on a piecewise-homogeneous plane consisting of three zones with different permeability. On the borders of these zones classical and generalized conjunction conditions are executed. They correspond with an ideal contact and a strongly permeable crack. To solve the problem the method of convolution of Fourier expansions is used that allows expressing the potentials of each zone through the given harmonic function with the preservation of its singular points.

Keywords: singular points of harmonic functions, Laplace equation, strongly permeable cracks, piecewise-homogeneous zones, method of convolution of Fourier expansions

Рассмотрим плоскость x, y, состоящую из трёх однородных зон $D_1(x < 0)$, $D_2(0 < x < l)$, $D_3(x > l)$ с различной проницаемостью k_i в D_i. Контакт $x = l$ зон D_2 и D_3 идеальный, а зоны D_1 и D_2 разделены сильно проницаемой трещиной $x = 0$. На данной плоскости рассмотрим установившиеся динамические процессы тепломассопереноса, индуцированные заданными особыми точками (источниками, стоками и т.д.). Рассмотрим случай, когда особые точки расположены в средней зоне $D_2(0 < x < l)$. Пусть известна гармоническая функция $F(x, y)$, имеющая указанные особые точки (при $0 < x < l$). Функция $F(x, y)$ является потенциалом рассматриваемого процесса на однородной плоскости x, y.

Для потенциалов $u_i(x, y)$ в D_i задача имеет вид [2–4]:

$$\Delta u_i = 0, \quad (x, y) \in D_i, \tag{1}$$

$$x = 0: \quad u_1 = u_2, \qquad k_2 \partial_x u_2 - k_1 \partial_x u_1 = A \partial_x^2 u_1, \tag{2}$$

$$x = l: \quad u_2 = u_3, \qquad k_2 \partial_x u_2 = k_3 \partial_x u_3, \tag{3}$$

[1]Работа выполнена в рамках Государственного задания вузу Минобрнауки РФ, № 1.3985.2011.

при этом в окрестности особых точек выполняется условие

$$u_2 \sim F(x,y), \tag{4}$$

т. е. функция $u_2(x,y)$ имеет особые точки функции $F(x,y)$, где $\partial_x^n = \partial^n/\partial x^n$, A – параметр трещины [3; 4], уравнение (1) для функции u_2 выполняется вне особых точек. Частный случай данной задачи при $k_1 = k_2$ рассмотрен в работе [1].

Применяя метод свертывания разложений Фурье [3; 4], выразим решение задачи (1)–(4) непосредственно через заданную гармоническую функцию $F(x,y)$. Предположим сначала, что функции $F(0,y)$ и $F(l,y)$ разлагаются в интегралы Фурье:

$$F(0,y) = \int\limits_0^\infty f_j\sigma_j\,d\lambda, \qquad F(l,y) = \int\limits_0^\infty g_j\sigma_j\,d\lambda,$$

где

$$\sigma_1 = \sin\lambda y, \qquad \sigma_2 = \cos\lambda y,$$

$f_j(\lambda)$ и $g_j(\lambda)$ – коэффициенты Фурье функций $F(0,y)$ и $F(l,y)$. Здесь и ниже по повторяющимся в одной части равенства индексам $j = 1,2$ суммируем. Тогда функция $F(x,y)$ в полуплоскостях $x \le 0$ и $x \ge l$, где она не имеет особых точек, представима в виде

$$F(x,y) = \int\limits_0^\infty e^{\lambda x} f_j\sigma_j\,d\lambda, \quad x \le 0, \tag{5}$$

$$F(x,y) = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda(x-l)} g_j\sigma_j\,d\lambda, \quad x \ge l. \tag{6}$$

Указанные формулы дают решения двух задач Дирихле в полуплоскостях $x \le 0$ и $x \ge l$ с граничными функциями соответственно $F(0,y)$ и $F(l,y)$, полученные методом Фурье. Отметим, что предположения (5), (6) существенно сужают класс особых точек функции $F(x,y)$. В частности фундаментальное решение не разлагается в интегралы Фурье (5), (6).

Представим решение задачи (1)-(4) в виде

$$u_1 = \int\limits_0^\infty e^{\lambda x} a_j\sigma_j\,d\lambda, \quad x \le 0, \tag{7}$$

$$u_2 = F(x,y) + \int\limits_0^\infty (b_j sh\lambda x + d_j ch\lambda x)\sigma_j\,d\lambda, \quad 0 \le x \le l, \tag{8}$$

$$u_3 = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda(x-l)} p_j\sigma_j\,d\lambda, \quad x \ge l. \tag{9}$$

При этом функции u_i удовлетворяют условиям задачи (1), (4). Из условий сопряжения (2), (3) с учётом (5), (6) для параметров a_j, b_j, d_j, p_j получим систему алгебраических уравнений $a_j = f_j + d_j$, $k_2(f_j + b_j) - k_1 a_j = A\lambda a_j$, $g_j + b_j s + d_j c = p_j$, $k_2(-g_j + b_j c + d_j s) = -k_3 p_j$, решение которой имеет вид

$$a_j = \frac{k_2(k_3+k_2)e^{\lambda l}}{r} f_j - \frac{k_2(k_3-k_2)}{r} g_j,$$

$$b_j = \frac{(A\lambda + k_1 - k_2)(k_3 c + k_2 s)}{r} f_j - \frac{(A\lambda + k_1)(k_3 - k_2)}{r} g_j,$$

$$d_j = -\frac{(A\lambda + k_1 - k_2)(k_3 s + k_2 c)}{r} f_j - \frac{k_2(k_3 - k_2)}{r} g_j,$$

$$p_j = -\frac{k_2(A\lambda + k_1 - k_2)}{r} f_j + \frac{k_2(A\lambda + k_1 + k_2)e^{\lambda l}}{r} g_j,$$

где

$$r = k_2(k_3 c + k_2 s) + (A\lambda + k_1)(k_3 s + k_2 c), \tag{10}$$

$s = \operatorname{sh} \lambda l$, $c = \operatorname{ch} \lambda l$. Отсюда решение (7)–(9) задачи (1)–(4) примет вид

$$u_1 = k_2 \int\limits_0^\infty \frac{(k_2 + k_3)e^{\lambda(x+l)} f_j - (k_3 - k_2)e^{\lambda x} g_j}{r} \sigma_j \, d\lambda, \tag{11}$$

$$u_2 = F(x, y) + \int\limits_0^\infty \left\{ \frac{(A\lambda + k_1 - k_2)[k_3 \operatorname{sh} \lambda(x - l) - k_2 \operatorname{ch} \lambda(x - l)] f_j}{r} - \right.$$

$$\left. - \frac{(k_3 - k_2)[(A\lambda + k_1) \operatorname{sh} \lambda x + k_2 \operatorname{ch} \lambda x] g_j}{r} \right\} \sigma_j d\lambda, \tag{12}$$

$$u_3 = k_2 \int\limits_0^\infty \frac{(A\lambda + k_1 + k_2)e^{-\lambda(x-2l)} g_j - (A\lambda + k_1 - k_2)e^{-\lambda(x-l)} f_j}{r} \sigma_j d\lambda. \tag{13}$$

Полученное решение содержит двукратные квадратуры (внешние и внутренние в коэффициентах Фурье f_j, g_j) от сильно осциллирующих тригонометрических функций. Кроме того, как отмечалось, это решение справедливо для достаточно узкого класса гармонических функций $F(x, y)$. Приведём формулы (11)–(13) к виду, не содержащему разложений Фурье. Разлагая дробь $1/r$ (10) в геометрическую прогрессию со знаменателем q, получим

$$\frac{1}{r} = \frac{2e^{-\lambda l}}{A(k_2 + k_3)(\lambda + \gamma)(1 - q)} = \frac{2}{A(k_2 + k_3)} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2\lambda n l - \lambda l} \mu^n \frac{(\lambda + \nu)^n}{(\lambda + \gamma)^{n+1}}, \tag{14}$$

где

$$q = e^{-2\lambda l} \mu \frac{\lambda + \nu}{\lambda + \gamma}, \quad \mu = \frac{k_3 - k_2}{k_3 + k_2}, \quad \nu = \frac{k_1 - k_2}{A}, \quad \gamma = \frac{k_1 + k_2}{A}.$$

при этом $|q(\lambda)| < 1$ при $0 \le \lambda < \infty$. Из равенств (5), (6) следует

$$F(x - t, y) = \int\limits_0^\infty e^{\lambda(x-t)} f_j \sigma_j \, d\lambda, \qquad F(l - x + t, y) = \int\limits_0^\infty e^{\lambda(x-t)} g_j \sigma_j \, d\lambda, \quad x \le 0.$$

Отсюда, аналогично статье [5], подучим формулы

$$\frac{(-1)^k}{n!} \int\limits_0^\infty e^{-\delta t} t^n \partial_t^k [e^{-\nu t} F(x - t, y)] \, dt = \int\limits_0^\infty \frac{(\lambda + \nu)^k}{(\lambda + \gamma)^{n+1}} e^{\lambda x} f_j \sigma_j \, d\lambda,$$

$$\frac{(-1)^k}{n!} \int\limits_0^\infty e^{-\delta t} t^n \partial_t^k [e^{-\nu t} F(-x + l + t, y)] \, dt = \int\limits_0^\infty \frac{(\lambda + \nu)^k}{(\lambda + \gamma)^{n+1}} e^{\lambda x} g_j \sigma_j \, d\lambda, \quad x \le 0,$$

где постоянная

$$\delta = \gamma - \nu = \frac{2k_2}{A} > 0.$$

Тогда с учётом (14) функции u_i (11)–(13) выражаются непосредственно через заданную гармоническую функцию $F(x, y)$ (без разложений Фурье):

$$u_1 = \delta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\mu)^n}{n!} \int_0^{\infty} e^{-\delta t} t^n \partial_t^n \left\{ e^{-\nu t} [F(x - 2nl - t, y) - \mu F(-x + 2nl + 2l + t, y)] \right\} dt, \tag{15}$$

$$u_2 = F(x, y) - \mu F(-x + 2l, y) -$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\mu)^n}{n!} \int_0^{\infty} e^{-\delta t} t^n \partial_t^{n+1} \left\{ e^{-\nu t} [\mu F(x - 2nl - 2l - t, y) - F(-x - 2nl - t, y) - \right.$$

$$\left. - \mu^2 F(-x + 2nl + 4l + t, y) + \mu F(x + 2nl + 2l + t, y)] \right\} dt, \tag{16}$$

$$u_3 = (1 - \mu) F(x, y) - (1 - \mu) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\mu)^n}{n!} \int_0^{\infty} e^{-\delta t} t^n \partial_t^{n+1} \left\{ e^{-\nu t} [\mu F(x + 2nl + 2l + t, y) - \right.$$

$$\left. - F(-x - 2nl - t, y)] \right\} dt. \tag{17}$$

В силу теоремы, доказанной в [6], ряды (15)–(17) сходятся для класса гармонических функций $F(x, y)$, удовлетворяющих условию

$$|\partial_x^m [e^{-\nu x} F(x, y)]| < c \alpha^m e^{\alpha |x|}, \qquad |x| \to \infty, \tag{18}$$

где $0 < \alpha < \alpha_0$, $\alpha_0 (1 + e^{(\alpha_0 + \nu) l}) = \delta$.

Формулы (15)–(17) в отличие от формул (11)–(13), полученных методом Фурье, содержат однократные квадратуры от гладких функций без осцилляций. Кроме того, эти формулы справедливы для более широкого класса особых точек (18), индуцирующих процесс, включая фундаментальное решение типа источника.

Список литературы

1. Давиденко Г. М. О построении особых точек потенциалов на плоскости с классическим и обобщённым условиями сопряжения на двух параллельных прямых // Математический анализ и его приложения. Вып. 10. Забайкал. гос. гум.-пед. ун-т. Чита, 2011. С. 20–27.

2. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 735 с.

3. Холодовский С. Е. Метод свёртывания разложений Фурье в решении краевых задач с пересекающимися линиями сопряжения // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2007. Т. 47. № 9. С. 1550–1556.

4. Холодовский С. Е. Метод свёртывания разложений Фурье. Случай обобщённых условий сопряжения типа трещины (завесы) в кусочно-неоднородных средах // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 6. С. 855–859.

5. Холодовский С. Е. О решении краевых задач в полупространстве, ограниченном многослойной плёнкой // Учёные записки Забайкальского государственного гуманитарно-педагогического университета. Серия «Физика, математика, техника, технология». № 3 (38). Чита. 2011. С. 160–164.

6. Холодовский С. Е. О решении краевых задач в цилиндрах с двумя параллельными трещинами // Математический анализ и его приложения. Вып. 10. Забайкальский государственный гуманитарно-педагогический университет. Чита, 2011. С. 56–62.

Статья поступила в редакцию 13.03.2012 г.