УДК 517.956
ББК В143

Ирина Анатольевна Гуримская,
аспирант,
Южно-Якутский институт железнодорожного транспорта
(Нерюнгри, Россия), e-mail: gurim567@rambler.ru

О решении задачи Дирихле в неоднородной полуплоскости[1]

Рассмотрена первая краевая задача в полуплоскости для дивергентного уравнения с функциональными коэффициентами, зависящими от двух переменных. Функция проницаемости в полуплоскости возрастает при удалении от осей координат по квадратичным законам. Используя метод свертывания разложений Фурье, решение задачи выражено в однократных квадратурах через решение классической задачи Дирихле для уравнения Лапласа в однородной полуплоскости.

Ключевые слова: краевые задачи, метод свертывания разложений Фурье, неоднородная полуплоскость.

Irina Anatolyevna Gurimskaya,
Graduate Student,
South Yakutiya Institute of Railway Transport
(Neryungri, Russia), e-mail: gurim567@rambler.ru

Solving the Dirichlet Problem in the Inhomogeneous Half-plane

The article considers the first boundary value problem on the half-plane for the divergence equation with functional coefficients depending on two variables. The function of permeability in the half-plane increases with the distance from the axes of a quadratic law. Using the method of convolution of Fourier expansions, the solution is expressed in single quadratures through the solution of the classical Dirichlet problem for the Laplace equation in the homogeneous half-plane.

Keywords: boundary value problems, method of convolution of Fourier expansions, inhomogeneous half-plane.

Рассмотрим неоднородную полуплоскость $D(x > 0, y \in R)$, состоящую из двух квадрантов $D_1(x > 0, y < 0)$ и $D_2(x > 0, y > 0)$ с функциональной проницаемостью $K_1(x, y) = k(px+1)^2(q_1y-1)^2$ в D_1 и $K_2(x, y) = k(px + 1)^2(q_2y + 1)^2$ в D_2, где постоянные $k, p, q_i > 0$, т.е. нули функций проницаемости $K_i(x, y)$ лежат вне соответствующей зоны D_i. В данном случае функция проницаемости на границе $x = 0$ зон D_i непрерывна и во всей полуплоскости $D(x > 0)$ для каждого фиксированного x имеет минимум при $y = 0$. Для потенциалов $\varphi_i(x, y)$ в D_i рассмотрим первую краевую задачу с неоднородным граничным условием на внешней границе D_2, что не умаляет общности:

$$(q_1y - 1)^2\partial_x[(px + 1)^2\partial_x\varphi_1] + (px + 1)^2\partial_y[(q_1y - 1)^2\partial_y\varphi_1] = 0, \tag{1}$$

$$(q_2y + 1)^2\partial_x[(px + 1)^2\partial_x\varphi_2] + (px + 1)^2\partial_y[(q_2y + 1)^2\partial_y\varphi_2] = 0, \tag{2}$$

$$\varphi_{1|x=0} = 0, \qquad \varphi_{2|x=0} = h(y), \tag{3}$$

$$y = 0: \qquad \varphi_1 = \varphi_2, \qquad \partial_y\varphi_1 = \partial_y\varphi_2, \tag{4}$$

где $\partial_x^n = \partial^n/\partial x^n$. Классические условия сопряжения (4) выражают непрерывность потенциала и нормальной скорости на общей границе зон D_i.

Представим решение задачи (1)–(4) в виде [1, с. 220]

[1]Работа выполнена в рамках Государственного задания вузу Минобрнауки РФ, № 1.3985.2011

$$\varphi_1(x,y)=\frac{u_1(x,y)}{(px+1)(q_1y-1)}\,,\qquad \varphi_2(x,y)=\frac{u_2(x,y)}{(px+1)(q_2y+1)}\,. \tag{5}$$

Отсюда для функций $u_i(x,y)$ получим задачу Дирихле относительно уравнения Лапласа с неклассическими условиями сопряжения:

$$\Delta u_i=0,\qquad i=1,2,\qquad u_{1|x=0}=0,\qquad u_{2|x=0}=h_1(y), \tag{6}$$

$$y=0:\qquad -u_1=u_2,\qquad -\partial_y u_1-q_1u_1=\partial_y u_2-q_2u_2, \tag{7}$$

где $h_1(y)=h(y)(q_2y+1)$, $\Delta=\partial_x^2+\partial_y^2$.

Наряду с данной задачей рассмотрим задачу Дирихле в однородной полуплоскости $D(x>0)$ относительно уравнения Лапласа с сохранением граничной функции (6):

$$\Delta f=0,\qquad f_{|x=0}=\begin{cases}h_1(y), & y>0\\ 0, & y<0\end{cases}. \tag{8}$$

Решение классической задачи (8) строится по формуле Пуассона [2, с. 327]:

$$f(x,y)=\frac{x}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{h_1(t)\,dt}{x^2+(y-t)^2}\,.$$

Отметим, что последний интеграл для широкого класса кусочно-непрерывных граничных функций $h_1(y)$, составленных из многочленов, вычисляется в конечном виде. Далее функцию $f(x,y)$ считаем заданной функцией.

Методом свертывания разложений Фурье [4; 5] выразим решение задачи (6), (7) через функцию $f(x,y)$. Пусть функция $f(x,0)$ на полуоси $x>0$ разлагается в интеграл Фурье по синусам:

$$f(x,0)=\int\limits_0^\infty g(x,\lambda)\,d\lambda,\qquad g(x,\lambda)=f_1(\lambda)\sin\lambda x, \tag{9}$$

где

$$f_1(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty f(x,0)\sin\lambda x\,dx.$$

При этом функция $f(x,0)$ должна удовлетворять условию $f(x,0)\to 0$ при $x\to\infty$ [3, с. 529]. Отсюда функция $f(x,y)$ в квадранте $D_1(x>0,y<0)$, где эта функция удовлетворяет однородному граничному условию (8), представима в виде

$$f(x,y)=\int\limits_0^\infty e^{\lambda y}g\,d\lambda,\qquad y<0. \tag{10}$$

Последний интеграл представляет собой решение задачи Дирихле в квадранте $D_1(x>0,y<0)$ вида $\Delta u=0$, $u_{|y=0}=f(x,0)$, $u_{|x=0}=0$, полученное методом Фурье, при этом функция $f(x,y)$ также является решением этой задачи.

Представим решение задачи (6), (7) в виде разложений Фурье:

$$u_1=\int\limits_0^\infty a_1e^{\lambda y}g\,d\lambda,\qquad y<0, \tag{11}$$

$$u_2 = f(x,y) + \int\limits_0^\infty a_2 e^{-\lambda y} g\, d\lambda, \qquad y > 0, \tag{12}$$

где функция $g(x,\lambda)$ равна (9). Функции $u_i(x,y)$ удовлетворяют условиям (6) при условии сходимости интегралов (11), (12). Из условий сопряжения (7) с учётом разложения (10) для параметров a_i получим систему алгебраических уравнений

$$a_1 + a_2 = -1, \qquad -a_1(\lambda + q_1) = \lambda(1 - a_2) - q_2(1 + a_2),$$

решение которой имеет вид

$$a_1 = -1 + \frac{\gamma}{\lambda + \gamma}, \qquad a_2 = -\frac{\gamma}{\lambda + \gamma},$$

где

$$\gamma = \frac{q_1 + q_2}{2}. \tag{13}$$

Отсюда решение (11), (12) задачи (6), (7) с учётом разложения (10) примет вид

$$u_1 = -f(x,y) + \gamma \int\limits_0^\infty \frac{e^{\lambda y} g}{\lambda + \gamma}\, d\lambda, \qquad y < 0, \tag{14}$$

$$u_2 = f(x,y) - \gamma \int\limits_0^\infty \frac{e^{-\lambda y} g}{\lambda + \gamma}\, d\lambda, \qquad y > 0. \tag{15}$$

Отметим, что полученное решение содержит двукратные квадратуры от сильно осциллирующих тригонометрических функций (9), что затрудняет практическое использование полученных решений.

Из разложения функции $f(x,y)$ (10) следует формула, указанная в работах [4, 5]:

$$\int\limits_0^\infty e^{-\gamma t} f(x, y - t) dt = \int\limits_0^\infty \frac{e^{\lambda y} g}{\lambda + \gamma}\, d\lambda, \qquad y < 0.$$

Отсюда функции (14), (15) непосредственно выражаются через заданную функцию $f(x,y)$ в однократных квадратурах без разложений Фурье:

$$u_1 = -f(x,y) + \gamma \int\limits_0^\infty e^{-\gamma t} f(x, y - t) dt, \qquad y < 0, \tag{16}$$

$$u_2 = f(x,y) - \gamma \int\limits_0^\infty e^{-\gamma t} f(x, -y - t) dt, \qquad y > 0, \tag{17}$$

где постоянная γ имеет вид (13). Решение исходной задачи (1)–(4) строится по формулам (5), (16), (17).

Список литературы

1. Положий Г. Н. Обобщение теории аналитических функций комплексного переменного. Киев: Изд-во Киевского ун-та. 1965. 442 с.

2. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 735 с.

3. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3. М.: Наука, 1962. 656 с.

4. Холодовский С. Е. Метод свертывания разложений Фурье. Случай обобщённых условий сопряжения типа трещины (завесы) в кусочно-неоднородных средах // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 6. С. 855–859.

5. Холодовский С. Е. Метод свертывания разложений Фурье. Случай трещины (завесы) в неоднородном пространстве // Дифференциальные уравнения. Т. 45. № 8. 2009. С. 1204–1208.

Статья поступила в редакцию 18.02.2012 г.