УДК 517.956
ББК В143

Ирина Анатольевна Ефимова
кандидат физико-математических наук, доцент,
Забайкалький институт предпринимательства
Сибирского университета потребительской кооперации
(Чита, Россия), e-mail: hol47@yandex.ru

Об эффективном решении первых краевых задач в кусочно-однородных круговых областях[1]

Рассмотрены первые краевые задачи в круге, состоящем из двух зон с различной проницаемостью, когда зоны разделены окружностью. Методом свертывания разложений Фурье решение задачи выражено в виде быстросходящихся рядов через решение классической задачи Дирихле в однородном круге.

Ключевые слова: краевые задачи, кусочно-однородный круг, метод свёртывания разложений Фурье.

Irina Anatolyevna Efimova
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor,
Transbaikalian Institute of Entrepreneurship of Siberian University of Consumer Cooperation,
(Chita, Russia), e-mail: hol47@yandex.ru

On the Efficient Solution of the First Boundary Value Problems in Piecewise Homogeneous Circular Domains

The paper considers the first boundary value problems in the disk consisting of two zones with different permeability when the zones are separated by a circle. With the help of the method of convolution of Fourier expansions, the solution of the problem is expressed in the form of rapidly converging series in terms of the classical solution of the Dirichlet problem in the homogeneous circle.

Keywords: boundary value problems, piecewise homogeneous circle, method of convolution of Fourier expansions.

Композитные материалы находят всё более широкое применения в промышленности, строительстве и т. д. Поэтому имеет большой интерес исследование динамических процессов теплопроводности, фильтрации, диффузии и т.д. в кусочно-однородных средах. Математические модели указанных процессов приводят к краевым задачам математической физики. При этом среди аналитических методов наибольший интерес представляют методы, позволяющие строить эффективные решения краевых задач в достаточно простом виде, допускающем численные расчёты.

Рассмотрим в кусочно-однородном круге $D(r < l)$, $l > 1$, состоящем из круга $D_1(r < 1)$ и кольца $D_2(1 < r < l)$, $0 < \alpha < 2\pi$, для потенциалов u_i в D_i первую краевую задачу

$$r\partial_r(r\partial_r u_i) + \partial_\alpha^2 u_i = 0, \qquad (r,\alpha) \in D_i; \qquad u_{2|r=l} = f(\alpha), \tag{1}$$

$$r = 1: \qquad u_1 = u_2, \qquad k_1\partial_r u_1 = k_2\partial_r u_2, \tag{2}$$

где $\partial_r^n = \partial^n/\partial r^n$; r, α – полярные координаты, k_i – проницаемость зоны D_i. Наряду с данной задачей рассмотрим классическую задачу Дирихле в однородном круге $r < l$ с сохранением граничной функции $f(\alpha)$ (1) вида

$$r\partial_r(r\partial_r F) + \partial_\alpha^2 F = 0, \qquad r < l; \qquad F_{|r=l} = f(\alpha). \tag{3}$$

[1]Работа выполнена в рамках Государственного задания вузу Минобрнауки РФ, № 1.3985.2011.

Решение $F(r,\alpha)$ задачи (3) строится по формуле Пуассона [1; 2]:

$$F(r,\alpha) = \frac{l^2 - r^2}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{f(\xi)d\xi}{l^2 + r^2 - 2lr\cos(\alpha - \xi)}, \tag{4}$$

и для широкого класса граничных функций $f(\alpha)$ функция $F(r,\alpha)$ вычисляется в конечном виде. Поэтому будем считать функцию $F(r,\alpha)$ (4) известной.

Методом работ [3; 4] выразим решение задачи (1), (2) непосредственно через заданную функцию $F(r,\alpha)$. Разложим граничную функцию $f(\alpha)$ в ряд Фурье:

$$f(\alpha) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} g_m(\alpha), \qquad g_m(\alpha) = a_m \cos m\alpha + b_m \sin m\alpha, \tag{5}$$

где a_m, b_m – коэффициенты Фурье:

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(\alpha) \cos m\alpha \, d\alpha, \qquad m = 0, 1, ...,$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(\alpha) \sin m\alpha \, d\alpha, \qquad m = 1, 2, \dots . \tag{6}$$

Решая задачу Дирихле (3) методом Фурье, представим заданную функцию $F(r,\alpha)$ в круге $r \le l$ в виде разложения Фурье:

$$F(r,\alpha) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{r}{l}\right)^m g_m(\alpha), \qquad r \le l, \tag{7}$$

где функция $g_m(\alpha)$ имеет вид (5). Аналогично, применяя метод Фурье, представим решение задачи (1), (2) в виде

$$u_1(r,\alpha) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} c_m r^m g_m(\alpha), \qquad r < 1, \tag{8}$$

$$u_2(r,\alpha) = F(r,\alpha) + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} p_m \left[\left(\frac{r}{l}\right)^m - \left(\frac{l}{r}\right)^m\right] g_m(\alpha), \qquad 1 < r < l, \tag{9}$$

где c_m, p_m – искомые параметры, при этом функции $u_i(r,\alpha)$ удовлетворяют условиям (1). Из условий сопряжения (2) с учётом разложения (7) найдем параметры c_m, p_m в виде

$$c_m = \frac{k_2}{d_m}, \qquad p_m = \frac{l^{-m}(k_1 - k_2)}{d_m},$$

где

$$d_m = \frac{(k_1 + k_2)l^m - (k_1 - k_2)l^{-m}}{2}. \tag{10}$$

Таким образом, решение задачи (1), (2) имеет вид разложений Фурье (8)–(10). Полученное решение содержит квадратуры (6) в функциях $g_m(\alpha)$ (5) и ряды (8), (9) от сильно осциллирующих тригонометрических функций, что вызывает трудности при численных расчётах.

Приведём полученные формулы (8), (9) к виду, не содержащему разложений Фурье. Разложим дробь $1/d_m$ (10) в геометрическую прогрессию:

$$\frac{1}{d_m} = \frac{2l^{-m}}{(k_1+k_2)(1-q_m)} = \frac{2}{k_1+k_2}\sum_{n=0}^{\infty}\nu^n l^{-(2n+1)m},$$

где

$$q_m = \nu l^{-2m}, \qquad \nu = \frac{k_1-k_2}{k_1+k_2},$$

при этом учитываем неравенства $|q_m| < 1$. Отсюда функции u_i (8), (9) с учётом (10) примут вид

$$u_1 = \frac{a_0}{2} + (1-\nu)\sum_{n=0}^{\infty}\nu^n\sum_{m=1}^{\infty}\left(l^{-2n-1}r\right)^m g_m(\alpha), \tag{11}$$

$$u_2 = F(r,\alpha) + \sum_{n=0}^{\infty}\nu^{n+1}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\left(rl^{-2n-3}\right)^m - \left(r^{-1}l^{-2n-1}\right)^m\right] g_m(\alpha). \tag{12}$$

Из разложения заданной функции $F(r,\alpha)$ (7) следует равенство

$$\sum_{m=1}^{\infty}\rho^m g_m(\alpha) = -\frac{a_0}{2} + F(l\rho,\alpha), \qquad \rho \le 1.$$

Отсюда решение (11), (12) задачи (1), (2) непосредственно выражается через решение $F(r,\alpha)$ задачи Дирихле (3) (без разложений Фурье):

$$u_1(r,\alpha) = (1-\nu)\sum_{n=0}^{\infty}\nu^n F(l^{-2n}r,\alpha), \qquad r < 1, \tag{13}$$

$$u_2(r,\alpha) = F(r,\alpha) + \sum_{n=0}^{\infty}\nu^{n+1}\left[F(rl^{-2n-2},\alpha) - F(r^{-1}l^{-2n},\alpha)\right], \qquad 1 < r < l. \tag{14}$$

Можно непосредственно проверить, что ряды (13), (14) сходятся и функции $u_i(r,\alpha)$ удовлетворяют условиям задачи (1), (2). Полученное решение, в отличие от (8), (9), не содержит квадратур и имеет вид быстросходящихся рядов со скоростью геометрических прогрессий.

Отметим, что по найденным функциям (13), (14) методом конформных отображений, осуществляемых дробно-линейными функциями, можно решать первые краевые задачи в круговых областях с неконцентрическим круговым включением, а также в полуплоскости с круговым включением.

Список литературы

1. Арсенин В. Я. Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1974. 431 с.

2. Тихонов А. Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.

3. Холодовский С. Е. Метод свертывания разложений Фурье. Случай обобщённых условий сопряжения типа трещины (завесы) в кусочно-неоднородных средах // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 6. С. 855–859.

4. Холодовский С. Е. Метод свертывания разложений Фурье. Случай трещины (завесы) в неоднородном пространстве // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 8. С. 1204–1208.

Статья поступила в редакцию 26.02.2012 г.