УДК 517.956
ББК В143

***Наталья Владимировна Игнатьева,***
*аспирант,*
*Забайкальский государственный университет*
*(Чита, Россия), e-mail: Ignatievanatalia@mail.ru*

## О решении задачи Неймана в кусочно-однородных криволинейных областях со слабо проницаемой плёнкой в виде луча[5]

Решена задача Неймана для уравнения Лапласа в кусочно-однородной области, ограниченной одной ветвью гиперболы и состоящей из двух симметричных зон с различной проницаемостью. Линия раздела однородных зон состоит из отрезка с идеальным контактом зон и луча в виде слабо проницаемой пленки. Указанный контакт разнородных сред имеет место при неравномерных внешних воздействиях. С помощью метода свертывания разложений Фурье решение задачи выражено через решение классической задачи Неймана в однородной полуплоскости.

*Ключевые слова*: уравнение Лапласа, краевая задача Неймана, слабо проницаемая пленка, метод свертывания разложений Фурье.

***Natalia Vladimirovna Ignatyeva,***
*Graduate Student,*
*Trans-Baikal State University*
*(Chita, Russia), e-mail: Ignatievanatalia@mail.ru*

## Solving the Neumann Problem in Piecewise-homogeneous Curved Areas with a Weakly Permeable Film as a Beam

The article solves the Neumann problem for the Laplace equation in a piecewise-homogeneous region bounded by one branch of a hyperbola, and consisting of two symmetrical zones with different permeability. The line between the homogeneous zones consists of a segment with the ideal zones contact and the beam in the form of a weakly permeable film. The specified contact of heterogeneous environments takes place in case of non-uniform external forces. Using the method of convolution of Fourier expansions, the solution is expressed through the solution of the classical Neumann problem in a homogeneous half-plane.

*Keywords*: Laplace equation, Neumann boundary value problem, weakly permeable film, method of convolution of Fourier expansions.

Рассмотрим на плоскости $z = x + iy$ область $D$, ограниченную одной из ветвей гиперболы $L: x^2(\sin l)^{-2} - y^2(\cos l)^{-2} = 1$, $-\pi/2 < l < \pi/2$ и разделенную прямой $y = 0$ на две симметричные однородные зоны $D_1(x > \sin l, y < 0)$ и $D_2(x > \sin l, y > 0)$ проницаемости $k_j$ в $D_j$, когда луч $L_1(x > 1, y = 0)$ (т.е. часть общей границы зон $D_j$) является слабо проницаемой завесой, а на отрезке $L_0(\sin l < x < 1, y = 0)$ контакт зон $D_j$ идеальный. В данном случае имеет место сложный контак зон $D_j$, что на практике соответствует контакту разнородных сред при неравномерных внешних воздействиях (при неравномерной деформации, неравномерном тепловом режиме и т. д.). Отметим, что при $l \in (-\pi/2, 0)$ гипербола $L$ выпукла вправо, а при $l \in (0, \pi/2)$ гипербола $L$ выпукла влево, при этом в обоих случаях область $D$ расположена справа от гиперболы $L$. При $l = 0$ область $D$ является правой полуплоскостью.

Рассмотрим в области $D = D_1 \cup D_2$ задачу Неймана относительно уравнения Лапласа, для постановки которой перейдем к эллиптическим координатам:

$$x = \sin\xi \operatorname{ch}\eta, \qquad y = \cos\xi \operatorname{sh}\eta. \tag{1}$$

Аналитическая функция $z = \sin\zeta$ конформно отображает полосу $G(l < \xi < \pi/2, -\infty < \eta < \infty)$ вспомогательной плоскости $\zeta = \xi + i\eta$ на рассматриваемую область $D$ с разрезом в виде луча $L_1(x > 1, y = 0)$ [1]. При этом прямая $\xi = \pi/2$ отображается в дважды пробегаемый луч $L_1$ разреза,

[5]Работа выполнена в рамках Государственного задания вузу Минобрнауки РФ, № 1.3985.2011.

полуполосы $G_1(\eta < 0)$ и $G_2(\eta > 0)$, $l < \xi < \pi/2$ отображаются соответственно в зоны $D_1(y < 0)$ и $D_2(y > 0)$, прямая $\xi = l$ – в границу области $D$, т. е. в гиперболу $L$, отрезок $\eta = 0$ $(l < \xi < \pi/2)$ – в отрезок $L_0(\sin l < x < 1, y = 0)$.

В эллиптических координатах $\xi, \eta$ (1) или тоже самое в декартовых координатах вспомогательной плоскости $\zeta = \xi + i\eta$ задача имеет вид [2–5]:

$$\partial_\xi^2 u_j + \partial_\eta^2 u_j = 0, \qquad (\xi, \eta) \in G_j, \qquad j = 1, 2, \tag{2}$$

$$\partial_\xi u_{1|\xi=l} = 0, \qquad \partial_\xi u_{2|\xi=l} = f(\eta), \tag{3}$$

$$\eta = 0: \qquad u_1 = u_2, \qquad k_1 \partial_\eta u_1 = k_2 \partial_\eta u_2, \tag{4}$$

$$u_2(p, \eta) - u_1(p, -\eta) = Bk_1 \partial_\xi u_1(p, -\eta), \qquad k_2 \partial_\xi u_2(p, \eta) + k_1 \partial_\xi u_1(p, -\eta) = 0, \tag{5}$$

где $\partial_\xi^n = \partial^n / \partial \xi^n$, $p = \pi/2$. Условия (4) являются классическими условиями сопряжения на идеальном контакте. Условия (5) соответствуют обобщённым условиям сопряжения на завесе, при этом разрезом $L_1$ можно пренебречь [5]. Отметим, что решение задачи (2)–(5) определяется с точностью до аддитивной постоянной, одинаковой для функций $u_i$.

Представим решение задачи (2)–(5) в виде

$$u_1(\xi, \eta) = \frac{2k_2}{k_1 + k_2} \varphi(\xi, \eta), \qquad u_2(\xi, \eta) = \varphi(\xi, \eta) + \frac{k_2 - k_1}{k_1 + k_2} \varphi(\xi, -\eta), \tag{6}$$

при этом функции (6) тождественно удовлетворяют классическим условиям сопряжения (4). Отсюда для функции $\varphi(\xi, \eta)$ получим задачу в однородной полосе $G(l < \xi < p, \eta \in R)$ вида

$$\partial_\xi^2 \varphi + \partial_\eta^2 \varphi = 0, \qquad \partial_\xi \varphi_{|\xi=l} = \begin{cases} f(\eta), & \eta > 0 \\ 0 & \eta < 0 \end{cases}, \tag{7}$$

$$\varphi(p, \eta) - \varphi(p, -\eta) = \frac{2}{\gamma} \partial_\xi \varphi(p, -\eta), \qquad \partial_\xi \varphi(p, \eta) + \partial_\xi \varphi(p, -\eta) = 0, \tag{8}$$

где

$$\gamma = \frac{k_1 + k_2}{Bk_1 k_2}. \tag{9}$$

Решение задачи (7), (8) также определяется с точностью до аддитивной постоянной.

Наряду с данной задачей рассмотрим классическую задачу Неймана в однородной полуплоскости $\xi > l$, $\eta \in R$:

$$\partial_\xi^2 F + \partial_\eta^2 F = 0, \qquad \partial_\xi F_{|\xi=l} = \begin{cases} f(\eta), & \eta > 0 \\ 0 & \eta < 0 \end{cases}, \tag{10}$$

решение которой строится методом функции Грина [2] и далее считается известной функцией $F(\xi, \eta)$.

Методом свертывания разложений Фурье [3; 4] выразим решение задачи (7), (8) непосредственно через функцию $F(\xi, \eta)$. Предположим сначала, что функция $F(l, \eta)$ разлагается в интеграл Фурье с коэффициентами Фурье $g_i(\lambda)$:

$$F(l, \eta) = \int_0^\infty g_i \sigma_i d\lambda, \qquad \sigma_1 = \sin \lambda\eta, \qquad \sigma_2 = \cos \lambda\eta. \tag{11}$$

Здесь и ниже по повторяющимся в одной части равенства индексам $i = 1, 2$ суммируем. Отсюда, решая задачу Дирихле в полуплоскости $\xi \geq l$ с граничной функцией $F(l, \eta)$ методом Фурье, представим функцию $F(\xi, \eta)$ в виде

$$F(\xi, \eta) = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda(\xi - l)} g_i \sigma_i d\lambda, \qquad \xi \geq l. \tag{12}$$

Решение задачи (7), (8) будем искать в виде

$$\varphi(\xi, \eta) = F(\xi, \eta) + \int\limits_0^\infty \operatorname{ch} \lambda(\xi - l) a_i \sigma_i d\lambda, \qquad l < \xi < p, \tag{13}$$

где $a_i(\lambda)$ – неизвестные параметры, при этом функция (13) удовлетворяет условиям задачи (7). Приравнивая в условиях сопряжения (8) коэффициенты при функциях $\sigma_j$, с учётом разложения (12) для двух параметров $a_i$ получим систему четырёх алгебраических уравнений, два из которых выполняются тождественно. Отсюда находим

$$a_1 = \frac{e^{-\lambda r}(\lambda - \gamma) g_1}{\lambda \operatorname{sh} \lambda r + \gamma \operatorname{ch} \lambda r}, \qquad a_2 = \frac{e^{-\lambda r} g_2}{\operatorname{sh} \lambda r},$$

где $r = p - l$, при этом $a_2 \to \infty$ при $\lambda \to 0$, т. е. при формальной подстановке коэффициентов $a_i$ в выражение (13) получим расходящийся интеграл. Подберём аддитивную постоянную для функции $\varphi$ (13) так, чтобы результирующий интеграл сходился. Отсюда функция $\varphi$ (13) примет вид

$$\varphi = F(\xi, \eta) + \int\limits_0^\infty e^{-\lambda r} \left[ \frac{(\lambda - \gamma) g_1 \operatorname{ch} \lambda(\xi - l) \sigma_1}{\lambda \operatorname{sh} \lambda r + \gamma \operatorname{ch} \lambda r} + \frac{g_2 \operatorname{ch} \lambda(\xi - l) \sigma_2 - g_2}{\operatorname{sh} \lambda r} \right] d\lambda, \tag{14}$$

где функции $\sigma_i(\eta, \lambda)$ имеют вид (11), при этом полученный интеграл сходится и функция $\varphi$ (14) удовлетворяет условиям задачи (7), (8), что проверяется непосредственно.

Приведём функцию (14) к виду, не содержащему разложений Фурье. Разложим дроби (14) в геометрические прогрессии

$$\frac{1}{\operatorname{sh} \lambda r} = \frac{2e^{-\lambda r}}{1 - e^{-2\lambda r}} = 2 \sum_{n=0}^\infty e^{-\lambda r(2n+1)},$$

$$\frac{\lambda - \gamma}{\lambda \operatorname{sh} \lambda r + \gamma \operatorname{ch} \lambda r} = \frac{2e^{-\lambda r}(\lambda - \gamma)}{(\lambda + \gamma)(1 - q)} = 2 \sum_{n=0}^\infty \left( \frac{\lambda - \gamma}{\lambda + \gamma} \right)^{n+1} e^{-\lambda r(2n+1)},$$

где

$$q = \frac{\lambda - \gamma}{\lambda + \gamma} e^{-2\lambda r},$$

при этом $|q| < 1$ при $0 < \lambda < \infty$. Отсюда функция (14) примет вид

$$\varphi = F(\xi, \eta) + \sum_{n=1}^\infty \int\limits_0^\infty \left\{ \left( e^{-\lambda \xi_1} + e^{-\lambda \xi_2} \right) \left[ \left( \frac{\lambda - \gamma}{\lambda + \gamma} \right)^n g_1 \sigma_1 + g_2 \sigma_2 \right] - 2e^{-2\lambda r n} g_2 \right\} d\lambda, \tag{15}$$

где $\xi_1 = -\xi + 2rn + l > 0$, $\xi_2 = \xi + 2rn - l > 0$, $r = p - l$, $p = \pi/2$.

Из разложения функции $F(\xi, \eta)$ (12) следуют равенства

$$\int\limits_0^\infty e^{-\lambda \tau} g_i \sigma_i d\lambda = F_i(\tau, \eta), \qquad i = 1, 2, \tag{16}$$

$$\int\limits_0^\infty e^{-\lambda\tau}\frac{(\lambda-\gamma)^k}{(\lambda+\gamma)^n}g_1\sigma_1 d\lambda = \frac{(-1)^k}{(n-1)!}\int\limits_0^\infty e^{-2\gamma t}t^{n-1}\frac{\partial^k}{\partial t^k}[e^{\gamma t}F_1(\tau+t,\eta)]dt, \tag{17}$$

где

$$F_i(\tau,\eta) = \frac{F(\tau+l,\eta)+(-1)^i F(\tau+l,-\eta)}{2}, \qquad \tau>0. \tag{18}$$

Равенство (17) следует из равенства (16) при $i=1$, на которое действует оператор по переменной $t$, стоящий в правой части равенства (17). Отсюда решение (15) задачи (7), (8) приводится к виду без разложений Фурье

$$\varphi(\xi,\eta) = F(\xi,\eta) + \sum_{n=1}^\infty \{F_2(\xi_1,\eta)+F_2(\xi_2,\eta)-2F_2(2rn,0)+$$

$$+\frac{(-1)^n}{(n-1)!}\int\limits_0^\infty e^{-2\gamma t}t^{n-1}\,\frac{\partial^n\Phi_n(\xi,t,\eta)}{\partial t^n}\,dt\Bigg\}, \tag{19}$$

где

$$\Phi_n(\xi,t,\eta) = e^{\gamma t}[F_1(\xi_1+t,\eta)+F_1(\xi_2+t,\eta)],$$

переменные $\xi_i$ определены в (15), постоянная $\gamma$ и функции $F_i(\xi,\eta)$ имеют вид (9), (18), $F(\xi,\eta)$ – решение классической задачи Неймана в однородной полуплоскости (10). Решение исходной задачи (2)–(5) строится по формулам (6), (19).

*Список литературы*

1. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.

2. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.

3. Холодовский С. Е. Метод свёртывания разложений Фурье. Случай обобщённых условий сопряжения типа трещины (завесы) в кусочно-неоднородных средах // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 6. С. 855—859.

4. Холодовский С. Е. Метод свертывания разложений Фурье. Случай трещины (завесы) в неоднородном пространстве // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 8. С. 1204–1208.

5. Холодовский С. Е., Гуримская И. А., Игнатьева Н. В. О решени краевых задач на неоднородной плоскости с трещиной и завесой, соединенными последовательно // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47. № 3. С. 396–404.

**Статья поступила в редакцию 30.03.2012 г.**