

УДК 534.1
ББК В313

*Владимир Евгеньевич Холодовский,
кандидат физико-математических наук, доцент,
Брянский государственный университет им. И. Г. Петровского
(Брянск, Россия), e-mail: a-a-sidorov@yandex.ru*
*Александр Алексеевич Сидоров,
кандидат физико-математических наук, доцент,
Брянский государственный университет им. И. Г. Петровского
(Брянск, Россия), e-mail: a-a-sidorov@yandex.ru*

Поток энергии и сила реакции на излучение внутриатомного диполя

На основе уравнений Максвелла получена формула, выражающая энергию излучения подвижного диполя, и вычислена сила реакции на излучение диполя, размеры плеча которого сравнимы со среднеквадратичными смещениями атомов кристаллов.

Ключевые слова: уравнение Максвелла, поток вектора Умова-Пойтинга, диполь, энергия излучения, сила реакции на излучение.

*Vladimir Yevgenyevich Kholodovskii
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor,
I.G. Petrovsky Bryansk State University,
(Bryansk, Russia), e-mail: a-a-sidorov@yandex.ru*
*Alexander Alekseevich Sidorov
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor,
I.G. Petrovsky Bryansk State University,
(Bryansk, Russia), e-mail: a-a-sidorov@yandex.ru*

Energy Flow and Force Reaction to the Emission of the Intra-atomic Dipole

Based on Maxwell's equations, the article presents a formula expressing the radiation energy of the moving dipole, and the calculation of the force reaction to the dipole radiation whose shoulder size is comparable to the mean square displacement of atoms in the crystal.

Keywords: Maxwell's equations, flow of Umov-Poynting vector, dipole, radiation energy, strength of the reaction to radiation.

В настоящей работе получена формула, выражающая полную энергию излучения диполя за единицу времени через поверхность сферы, радиус которой существенно больше плеча диполя. На основе этой формулы найдено выражение для силы реакции внутриатомного диполя на собственное излучение. При этом под внутриатомным диполем понимается система из двух зарядов, один из которых несёт остаток атома, а другой – центр заряда его внешней электронной оболочки. Следует отметить, что в современной литературе, например [1; 2], формула, выражающая энергию излучения диполя применима только для достаточно больших расстояний. В случае малых расстояний, например, при исследовании излучения внутриатомных диполей вещества такая формула не годится. В работе [3] показано, что при правильном учёте силы реакции на излучение внутриатомных диполей кубических кристаллов возможно построение динамической модели в адиабатическом приближении, дающей хорошее согласование с экспериментом. В работе [4] с учётом силы реакции внутриатомных диполей произведён расчёт тепловой энергии движения электронов и получена поправка на электронный вклад в теплоёмкость металлов, хорошо согласующаяся с экспериментальными данными.

Рассмотрим диполь, совершающий колебания вблизи своего положения равновесия. Обозначим через $\mathbf{p}(t)$, $\mathbf{p}'(t)$, $\mathbf{p}''(t)$ соответственно плечо и его первую и вторую производные по времени, а через q – заряд диполя; тогда его момент будет равен $qp(t)$. Пусть \mathbf{r} – радиус-вектор точки наблюдения относительно положения равновесия диполя, r – его длина, а $\mathbf{e} = \mathbf{r}/r$ – единичный направляющий вектор. Будем считать, что расстояние до точки наблюдения существенно больше возможных размеров плеча диполя.

Как следует из уравнений Максвелла, напряжённости электрического и магнитного полей диполя в точке наблюдения в момент времени t выражаются соответственно формулами:

$$\mathbf{E} = q \left(\frac{\mathbf{e}(\mathbf{ep}'') - \mathbf{p}''}{c^2 r} + \frac{3\mathbf{e}(\mathbf{ep}') - \mathbf{p}'}{cr^2} + \frac{3\mathbf{e}(\mathbf{ep}) - \mathbf{p}}{r^3} \right), \quad (1)$$

$$\mathbf{H} = q \left(\frac{\mathbf{p}'' \times \mathbf{e}}{c^2 r} + \frac{\mathbf{p}' \times \mathbf{e}}{cr^2} \right), \quad (2)$$

где c – скорость света в вакууме, а \mathbf{p} , \mathbf{p}' и \mathbf{p}'' вычисляются в момент времени $t' = t - r/c$. Как известно [1], поток энергии, излучаемой диполем в единицу времени через произвольную ориентированную поверхность, есть поток вектора Умова-Пойнтинга

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H}.$$

Следовательно, количество энергии, излучаемой диполем за единицу времени через сферу σ радиуса r в направлении внешней нормали равно:

$$W = \frac{c}{4\pi} \iint_{\sigma} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) d\sigma. \quad (3)$$

Вычисление вектора \mathbf{S} сводится к вычислению двойных векторных произведений, в которых первый множитель есть числитель одного из слагаемых формулы (1), а второй множитель – числитель одного из слагаемых формулы (2). Применяя к каждому из шести возможных произведений формулу двойного векторного произведения, приходим к равенствам:

$$\begin{aligned} (3\mathbf{e}(\mathbf{ep}) - \mathbf{p}) \times (\dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{e}) &= 2\mathbf{p}'(\mathbf{ep}) - 3\mathbf{e}(\mathbf{ep})(\mathbf{ep}') + \mathbf{e}(\mathbf{pp}'), \\ (3\mathbf{e}(\mathbf{ep}') - \mathbf{p}') \times (\mathbf{p}' \times \mathbf{e}) + (3\mathbf{e}(\mathbf{ep}) - \mathbf{p}) \times (\mathbf{p}'' \times \mathbf{e}) &= \frac{\partial}{\partial t} (3\mathbf{e}(\mathbf{ep}) - \mathbf{p}) \times (\mathbf{p}' \times \mathbf{e}), \\ (3\mathbf{e}(\mathbf{ep}') - \mathbf{p}') \times (\mathbf{p}'' \times \mathbf{e}) + (\mathbf{e}(\mathbf{ep}'') - \mathbf{p}'') \times (\mathbf{p}' \times \mathbf{e}) &= 2\mathbf{p}''(\mathbf{ep}') - 4\mathbf{e}(\mathbf{ep}')(\mathbf{ep}'') + 2\mathbf{e}(\mathbf{p}'\mathbf{p}''), \\ (\mathbf{e}(\mathbf{ep}'') - \mathbf{p}'') \times (\mathbf{p}'' \times \mathbf{e}) &= -\mathbf{e}(\mathbf{ep}'')^2 + \mathbf{ep}''^2. \end{aligned}$$

Интегрируя правые части последних равенств, получим

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} [2\mathbf{p}'(\mathbf{ep}) - 3\mathbf{e}(\mathbf{ep})(\mathbf{ep}') + \mathbf{e}(\mathbf{pp}')] d\sigma &= \frac{4\pi r^2}{3} (\mathbf{p}^2)', \\ \frac{\partial}{\partial t} \iint_{\sigma} [(3\mathbf{e}(\mathbf{ep}) - \mathbf{p}) \times (\mathbf{p}' \times \mathbf{e})] d\sigma &= \frac{4\pi r^2}{3} (\mathbf{p}^2)'', \\ \iint_{\sigma} [2\mathbf{p}''(\mathbf{ep}') - 4\mathbf{e}(\mathbf{ep}')(\mathbf{ep}'') + 2\mathbf{e}(\mathbf{p}'\mathbf{p}'')] d\sigma &= \frac{8\pi r^2}{3} (\mathbf{p}'^2)', \\ \iint_{\sigma} [-\mathbf{e}(\mathbf{ep}'')^2 + \mathbf{ep}''^2] d\sigma &= \frac{8\pi r^2}{3} (\mathbf{p}'')^2. \end{aligned}$$

Таким образом, вычисление интеграла (3) приводит к формуле

$$W = q^2 \left[\frac{2}{3c^3} (\mathbf{p}'')^2 + \frac{2}{3c^2 r} (\mathbf{p}'^2)' + \frac{1}{3cr^2} (\mathbf{p}^2)'' + \frac{1}{3r^3} (\mathbf{p}^2)' \right]. \quad (4)$$

В научной литературе, посвященной подобным задачам, выражение для W содержит лишь первое слагаемое формулы (4). Очевидно, если радиус сферы, через которую вычисляется поток W , достаточно велик, то остальными тремя слагаемыми можно пренебречь. Если же речь идёт о внутриатомном диполе, одним полюсом которого является ионный остов атома, а другим – центр заряда его внешней электронной оболочки и при этом радиус сферы r сравним с радиусом атома, то

основной вклад в формуле (4) будет уже давать последнее слагаемое. Отметим, что в этом случае можно считать, что $t' = t$.

Действительно, оценим порядки слагаемых в (4), считая, что внутриатомный диполь колеблется по гармоническому закону

$$\mathbf{p} = \mathbf{v} \sin(\omega t + \varphi),$$

где ω – частота, φ – начальная фаза, а \mathbf{v} – постоянный множитель, определяющий амплитуду и направление поляризации плеча диполя. Если считать, что внутриатомный диполь совершает тепловые колебания, то частота будет измеряться в терагерцах так, что $\omega \approx 10^{12} \text{сек}^{-1}$. Пусть радиус r сферы, через которую вычисляется поток, имеет порядок радиуса атома. Тогда $r \approx 10^{-10} \text{м}$, при этом плечо внутриатомного диполя, сравнимое со среднеквадратичным смещением атома, имеет порядок 10^{-14}м , что существенно меньше r . Вычисляя порядки слагаемых, стоящих в скобке формулы (4), получаем

$$\begin{aligned} \frac{2}{3c^3}(\mathbf{p}'')^2 &\approx \frac{2\omega^4}{3c^3}\nu^2 \approx 10^{23}\nu^2, & \frac{2}{3c^2r}(\mathbf{p}'')' &\approx 10^{29}\nu^2, & \frac{1}{3cr^2}(p^2)'' &\approx 10^{36}\nu^2, \\ \frac{1}{3r^3}(p^2)' &\approx 10^{42}\nu^2. \end{aligned}$$

Из приведенных оценок видно, что при рассматриваемых условиях подавляющий вклад в выражении (4) дает последнее слагаемое. Поэтому, при расчете излучения внутриатомного диполя можно считать, что

$$W = \frac{q^2}{3r^3}(p^2)'). \quad (5)$$

Пользуясь формулой (5), вычислим силу \mathbf{F}_r реакции диполя на его излучение через поверхность сферы радиуса r . Найдем работу, совершающую этой силой при движении плеча диполя по некоторому пути L за промежуток времени от t_0 до t . Эта работа равна

$$\int_L \mathbf{F}_r(\mathbf{p}) d\mathbf{p} = \int_{t_0}^t \mathbf{F}_r(\mathbf{p}(t)) \mathbf{p}'(t) dt.$$

С другой стороны, энергия, теряемая диполем за счёт излучения через сферу радиуса r за тот же промежуток времени, равна

$$-\int_{t_0}^t W(t) dt = -\frac{2q^2}{3r^3} \int_{t_0}^t \mathbf{p}(t) \mathbf{p}'(t) dt.$$

Следовательно, справедливо равенство

$$\int_{t_0}^t \mathbf{F}_r(\mathbf{p}(t)) \mathbf{p}'(t) dt = -\frac{2q^2}{3r^3} \int_{t_0}^t \mathbf{p}(t) \mathbf{p}'(t) dt.$$

Поскольку промежуток интегрирования выбирается произвольно, отсюда следует, что

$$\mathbf{F}_r = -\frac{2q^2}{3r^3} \mathbf{p}. \quad (6)$$

Для кристаллов величина r , вообще говоря, зависит от температуры и может быть вычислена из уравнения термодинамического равновесия [4].

Список литературы

1. Измайлов С. В. Курс электродинамики. М.: Учпедгиз, 1962.
2. Тамм И. Е. Основы теории электричества. М.: Наука, 1976.
3. Холодовский В. Е., Мачихина И. О. Принцип длинных волн и дисперсионные соотношения для кубических решёток в модели диполь-дипольных взаимодействий // Известия Самарского научного центра РАН. 2009. Т. 11. № 5. С. 49–55.

4. Холодовский В. Е., Мачихина И. О., Кульченков Е. А. Поправка на электронный вклад в теплоёмкость металлов в модели Ван-дер-Ваальсовских взаимодействий // Вестник БГТУ. 2010. № 4. С. 115–123.

Статья поступила в редакцию 28.01.2012 г.