УДК 517.956
ББК В143

Алексей Олегович Потехо,
кандидат физико-математических наук, доцент
Забайкальский государственный университет
(Чита, Россия), e-mail: potehoao@rambler.ru

К вопросу представления суммы степенного ряда на границе круга сходимости

Введено одно из представлений суммы степенного ряда на границе круга сходимости и соответствующей ему суммы тригонометрического ряда. Показано, что введенная операция формального дифференцирования тригонометрических рядов совпадает с дифференцированием распределений. Полученные результаты могут быть перенесены на кратные тригонометрические ряды.

Ключевые слова: степенной ряд, круг сходимости, тригонометрический ряд, распределение.

Aleksei Olegovich Potekho,
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor,
Trans-Baikal State University (Chita, Russia), e-mail: potehoao@rambler.ru

To the Question of Presenting the Sum of the Sedate Row on the Border of the Convergence Circle

The article introduces one of the representations of a sum of the sedate row on the border of the con-vergence circle and the corresponding sum of a trigonometric series. It shows that the introduced operation of formal differentiation of trigonometric series coincides with the differentiation of distributions. The obtained results can be extended to multiple trigonometric series.

Keywords: sedate row, convergence circle, trigonometric row, distribution.

Классическая задача о существовании граничных значений аналитической функции $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ рассматривалась ранее для различных условий поведения функции $f(z)$ вблизи границы. В зависимости от этих условий было доказано существование граничных значений в том или ином классе функций, классических или обобщенных [1–3]. В данной работе граничное значение аналитической функции $f(z)$ построено в виде линейного оператора определенного вида.

Пусть F – множество рядов вида

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \tag{1}$$

радиус сходимости которых равен 1; $G_\rho(D)$ – множество рядов

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n},$$

сходящихся в области D: $\{|z| > \rho, 0 < \rho < 1\}$. Рассмотрим оператор

$$A(f,g) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C f(t) g(tz) \frac{dt}{t},$$

где C: $\{|t| = r\}$ – окружность радиуса r, $\rho < r < 1$. Так как

$$A(f,g) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C f(t) g(tz) \frac{dt}{t} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) g(zre^{i\theta}) i d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta} \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n} r^{-n} e^{-in\theta} d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^{-n},$$

то оператор $A(f,g)$ является линейным оператором, преобразующим элемент линейного пространства $G_\rho(D)$ в элемент $G_\rho(D)$.

Пусть ∂K: $\{|z|=1\}$; C: $\{|t|=r, \rho<r<1\}$; $E_\rho(\partial K)$ – множество функций вида

$$h(\varphi)=g(e^{-i\varphi}),\quad g(z)\in G_\rho(D).$$

Рассмотрим выражение

$$\alpha(f,g)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C f(t)g(te^{-i\varphi})\frac{dt}{t}=$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}a_nr^ne^{in\theta}\sum_{n=0}^{\infty}b_nr^{-n}e^{in(\varphi-\theta)}d\theta=\sum_{n=0}^{\infty}a_nb_ne^{in\varphi}.$$

Отсюда оператор

$$\alpha(f,g)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nb_ne^{in\varphi},\tag{2}$$

однозначно определяемый рядом (1), каждую функцию $g\in E_\rho(\partial K)$ переводит в функцию из $E_\rho(\partial K)$.

Если ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_ne^{in\varphi}$$

сходится к интегрируемой функции $f_1(\varphi)$, то в выражении (2) можно перейти к пределу под знаком интеграла

$$\lim_{r\to1}\alpha(f,g)=\lim_{r\to1}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C f(t)g(te^{-i\varphi})\frac{dt}{t}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\lim_{r\to1}f(re^{i\theta})g(re^{i(\theta-\varphi)})d\theta=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}f_1(\theta)g_1(\varphi-\theta)d\theta,$$

где

$$g_1(\omega)=\sum_{n=0}^{\infty}b_ne^{in\omega},$$

т. е.

$$\lim_{r\to1}\alpha(f,g)=\alpha^*(f,g)$$

представляет собой свёртку f_1*g_1. Выражение $\alpha(f,g)$ можно назвать граничным значением функции $f\in F$ в смысле распределений или принять это выражение за сумму в смысле распределений тригонометрического ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_ne^{in\varphi}.$$

На множестве рядов F можно ввести операцию дифференцирования с весом $z\frac{d}{dz}$. Так как

$$A(z\frac{df}{dz},g)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}na_nr^ne^{in\theta}\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^{-n}r^{-n}e^{-in\theta}d\theta=\sum_{n=0}^{\infty}na_nb_nz^{-n},$$

а

$$A(f, z\frac{dg}{dz}) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta}\sum_{n=0}^{\infty}(-nb_n z^{-n} r^{-n} e^{-in\theta})d\theta = -\sum_{n=0}^{\infty} na_n b_n z^{-n},$$

то

$$A(z\frac{df}{dz}, g) = -A(f, z\frac{dg}{dz}).$$

Для тригонометрических рядов операции zd/dz соответствует операция $\frac{1}{i}d/d\varphi$. Так как

$$\alpha(\frac{1}{i}\frac{df}{d\varphi}, g) = -\alpha(f, \frac{1}{i}\frac{dg}{d\varphi}),$$

то

$$\alpha(\frac{df}{d\varphi}, g) = -\alpha(f, \frac{dg}{d\varphi}),$$

т. е. формальное дифференцирование по φ совпадает с дифференцированием распределений.

Полученные результаты обобщаются на кратные тригонометрические ряды.

Список литературы

1. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными / пер. с англ. М.: Мир, 1986. Т. 1: Теория распределений и анализ Фурье. 450 с.

Статья поступила в редакцию 27.03.2012 г.