

ISSN 2076-7641



# ученые записки

Забайкальского государственного  
гуманитарно-педагогического университета  
им. Н.Г. Чернышевского

2012/3(44)

серия  
Физика, математика,  
техника, технология

# Ученые

## ЗАПИСКИ

Забайкальский государственный  
гуманитарно-педагогический  
университет им. Н. Г. Чернышевского

Серия  
Физика, математика, техника, технология  
2012/3(44)

Научный журнал

Основан в 1957 г.

Выходит шесть раз в год

### Учредитель:

ФГБОУ ВПО «Забайкальский  
государственный  
гуманитарно-педагогический  
университет им. Н. Г. Чернышевского»

### Журнал зарегистрирован

Федеральной службой по надзору  
в сфере связи, информационных  
технологий и массовых коммуникаций  
(Роскомнадзор)  
Свидетельство регистрации  
ПИ № ФС77-36625

### Журнал выходит

в Перечень ведущих рецензируемых  
научных журналов и изданий,  
в которых должны быть опубликованы  
основные научные результаты  
диссертаций на соискание учёных  
степеней доктора и кандидата наук

**Авторы** несут полную ответственность  
за подбор фактов, содержащихся в  
статьях; высказываемые им взгляды  
могут  
не отражать точку зрения редакции

**Перепечатка** материалов журнала  
допускается только по согласованию  
с редакцией

### Адрес редакции:

672007, г. Чита, ул. Бабушкина, 129  
Телефон: 8(3022) 44-04-25,  
факс: 8(3022) 26-73-17.  
E-mail: gumvector@zabspu.ru

### Сайт журнала в Интернете

<http://www.zabvector.ru>

**Подписной индекс** журнала  
в ОАО «Роспечать» **33190**

**Электронная версия** журнала  
размещена на платформе Российской  
универсальной научной электронной  
библиотеки – [www.elibraru.ru](http://www.elibraru.ru)

© Забайкальский государственный  
гуманитарно-педагогический университет  
им. Н. Г. Чернышевского, 2012

### Редакционной коллегии:

**И. И. Катанаев** (*председатель*),  
канд. физ.-мат. наук, доцент, ректор ЗабГГПУ (Чита);  
**П. С. Атаманчук**, д-р пед. наук, проф.  
(Каменец-Подольский, Украина);  
**Н. Байра**, PhN (Улан-Батор, Монголия);  
**Ц. Батсуурь**, д-р пед. наук, проф. (Улан-Батор, Монголия);  
**Н. Бэгз**, Dr. Sc. (Улан-Батор, Монголия);  
**Л. Г. Гусякова**, д-р социол. наук, проф. (Барнаул);  
**В. А. Ильин**, д-р физ.-мат. наук, проф. (Москва);  
**Ли Чуаньсюн**, проф. (Харбин, КНР);  
**В. В. Мазалов**, д-р физ.-мат. наук, проф. (Петрозаводск);  
**И. И. Осинский**, д-р филос. наук, проф. (Улан-Удэ);  
**Е. В. Пискунова**, д-р пед. наук, проф. (Санкт-Петербург);  
**Ю. М. Резник**, д-р филос. наук, проф. (Москва);  
**В. С. Самсонов**, д-р пед. наук, проф. (Улан-Удэ);  
**Чжен Шупу**, д-р филол. наук, проф. (Харбин, КНР);  
**Н. В. Языкова**, д-р пед. наук, проф. (Москва)

### Редакционная коллегия серии:

**С. Е. Холодовский** (*редактор серии*),  
д-р физ.-мат. наук, проф. (Чита);  
**В. Е. Архинчеев**, д-р физ.-мат. наук, проф. (Улан-Удэ);  
**С. Ф. Забелин**, д-р техн. наук, проф.

Главный редактор объединённой  
редакции:

**И. В. Ерофеева**, д-р филол. наук, доцент

Ответственный секретарь объединённой редакции:

**Ю. В. Гаврилова**, канд. филос. наук

# Uchenye Zapiski

of Zabaikalsky State  
Humanitarian Pedagogical University  
named after N. G. Chernyshevsky

Series

Physics, Mathematics, Engineering, Technology  
2012/3(44)

---

Scientific Journal

Founded in 1957

Bimonthly

---

**Founder:**

FSBEI HPE "Zabaikalsky State  
Humanitarian Pedagogical University  
named after N. G. Chernyshevsky"

**The journal is registered**

by the Federal Supervision Service in the  
Field of Communication, Information  
Technologies and Mass Communications  
(Roskomnadzor)

**Registration certificate**

ПИ № ФС77–36625

**The journal**

is in the List of the leading refereed  
scientific journals and editions which  
publish the main results of dissertations  
for academic degrees of doctors and  
candidates of sciences

**The authors** are fully responsible for the  
selection and presentation of the facts  
contained in their articles; the views  
expressed by them do not necessarily  
reflect the views of the editorial board

**Reproduction** of any materials from the  
journal is allowed only in coordination  
with the editorial board

**The Manuscripts** submitted to the  
journal are not returned

**Address:**

672007, Chita, 129 Babushkin St.  
Phone: 8(3022) 44-04-25,  
Fax: 8(3022) 26-73-17.  
E-mail: gumvector@zabspu.ru

**Journal web site:**

<http://www.zabvector.ru>

**Subscription index** of the journal  
in OAO "Rospechat": **33190**

**The electronic version** of the journal is  
placed on the platform of the Russian  
Universal Scientific Electronic Library:  
[www.elibrary.ru](http://www.elibrary.ru)

© Zabaikalsky State Humanitarian  
Pedagogical University  
named after N. G. Chernyshevsky, 2012

**Editorial Board:**

*I. I. Katanaev* (*Chairman*),

Candidate of Physics and Mathematics, associate professor  
ZabSHPU (Chita);

*P. S. Atamanchuk*, Doctor of Pedagogy, professor  
(Kamenets-Podolsky, Ukraina);

*N. Bayra*, PhD. (Ulan Bator, Mongolia);

*Ts. Batsuur*, Doctor of Pedagogy, professor  
(Ulan Bator, Mongolia);

*N. Begz*, Dr. Sc. (Ulan Bator, Mongolia);

*L. G. Guslyakova*, Doctor of Sociology, professor (Barnaul);

*V. A. Ilyin*, Doctor of Physics and Mathematics,  
professor (Moscow);

*Lee Chuan-siung*, professor (Harbin, China);

*V. V. Mazalov*, Doctor of Physics and Mathematics,  
professor (Petrozavodsk);

*I. I. Osinsky*, Doctor of Philosophy, professor (Ulan-Ude);

*E. V. Piskunova*, Doctor of Pedagogy,  
professor (St. Petersburg);

*Yu. M. Reznik*, Doctor of Philosophy, professor (Moscow);

*V. S. Samsonov*, Doctor of Pedagogy, professor (Ulan-Ude);

*Chen Shupu*, PhD., professor (Harbin, China);

*N. V. Yazykova*, Doctor of Pedagogy, professor (Moscow)

**Series Editorial Committee:**

*S. E. Kholodovskii* (*Series Editor*),

Doctor of Physics and Mathematics, professor (Chita);

*V. E. Arkhincheev*, Doctor of Physics and Mathematics,  
professor (Ulan-Ude);

*S. F. Zabelin*, Doctor of Technological Sciences, professor

Editor-in-chief of the Unified Editorial Board:

*I. V. Erofeeva*, Doctor of Philology, associate professor

Executive Secretary of the Unified Editorial Board:

*Yu. V. Gavrilova*, Candidate of Philosophy

## СОДЕРЖАНИЕ

<i>Алатарцев С. О., Макаров Д. А.</i> О некоторых особенностях алгоритма организации искусственного роя в пространстве .....	5
<i>Бордонский Г. С.</i> Возможность наблюдения механических напряжений в ледяных покровах радиолокационным методом .....	13
<i>Вийтович О. И., Телешов В. Г.</i> Анализ солнечной энергии, поступающей на поверхность Земли с применением статистических данных природно-климатических условий по Забайкальскому краю .....	18
<i>Воронин М. С., Мерезижевский Л. А.</i> Моделирование ударно-волнового деформирования эпоксидной смолы .....	26
<i>Гильфанов А. К., Калашиников А. А., Степанов Н. П.</i> Исследование анизотропии плазменного резонанса в твёрдых растворах теллурида висмута и теллурида сурьмы в инфракрасной области спектра при температурах от 78 до 293 К .....	32
<i>Гицельтер Р. А.</i> Физико-механические свойства «RubCon» .....	39
<i>Гурильская И. А.</i> О решении задачи Дирихле в неоднородной полуплоскости .....	51
<i>Давиденко Г. М.</i> О решении краевых задач на плоскости с параллельными линиями разрыва проницаемости при классическом и обобщенном условиях сопряжения .....	55
<i>Ефимова И. А.</i> Об эффективном решении первых краевых задач в кусочно-однородных круговых областях .....	59
<i>Забелин С. Ф., Зеленский В. А.</i> Особенности кинетики нанокристаллизации аморфных металлических материалов при нестационарных режимах термического воздействия .....	62
<i>Игнатьева Н. В.</i> О решении задачи Неймана в кусочно-однородных криволинейных областях со слабо проницаемой плёнкой в виде луча .....	73
<i>Лямина О. С.</i> О нормах тригонометрических операторов Баскакова .....	77
<i>Менчер А. Э.</i> Арбитражная процедура в трёх точках со степенной функцией выигрыша .....	82
<i>Немов С. А., Шеллмова Л. Е., Благих Н. М.</i> Оценка параметров зонного спектра и механизмов рассеяния $PbSb_2Te_4 : Cu$ .....	88
<i>Носальская Т. Э.</i> Правило большинства в задаче наилучшего выбора для трёх лиц .....	93
<i>Нутчина-Пестрякова Н. В.</i> О решении краевых задач в кусочно-однородных областях с двухслойными плёночными включениями .....	98
<i>Орлов А. О., Лукьянов П. Ю.</i> Определение микроволновых характеристик наноструктурированных материалов резонаторным методом при частичном заполнении резонатора .....	104
<i>Потехо А. О.</i> К вопросу представления суммы степенного ряда на границе круга сходимости .....	109
<i>Степанов Н. П., Наливкин В. Ю.</i> Анизотропия магнитной восприимчивости твёрдых растворов $(Bi_{2-x}Sb_x)Te_3$ ( $0 < x < 1$ ) в диапазоне температур от 2 до 50 К .....	112
<i>Токарева Ю. С.</i> Оценивание параметров арбитражной процедуры с неполной информацией .....	118
<i>Толпаев В. А., Колесников А. В.</i> Новый метод построения формул перехода для решения задач фильтрации в изотропных неоднородных пластах .....	122
<i>Трухина Л. И.</i> Принцип дележа для коммуникационной игры .....	126
<i>Фу Цай Лю, Шу Энь Ван, Цзинь Мэй Доу</i> Усовершенствованный метод нечеткой идентификации на основе трансформации данных Бокса-Кокса .....	133
<i>Холодовский В. Е., Сидоров А. А.</i> Поток энергии и сила реакции на излучение внутриатомного диполя .....	141
<i>Холодовский С. Е.</i> О решении краевых задач в цилиндрах с многослойным плёночным включением .....	145
<i>Холодовский С. Е., Давиденко Г. М.</i> О решении краевых задач в кусочно-однородных цилиндрах с двумя параллельными завесами .....	152
<i>Шадрина Н. Н.</i> О решении третьих краевых задач в кусочно-однородной полуплоскости с трещиной (завесой) .....	157

## CONTEXT

<i>Alatartsev S. O., Makarov D. A.</i> About Some Features of the Algorithm of Artificial Swarm Organization in Space .....	5
<i>Bordonskiy G. S.</i> The Possibility of Observing Mechanical Stress in Ice Covers by the Radiolocation Method .....	13
<i>Viytovich O. I., Teleshov V. G.</i> Analysis of Solar Energy Reaching the Earth's Surface with the Use of Statistical Data of the Trans-Baikal Climatic Conditions .....	18
<i>Voronin M. S., Merzhievsky L. A.</i> Modeling Shock-wave Deformation of Epoxy Resin .....	26
<i>Gilfanov A. K., Kalashnikov A. A., Stepanov N. P.</i> Studying Anisotropy of Plasma Resonance in Solid Solutions of Bismuth Telluride and Antimony Telluride in the Infrared Spectrum at Temperatures Ranging from 78 to 293 K .....	32
<i>Gizelter R. A.</i> Physical-Mechanical Properties of "RubCon" .....	39
<i>Gurimskaya I. A.</i> Solving the Dirichlet Problem in the Inhomogeneous Half-plane .....	51
<i>Davidenko G. M.</i> Solving Boundary Value Problems on the Plane with Parallel Lines of Permeability Discontinuity in Classical and Generalized Conjugation Conditions .....	55
<i>Efimova I. A.</i> On the Efficient Solution of the First Boundary Value Problems in Piecewise Homogeneous Circular Domains .....	59
<i>Zabelin S. F., Zelensky V. A.</i> Kinetics Features of Nanocrystallization of Amorphous Metal Materials at Non-stationary Modes of Thermal Influence .....	62
<i>Ignatyeva N. V.</i> Solving the Neumann Problem in Piecewise-homogeneous Curved Areas with a Weakly Permeable Film as a Beam .....	73
<i>Lyamina O. S.</i> On Norms of Baskakov Trigonometric Operators .....	77
<i>Mentcher A. E.</i> On the Arbitration Procedure in Three Points with Power Payoff Function .....	82
<i>Nemov S. A., Shelimova L. E., Blagikh N. M.</i> Estimating the Parameters of the Band Spectrum and Scattering Mechanisms in $PbSb_2Te_4 : Cu$ .....	88
<i>Nosalskaya T. E.</i> Majority Rule in the Problem of the Best Choice for Three Persons .....	93
<i>Nutchina-Pestryakova N. V.</i> Solving Boundary Value Problems in Piecewise Homogeneous Regions with Double-layer Film Inclusions .....	98
<i>Orlov A. O., Lukyanov P. Yu.</i> Determining Microwave Characteristics of Nanostructured Materials by the Resonator Method with a Partially Filled Cavity .....	104
<i>Potekho A. O.</i> To the Question of Presenting the Sum of the Sedate Row on the Border of the Convergence Circle .....	109
<i>Stepanov N. P., Nalivkin V. Yu.</i> Anisotropy of Magnetic Susceptibility of Solid Solutions of $(Bi_{2-x}Sb_x)Te_3$ ( $0 < x < 1$ ) in the Temperature Range from 2 to 50 K .....	112
<i>Tokareva Yu. S.</i> Estimating the Parameters of the Arbitration Procedure with Incomplete Information .....	118
<i>Tolpaev V. A., Kolesnikov A. V.</i> A New Method of Constructing Transition Formulas for the Solution of Filtration Problems in Isotropic Inhomogeneous Layers .....	122
<i>Trukhina L. I.</i> Allocation Principle for the Communication Game .....	126
<i>Fu-Cai Liu, Shu-En Wang, Jin-Mei Dou</i> An Improved Fuzzy Identification Method Based on Box-Cox Data Transformation .....	133
<i>Kholodovskii V. E., Sidorov A. A.</i> Energy Flow and Force Reaction to the Emission of the Intra-atomic Dipole .....	141
<i>Kholodovskii S. E.</i> Solving Boundary Value Problems in Cylinders with Multilayer Film Inclusion .....	145
<i>Kholodovskii S. E., Davidenko G. M.</i> The Solution of Boundary Value Problems in Piecewise Homogeneous Cylinders with Two Parallel Screens .....	152
<i>Shadrina N. N.</i> Solving Third Boundary Value Problems in Piecewise-homogeneous Half-plane with a Crack (Screen) .....	157

УДК 519.711.3  
ББК 32.965.9

*Сергей Олегович Алатарцев,*  
магистр,  
университет им. Отто фон Герике  
(Магдебург, Германия), e-mail: alatarsev@gmail.com  
*Дмитрий Андреевич Макаров,*  
кандидат технических наук,  
Забайкальский государственный университет  
(Чита, Россия), e-mail: Rainmaker@chita.ru

### **О некоторых особенностях алгоритма организации искусственного роя в пространстве**

В данной статье рассматриваются вопросы моделирования искусственного роя, дается анализ работы популярного алгоритма SHAPEBUGS, предлагаются модификации алгоритма, направленные на повышение его эффективности и производительности в задачах самовосстановления трехмерных форм.

*Ключевые слова:* самовосстанавливающиеся формы, искусственный рой, алгоритм SHAPEBUGS.

*Sergey Olegovich Alatarsev*  
Master's Program Student,  
Otto von Guericke University  
(Magdeburg, Germany), e-mail: alatarsev@gmail.com  
*Dmitry Andreevich Makarov,*  
Candidate of Technical Sciences, Trans-Baikal State University  
(Chita, Russia), e-mail: Rainmaker@chita.ru

### **About Some Features of the Algorithm of Artificial Swarm Organization in Space**

The paper describes the problems of modeling artificial swarm, analyzes the work of the popular SHAPEBUGS algorithm. It suggests algorithm modifications to increase its efficiency and performance in the issues of self-repairing three-dimensional forms.

*Keywords:* self-repairing forms, artificial swarm, SHAPEBUGS algorithm.

Модель т. н. «искусственного роя» (swarm) представляет собой один из наиболее интересных примеров самоорганизующихся систем – систем, элементы которых, взаимодействуя друг с другом, создают, изменяют или поддерживают в неизменном состоянии саму систему без внешнего воздействия на неё. В основе данной модели лежат попытки формализовать и искусственно воссоздать некоторые процессы самоорганизации, протекающие в коллективных сообществах в живой природе (яркий пример – муравейник).

Формы, созданные в пространстве с применением концепции искусственного роя, характеризуются высокой устойчивостью к повреждениям, так как неповрежденные элементы формы способны, организуясь, быстро восстанавливать её исходное состояние, что делает применение таких форм крайне актуальным во многих практических задачах. Более того, возможна такая самоорганизация объектов роя, при которой они, взаимодействуя между собой, могут собрать из себя другой объект с качествами, превосходящими сумму качеств его составных частей. Так, например, рой в форме колеса способен быстро преодолевать большие расстояния, нежели каждый участник роя по отдельности.

Вместе с тем для выполнения подобной самоорганизации элементов роя требуется решить множество проблем, связанных как с описанием форм, составленных объектами роя, так и со взаимодействием собственно объектов внутри роя.

В настоящее время исследование и разработка алгоритмов для искусственных роев ведутся научными группами в ведущих университетах мира. Фактически, все теоретические исследования

в той или иной мере сводятся к попыткам организации элементов роя в пространстве. Подходы к организации меняются в зависимости от необходимых функций, возложенных на систему.

Можно выделить три уровня в алгоритмах структурирования роя в соответствии с рис. 1.

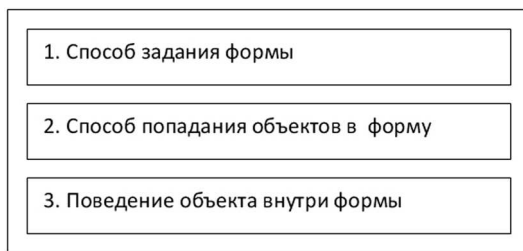


Рис. 1. Уровни в алгоритмах структурирования роя

Каждый уровень не зависит от работы других уровней, поэтому их можно заменять без потери работоспособности всего алгоритма. В данной работе делается попытка подобрать такие подходы для каждого отдельного уровня, чтобы система могла свободно функционировать в трёхмерном пространстве, не требовала избыточно много памяти для хранения формы и обладала высокой скоростью работы.

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы предложить решение, расширяющее возможности одного из существующих алгоритмов организации искусственного роя и осуществить программную реализацию этого решения.

Рассмотрим один из наиболее популярных алгоритмов организации искусственного роя – SHAPEBUGS [4; 5]. При работе этого алгоритма поведение объектов, составляющих некую заданную форму, напоминает поведение молекул газа в закрытом контейнере. Так, при сближении объектов на расстояние, определяемое т.н. зоной отталкивания, происходит их отталкивание друг от друга вплоть до достижения нейтральной зоны, как показано на рис. 2.

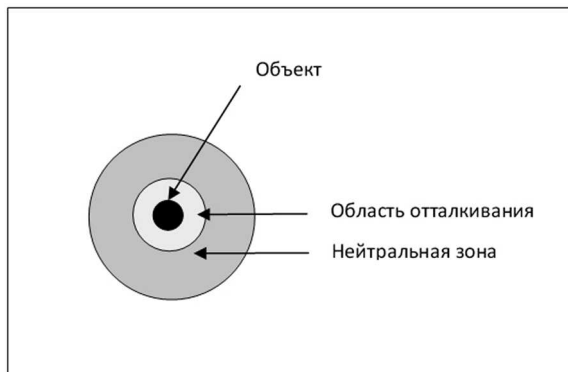


Рис. 2. Области влияния объекта согласно алгоритму SHAPEBUGS

Объект по-разному реагирует на различную концентрацию соседних объектов и пытается выйти из зоны «с высоким давлением» в зону «с низким давлением» подобно молекулам газа в реальной физической среде. Благодаря этому при последовательном выполнении алгоритма «давление» во всех точках контейнера (форме) становится одинаковым, а распределение объектов в форме – равномерным. За счёт этого свойства алгоритма SHAPEBUGS обеспечивается, в частности, восстановление исходной формы в случае изменения числа объектов, которые её составляют.

Задание формы в SHAPEBUGS выполняется в виде трафарета – однобитового растрового *bitmap*-изображения, в котором 0 соответствует пустому пространству, а 1 соответствует форме. Например, чтобы задать двумерную форму дельфина можно белыми точками (нулями) обозначить пустую область, а чёрными (единицами) задать саму форму, как показано на рис. 3.

Несмотря на простоту задания трафарета, данный подход в некоторых ситуациях весьма неудобен и предполагает значительные накладные расходы. В частности, при задании форм, соответствующих сущностям реального мира, необходимо определять формы в трёхмерном пространстве.



Рис. 3. Пример трафарета

В этом случае задание трафаретом будет достаточно трудоёмким, так как количество трафаретов увеличится с одного до некоторого  $N$ , где под  $N$  подразумевается минимальное количество заполненных ячеек для третьего измерения.

Некоторым развитием метода задания формы трафаретом является метод использования градиентных карт [6]. Градиентная карта представляет собой массив элементов, каждая ячейка которого хранит целое число и соответствует пикселю на трафарете, задающем форму. Для расчёта элементов градиентной карты используется т.н. Манхэттенское расстояние или расстояние городских кварталов, которое является средним разностей координат заданной точки и точки начала сегмента или формы. Как показано в [3], в большинстве случаев эта мера расстояния приводит к таким же результатам, что и при вычислении обычного евклидова расстояния, позволяя тем самым упростить вычисление расстояний между объектами в системе. Для указания принадлежности элемента градиентной карты к задаваемой форме Манхэттенское расстояние принимается положительным, а для указания того, что точка не входит в задаваемую форму, соответствующий элемент градиентной карты принимается отрицательным.

Хранение таблицы и постоянное обращение к памяти является весьма затратным с точки зрения потребляемых ресурсов, не говоря уже о вычислении самой градиентной карты. Например, для трёхмерного случая куба со стороной, равной 1000, максимальное число в ячейке составит  $|1 - 1000| + |1 - 1000| + |1 - 1000| = 2997$ . Для его описания потребуется 12 бит ( $2^{12} = 4096$ ), а для описания всей трёхмерной таблицы понадобится  $1000 \times 1000 \times 1000 \times 12$  бит, что составляет порядка 1,4 гигабайт и требует соответствующего объёма памяти в вычислительной системе. Таким образом, задание трёхмерной формы посредством градиентной карты в общем случае представляется весьма затруднительным, так как постоянная работа и поиск в объёме памяти, измеряемом гигабайтами, является достаточно медленным и нецелесообразным процессом. В этой связи применение метода градиентных карт на практике ограничивается заданием двумерных форм, либо трёхмерных форм очень малых размеров.

В силу указанных обстоятельств, представляется целесообразным выполнить определённую модификацию алгоритма SHAPEBUGS в целях повышения эффективности и расширения области его применения. Данная модификация, соответственно, должна быть направлена на устранение тех недостатков алгоритма, которые в наибольшей степени отражаются на производительности и эффективности. С этой целью предлагается модернизировать работу алгоритма SHAPEBUGS в следующих ключевых направлениях:

- изменить способ задания формы;
- изменить способ попадания объектов внутрь формы;
- изменить алгоритм выбора направления движения объекта внутри формы;
- предложить способ определения состояния сбалансированности формы после её изменений.

Для изменения способа задания формы откажемся от трафаретов и опишем форму математически, используя систему уравнений. В качестве примера рассмотрим трёхмерную чашу, запыленную сверху и показанную на рис. 4.

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z \leq 5 \end{cases} \quad (1)$$

Очевидно, что такой подход имеет значительные преимущества по сравнению с трафаретным



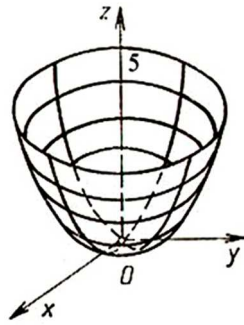


Рис. 4. Параболоид

подходом и методом градиентных карт. Главной его особенностью является минимальное количество или же и вовсе отсутствие избыточной информации, необходимой для описания формы. Так, например, для сжатия или расширения формы, приведённой на рис. 4, достаточно лишь изменить соответствующие коэффициенты в уравнении (1), в то время как при использовании градиентной карты для задания той же формы, потребовалась бы полная её перестройка, которая к тому же, вероятно, потребовала бы и увеличения размера карты. Иначе говоря, задание формы посредством уравнения или системы уравнений радикальным образом снижает требования к памяти и одновременно серьезнейшим образом повышает производительность алгоритма SHAPEBUGS.

Следует отметить при этом, что наравне с преимуществами такого подхода возникает и серьезная проблема, связанная с тем, что реальные сущности, имеющие сложную форму, трудно описать математически. Для решения этой проблемы необходима декомпозиция сложной формы на совокупность более простых форм, которые проще описать. Очевидно, что в этом случае возрастает и трудоёмкость реализации данного подхода, однако, преимущества, которые он даёт, все же диктуют необходимость продолжения исследований в данном направлении.

Другим направлением модификации алгоритма SHAPEBUGS является изменение задания способа попадания объектов внутрь формы. В существующей реализации объекты роя перемещаются случайным образом и со временем попадают в форму благодаря замкнутости пространства. Тем самым повышается время конвергенции системы, то есть приведения её в согласованное состояние, например, восстановление формы после удаления из роя части объектов или добавления новых объектов.

Предлагаемая модификация поведения объектов основана на понятии точек входа в форму. Точка входа в форму – это внутренняя точка формы, причем такая, что при движении по направлению к ней из любой точки пространства гарантируется попадание внутрь формы даже без достижения самой этой точки.

Предположим, что объекты изначально создаются вне границ формы, поэтому первостепенная задача – попасть внутрь. Для этого каждый объект обладает информацией о точках входов в форму. Пусть координаты объекта в пространстве выражаются вектором  $(x, y, z)$ , а координаты точки входа – вектором  $(x_p, y_p, z_p)$ . Объект выбирает ближайшую точку входа (или ту, которая считается оптимальной по другим критериям) и устремляется к ней по формуле (2).

$$\begin{cases} x = x_p + b(x - x_p) \\ y = y_p + b(y - y_p) \\ z = z_p + b(z - z_p), \end{cases} \quad (2)$$

где  $b$  – константа, отвечающая за «величину шага». При этом, очевидно,  $b$  должно быть меньше 1, иначе объект будет не приближаться к точке входа, а отдаляться от неё.

Вопрос определения оптимальной точки входа в форму представляет отдельный интерес для исследования. Самой простой стратегией является выбор ближайшей точки, так как в этом случае объект будет находиться минимальное время за пределами формы и быстрее приступит к функционированию. При этом, однако, возможно, что в этой части формы существует большая концентрация других объектов, что потребует дальнейшего перераспределения объектов роя уже внутри самой формы. В этом случае, очевидно, было бы целесообразнее выбрать другую точку, которая бы позволила системе быстрее прийти к сбалансированному состоянию. Однако объект не способен

прогнозировать оптимальность точки входа и текущую загруженность объектами возле неё. Поэтому предлагается решение, позволяющее создавать объекты в разных сторонах от формы таким образом, что, применяя стратегию вхождения в ближайшую точку входа, объекты будут заведомо равномерно распределяться внутри. В простейшем случае возможен также вариант равномерного распределения точек входа внутри формы.

Ещё одной важной модификацией алгоритма SHAPEBUGS является переопределение поведения объектов роя при их попадании внутрь формы, так как необходимо обеспечить такое поведение и тактику, при которой объекты постараются распределиться равномерно.

Особое значение тактика распределения объектов приобретает в ситуации удаления или добавления части объектов роя (частичное разрушение формы или её наращивание). В общем случае поведение объектов определяется двумя принципами: «Отойди от ближайшего» и «Подойди к самому дальнему». Применение принципа «Отойди от ближайшего» соответствует ситуации, когда при изменении числа объектов в рое требуется восстановить исходную форму. Применение принципа «Подойди к самому дальнему» соответствует ситуации, когда при изменении части объектов в рое (особенно при удалении объектов) требуется их более компактная группировка, и объекты должны быть расположены как можно ближе друг к другу. Таким образом, применение той или иной тактики распределения объектов в форме определяется исходными условиями задачи.

Для иллюстрации применения этих принципов представим упрощённую ситуацию, когда в системе задействованы только 3 объекта. Будем работать с ограниченным с двух сторон одномерным пространством, т.е. объекты могут передвигаться только влево или вправо так, что значение их координаты будет ограничено на некотором отрезке  $[a, b]$ . В виду того, что каждый объект функционирует независимо от других, через некоторый промежуток времени (такт) производится выборка значений координаты объектов, что позволяет отслеживать изменения в системе, вызванные взаимодействием объектов между собой.

На рис. 5 показан пример применения принципа «Подойди к самому дальнему» при распределении объектов в форме. Очевидно, что при удалении одного из объектов два оставшихся будут стремиться друг к другу и максимально сблизятся. При добавлении же нового объекта возникнет ситуация, соответствующая такту 1 на рис. 5, за исключением того, что в системе будут присутствовать не три, а четыре объекта.


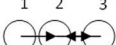
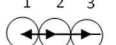
<p>Такт 1</p> 	<p>Система находится в несбалансированном состоянии. Объект 1 устремляется к 3. Объект 2 к 3, а 3 к 1.</p>
<p>Такт 2</p> 	<p>Объект 1 устремляется к 3. Объект 3 к 1, а объект 2 к 3.</p>
<p>Такт 3</p> 	<p>Фактически, объекты слипаются в «комок». Для принципа «подойди к самому дальнему» это и есть сбалансированное состояние.</p>

Рис. 5. Применение принципа «Подойди к самому дальнему»

На рис. 6 показан пример применения принципа «Отойди от ближайшего» при распределении объектов в форме. Как видно из рис. 6, объекты роя стремятся занять всё пространство, отведённое под форму, причём с максимально возможным равномерным распределением. Для дополнительной оптимизации распределения объектов предлагается исключить нейтральную область, что заставит объекты всегда находиться в состоянии отталкивания вплоть до приведения системы к полностью сбалансированному состоянию. За счёт этого обеспечивается более быстрая и равномерная наполняемость формы объектами по сравнению со стандартной реализацией SHAPEBUGS.

В стандартной реализации SHAPEBUGS новая позиция объекта вычисляется из суммы позиций объектов, учитывая расстояние до каждого из них. Иными словами, в произвольный момент времени необходимо знать расстояние до каждого объекта и его позицию, чтобы система функционировала корректно, т.е. объекты роя должны на каждом такте обмениваться сообщениями о своем текущем расположении. В предлагаемой же модификации, которая основана на исследованиях, приведённых в [7], используется информация лишь о ближайшем объекте.

Так как нахождение координат ближайшего объекта осуществляется значительно легче, чем поддержание в актуальном состоянии информации о позициях объектов на каждом такте, то данный подход требует значительно меньших ресурсов и ускоряет конвергенцию системы.

<p>Такт 1</p>	<p>Система находится в несбалансированном состоянии. Объект 1 устремляется прочь от 2. Объект 2 от 1, а 3 от 2.</p>
<p>Такт 2</p>	<p>Объект начинает поиск лучшей позиции как можно дальше от ближайшего соседа.</p>
<p>Такт 3</p>	<p>Объект 2 пытается найти оптимальную для себя позицию, для этого он перемещается между объектами 1 и 3.</p>
<p>Такт 4</p>	<p>Объект 2 находит оптимальную позицию, дальнейшие сдвиги будут минимальными и не повлияют на состояние системы. Примеч: <math>d_1 \approx d_2</math>.</p>
<p>Такт 5</p>	<p>Объект 3 выходит из строя, система находится вновь в несбалансированном состоянии.</p>
<p>Такт 6</p>	<p>Объект 2 начинает поиск лучшей позиции. Как можно дальше от своего ближайшего.</p>
<p>Такт 7</p>	<p>Объект 2 занимает крайнюю позицию. Система приходит в сбалансированное состояние.</p>

Рис. 6. Применение принципа «Отойди от ближайшего»

Важной задачей является также определение момента, когда система становится сбалансированной. Для простых форм эта задача не представляет собой особой сложности, так как достаточно определить внутренний объём, создаваемый совокупностью объектов роя, и сравнить его с объёмом фигуры (площадью для двумерного случая). Однако, в ситуациях, когда формы являются сложными и при этом не всегда выпуклыми, эта задача сразу становится весьма нетривиальной.

Задача определения сбалансированности системы тесно связана с задачей математического описания сложных форм. Как указывалось ранее, с этой целью применяется декомпозиция сложной формы на совокупность более простых форм в зависимости от исходной задачи. В качестве примера приведем оценку сбалансированности системы для случая двумерной фигуры на плоскости, показанной на рис. 7.

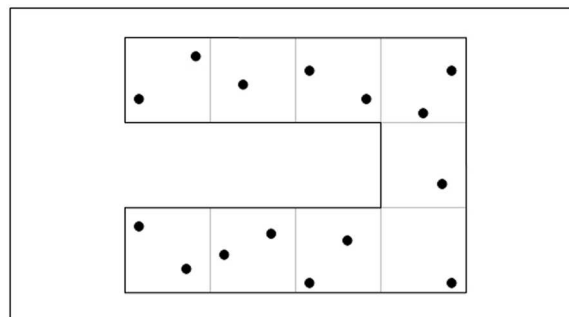


Рис. 7. Исходная двумерная форм

Общая формула для определения сбалансированности системы в данном случае имеет вид:

$$S_f - S_o \leq \varepsilon, \tag{3}$$

где  $S_f$  – площадь формы,  $S_o$  – площадь, задаваемая совокупностью объектов роя,  $\varepsilon$  – величина

ошибки. Легко заметить, что, варьируя величину ошибки, можно задать точность сбалансированности системы.

Приведённый пример иллюстрирует сложность адекватного определения площади, занимаемой объектами роя. Так, применение алгоритма Джарвиса [2] (алгоритм заворачивания подарка) создаёт несколько парадоксальную ситуацию, показанную на рис. 8. Как видно из рис. 8, все объекты находятся внутри формы, но площадь, которую они занимают, якобы больше площади самой формы.

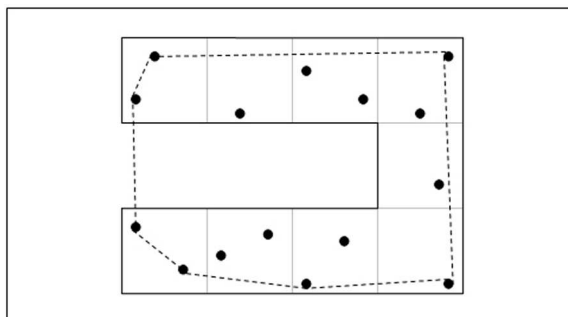


Рис. 8. Применение алгоритма Джарвиса к исходной форме

Очевидно, что в данном случае условие (3) выполнится, но система так и не придёт в сбалансированное состояние. Отсюда вытекает необходимость построения такого множества объектов роя на плоскости, которое по своим очертаниям максимально соответствовало бы форме, как показано на рис. 9. В этом случае площадь была бы определена корректно, и оценка сбалансированности системы была бы адекватной.

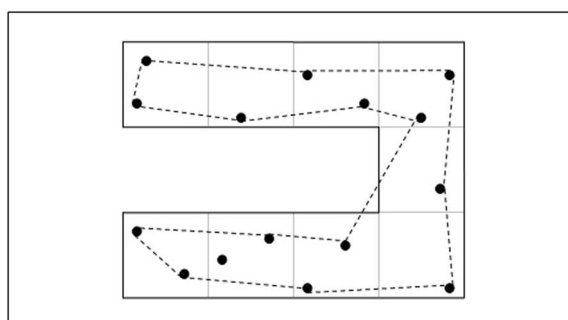


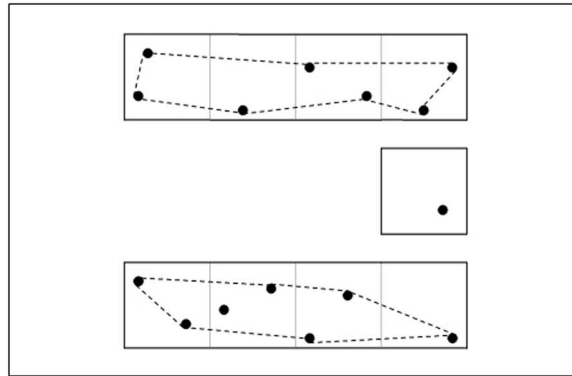
Рис. 9. Оптимизация площади, занимаемой объектами роя

Вообще говоря, построение площади, занимаемой объектами роя, которая максимально соответствовала бы исходной форме, является задачей, требующей дополнительных исследований, поэтому в качестве упрощённого решения может быть предложено построение выпуклой оболочки для каждой компоненты сложной формы.

При этом подходе невыпуклая форма разбивается на множество простых выпуклых форм, к каждой из которых по отдельности затем можно применять алгоритм Джарвиса или другой подходящий алгоритм, например, алгоритм Грэхема [1]. Декомпозиция формы на атомарные выпуклые компоненты показана на рис. 10.

Недостатки данного подхода выражаются, в первую очередь, в том, что теряется неучтённая площадь, которая фактически имеется на стыке атомарных компонент, вследствие чего  $\varepsilon$  из формулы (3) требуется делать достаточно большим. Но это влечёт за собой потерю точности определения состояния сбалансированности системы. Тем не менее, достоинством этого подхода является то, что он легко реализуем на практике, с учётом того, что форма строится из выпуклых компонент ещё на этапе ее проектирования. Таким образом, он может быть с успехом применён в ситуациях, где допустимо некоторое отклонение роя в сбалансированном состоянии от первоначальной формы.

Приведённый пример ясно демонстрирует проблемы, возникающие при декомпозиции сложной исходной формы на совокупность более простых форм, как на этапе её описания, так и при



*Рис. 10.* Декомпозиция сложной формы

оценке сбалансированности состояния роя при работе алгоритма SHAPEBUGS. Вместе с тем, по нашему мнению, именно этот подход способен привести к значительному повышению эффективности работы алгоритма и радикальному снижению используемых вычислительных ресурсов, что компенсирует трудоёмкость подобного подхода и делает его предметом пристального внимания для дальнейшего изучения.

В целом же предложенные в рамках проведённых исследований модификации алгоритма SHAPEBUGS способны в будущем послужить основой для разработки специализированного программного обеспечения, находящего свое применение в техническом дизайне, медицинских исследованиях, проектировании инженерных систем и других сферах деятельности.

#### *Список литературы*

1. Алгоритм Грэхема (wikipedia)
2. Алгоритм Джарвиса (wikipedia)
3. Веб-сайт: [http://habrahabr.ru/blogs/data\\_mining/67078/](http://habrahabr.ru/blogs/data_mining/67078/) (дата обращения: 12.01.2012)
4. Веб-сайт проекта SHAPEBUGS: <http://www.shapebugs.org> (дата обращения: 12.01.2012).
5. Cheng J., Winston Cheng, Radhika Nagpal. Robust and self-repairing formation control for swarms of mobile agents. Proceedings of the American Association for Artificial Intelligence (AAAI), 2005. 6 p.
6. Rubenstein M., Wei-Min Shen. Scalable Self-Assembly and Self-Repair In A Collective Of Robots, 2009. 6 p.
7. Unsal C., J. Bay. Spatial Self-organization in Large Populations of Mobile Robots. International Symposium on Intelligent Control, 1994. 14 p.

**Статья поступила в редакцию 30.03.2012 г.**

УДК 551.321.5  
ББК В22

*Георгий Степанович Бордонский*  
доктор физико-математических наук,  
заведующий лабораторией геофизики криогенеза,  
Институт природных ресурсов экологии и  
криогенеза Сибирского отделения РАН  
(Чита, Россия), e-mail: lgc255@mail.ru

### **Возможность наблюдения механических напряжений в ледяных покровах радиолокационным методом <sup>1</sup>**

Приведены результаты экспериментов по радиопросвечиванию ледяных покровов в микроволновом диапазоне. Установлено, что при возникновении во льду механических напряжений и пластической деформации в ледяных структурах возникают некогерентные добавочные электромагнитные волны. Их использование позволяет наблюдать течение ледяной структуры. Рассмотрен метод регистрации течения среды с использованием метода двухпозиционной радиолокации.

*Ключевые слова:* лёд, электромагнитные волны, добавочные волны, пластическая деформация

*Georgiy Stepanovich Bordonskiy*  
Doctor of Physics and Mathematics,  
Chief of the Laboratory of Cryogenesis Geophysics,  
Institute of Natural Resources, Ecology and Cryogenesis,  
Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences (Chita, Russia), e-mail: lgc255@mail.ru

### **The Possibility of Observing Mechanical Stress in Ice Covers by the Radiolocation Method**

The article presents the results of the experiments in radiotransparency of ice covers in the microwave range. It is found that at plastic deformation under mechanical stress, there appear noncoherent additional electromagnetic waves in the ice structures. These waves could be used for observing ice structures flowing. The method of two-position radiolocation is considered for registering ice flowing.

*Keywords:* ice, electromagnetic waves, additional waves, plastic deformation.

### **Введение**

При радиозондировании ледников и ледяных покровов в ряде работ были обнаружены аномалии их электромагнитных свойств [1; 2]. В статьях [2; 3] было показано, что многие аномалии объясняются возникновением в ледяных телах добавочных электромагнитных волн. Эти волны во льду бывают двух типов – когерентные и некогерентные. Когерентные волны возникают, например, в тонком плоском слое, расположенном между двумя полубесконечными средами, при распространении излучения параллельно границам раздела сред, и возникают вследствие многократных отражений от границ [6]. Некогерентные добавочные волны, как было представлено в [3], возникают из-за рассеяния на неоднородностях, связанных с течением (процессом пластической деформацией) кристаллов по базисным плоскостям. Течение носит прерывистый характер при достижении в среде предела текучести.

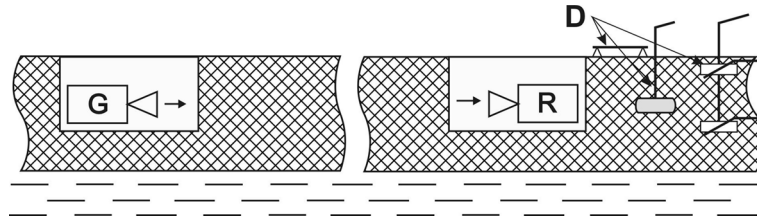
Точный механизм рассеяния излучения в среде с механической неустойчивостью ещё не установлен. Предполагается, что он связан с некоторым усилением излучения на неоднородностях, имеющих вид квазиджидких плёнок, по которым происходит течение среды.

Цель настоящей работы – обобщить имеющиеся экспериментальные данные и рассмотреть принципиальную возможность регистрации механических напряжений в ледяных покровах радиолокационным методом.

<sup>1</sup>Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект №02-10-00088а).

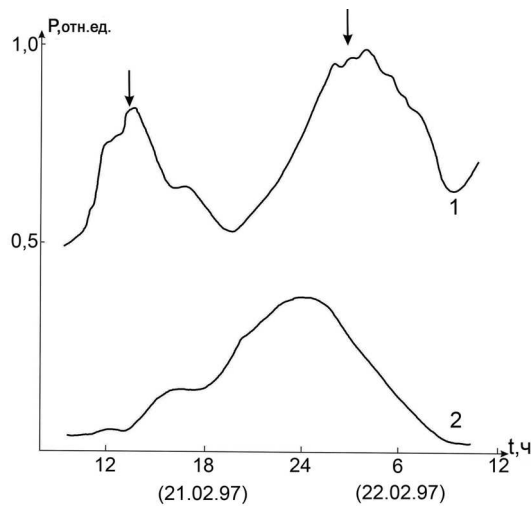
## Экспериментальные данные

Эксперименты по изучению влияния механических напряжений на электромагнитные свойства льда в микроволновом диапазоне проводились нами в работе [5]. Схема эксперимента приведена на рис. 1. В эксперименте радиопередатчик малой мощности и микроволновый радиометрический приемник устанавливали в углублениях ледяного покрова на некотором расстоянии друг от друга. Предполагалось, что суточные изменения температуры воздуха приведут к переменным механическим напряжениям и изменениям электромагнитных потерь, что и было зарегистрировано в этих экспериментах. В двухсантиметровом диапазоне было зафиксировано изменение мнимой части диэлектрической проницаемости, ответственной за поглощение электромагнитной энергии, на значение 0,01 процента.



**Рис. 1.** Схема расположения аппаратуры для радиопросвечивания ледяного покрова. G – СВЧ-генератор, R – приёмник излучения, D – датчики деформации льда и температуры

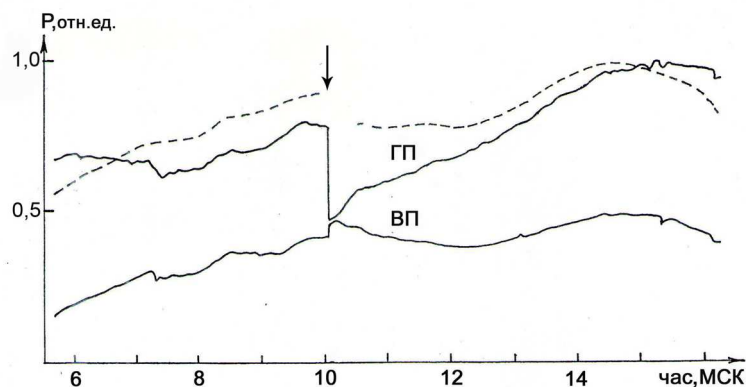
Последующие эксперименты неожиданно выявили высокую чувствительность к медленным волновым воздействиям на прохождение зондирующего сигнала через лёд в конце зимнего периода. Было обнаружено влияние приливной волны (в экстремальный момент в фазе полнолуния) на интенсивность проходящего излучения – рис. 2. Однако не было ясно, почему наблюдалось различие характера сигнала на двух используемых поляризациях. Эффект наблюдали только на горизонтальной поляризации (ГП – для волны с электрическим вектором в горизонтальной плоскости). При этом средняя интенсивность излучения на горизонтальной поляризации была заметно выше, чем на вертикальной (ВП). Излучение в данном эксперименте осуществляли на круговой поляризации, т.е. интенсивность сигнала на двух линейных ортогональных поляризациях должна была бы быть одинаковой.



**Рис. 2.** Измеренная мощность излучения  $P$  (в относительных единицах), прошедшего через ледяной покров на длине волны 2,2 см на двух ортогональных поляризациях:

1 – на горизонтальной; 2 – на вертикальной.

Стрелками отмечены моменты максимумов приливов, соответствующие экстремальным положениям Луны и Солнца для данной местности во время полнолуния  
Поляризация излучаемой волны – круговая. Время местное



**Рис. 3.** Регистрация прохождения уединенной волны в ледяном покрове 26.02.98 на длине волны 2,3 см в 10.05 МСК (отмечено стрелкой) по изменению принимаемой мощности излучения. ГП – сигнал на горизонтальной поляризации, ВП – сигнал на вертикальной поляризации. Штриховая линия – сигнал на поляризации  $45^{\circ}$  (по часовой стрелке от вертикальной). Мощность  $P$  – в относительных единицах

Была предпринята попытка зарегистрировать также относительно быстрые уединённые волны, возникающие при землетрясениях и других импульсных воздействий на водную среду и ледяной покров. Эти эксперименты проводили в сейсмичном районе на льду Баргузинского залива оз. Байкал в феврале 1998 г. В один из дней было зафиксировано событие, относящееся к прохождению уединённой волны – рис. 3. Вероятное происхождение волны – разгрузка ледяного покрова от механических напряжений, вызванных тепловым расширением льда в дни потепления. Уединённая волна непосредственно ощущалась по колебаниям ледяного покрова и по сопутствующему звуковому эффекту в виде сильного гула над акваторией залива. В этом эксперименте также использовали излучение с круговой поляризацией и регистрацию на двух ортогональных линейных поляризациях.

Как и для предыдущего наблюдения (для приливной волны, рис. 2), полученные результаты (рис. 3) не удалось удовлетворительно объяснить. Необычность результатов заключалась в следующем. Во-первых, сигнал на ГП в момент прохождения уединённой волны резко уменьшился, а затем стал медленно нарастать, достигнув исходного уровня. Во-вторых, сигнал на ВП скачком незначительно вырос, при этом сигналы на двух поляризациях практически сравнялись по уровню, а затем сигнал на ВП несколько упал. Если бы возникли разрушения ледяной структуры, можно было бы ожидать одновременного понижения уровней сигнала на двух поляризациях, что не наблюдали.

### Качественная теория эффекта

В работах [3, 4] представлены аргументы, объясняющие аномалии электромагнитных свойств ледяных покровов, связанные с представлением о появлении в них когерентных и некогерентных добавочных волн. Когерентные волны, как показали эксперименты, приводят к медленным изменениям общей интенсивности проходящего через лёд электромагнитного излучения, в то время как некогерентные могут быть ответственными как за медленные, так и быстрые вариации суммарной интенсивности излучения. Предполагается, что некогерентные волны возникают на плёнках, где происходит разрыв водородных связей молекул воды в структуре льда и возникает отрицательная дифференциальная вязкость среды. Эффект быстрого нарастания деформации хорошо известен для кристаллов льда [7]. Поскольку молекулы воды представляют из себя электрические диполи, можно предположить возникновение отрицательного дифференциального сопротивления таких областей среды. Как известно, токи в цепи с отрицательным сопротивлением могут быть несколько усилены и создать рост интенсивности электромагнитного поля при его переизлучении. Из-за хаотического распределения областей течения кристаллов в объёме ледяного тела возникает некогерентное поле, для которого складываются не амплитуды волн, а их интенсивности.

Однако этот эффект может быть заметен только для среды с ориентированными определённым образом оптическими осями кристаллов льда. Пространственная упорядоченность главных оптических осей кристаллов льда (С-осей) характерна для озерного льда [7], что было подтверждено



для объектов, на которых выполнялись эксперименты [3]. Оказалось, что  $S$ -оси, начиная с глубин 20–30 см ориентированы преимущественно вертикально. Это означает, что базисные плоскости кристаллов расположены параллельно поверхностям покрова. Известно, что кристаллы льда наиболее легко деформируются путём сдвига вдоль базисных плоскостей [8]. Следовательно, в изучаемых объектах должна была происходить пластическая деформация преимущественно в плоскостях параллельных границам раздела льда с окружающей средой.

Предложенные качественные представления позволяют полностью объяснить наблюдаемые явления в экспериментах по радиолокационному зондированию ледяных покровов. Так, на рис. 2 слабое течение среды (ползучесть) при экстремуме приливной волны также достигало максимума и порождало некоторое усиление сигнала на ГП, так как именно на горизонтальной поляризации вектор электрического поля волны совпадал с базисной плоскостью кристаллов среды. Поскольку экстремумов приливной волны два за сутки – наблюдали два максимума интенсивности электромагнитного поля на ГП. Один суточный экстремум на ВП объясняется естественным ходом изменения свойств льда из-за вариаций дневной и ночной температуры.

Особенности графиков на рис. 3 объясняются следующим образом. При возникновении в ледяном покрове механических напряжений и появлении течения кристаллов среды вдоль базисных плоскостей, сигнал на ГП возрастает по сравнению с сигналом на ВП. В момент разгрузки напряжения из-за прохождения уединённой волны, течение среды прекращается и сигналы на двух поляризациях выравниваются. Последующий медленный рост интенсивности излучения на ГП определяется накоплением напряжений на данном участке ледяного покрова. Небольшой рост сигнала на ВП может объясняться тем, что некоторая часть кристаллов льда ориентирована базисными плоскостями вертикально. Таким образом, по характеру изменения сигнала можно определять динамику изменения механических напряжений в структурированном льду.

### Предлагаемая методика регистрации напряжений

Полученные результаты показывают возможность регистрации механических напряжений в любых ледяных телах с преимущественной пространственной ориентацией  $S$ -осей при использовании метода двухпозиционной радиолокации, аналогичного представленной на схеме рис. 1. Если такая преимущественная ориентация кристаллов известна, то по поляризационным измерениям (лучше на нескольких линейных поляризациях, например на 12-ти, распределённых через 15 градусов) при просвечивании объекта можно наблюдать картину развития течения ледяного тела. Если использовать излучатель, создающий волну на круговой поляризации, то течение будет проявляться в искажениях поляризационной диаграммы мощности.

Детали метода требуют уточнений, так как природные объекты содержат разнообразные примеси – соли, жидкие и газовые включения, а также имеют сложную геометрию и кристаллическое строение. В этих случаях, наряду с поляризационными исследованиями, требуется изучение спектральных характеристик, позволяющие выбрать оптимальные длины волн зондирующих излучений. Важным является и знание электрических характеристик включений в лёд, поскольку будет необходима предварительная информация о свойствах такого льда. Для количественного определения напряжений может потребоваться привлечение других методов измерений для калибровки данных.

При использовании предлагаемой методики принципиально возможна и оценка анизотропии кристаллического строения ледяного тела, а также наблюдение динамики развития процесса пластической деформации.

### Выводы

Предполагается, что метод радиопросвечивания ледяных тел на основе использования некогерентных добавочных волн позволяет оценить характер внутренних механических напряжений и течение среды по поляризационным радиолокационным измерениям. По-видимому, измерения возможны не только при двухпозиционной локации, но и при использовании совмещённых в пространстве приёмнике и передатчике.

*Список литературы*

1. Богородский В. В., Бентли Ч., Гудмансен П. Радиогляциология. Л.: Гидрометеоиздат, 1983. 318 с.
2. Бордонский Г. С., Гурулев А. А. Возможные ошибки при интерпретации данных радиозондирования ледяных покровов // Исследование Земли из космоса. 2007. № 4. С. 3–7.
3. Бордонский Г. С., Гурулев А. А., Крылов С. Д., Орлов А. О., Цыренжапов С. В. Поляризационные аномалии микроволнового излучения и добавочные электромагнитные волны в деформируемых ледяных покровах // Журнал технической физики. 2011. Т. 81. Вып. 9. С. 93–99.
4. Бордонский Г. С., Гурулев А. А., Крылов С. Д. Влияние температурных напряжений на микроволновые поляризационные характеристики ледяных покровов // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. 2011. Т. 8. № 2. С. 18–25.
5. Бордонский Г. С., Крылов С. Д., Рябова Л. Д., Савиных А. М. Влияние механических деформаций на электромагнитные потери ледяного покрова в сантиметровом диапазоне // Исследование Земли из космоса, 1996. Т. 14. № 1. С. 33–40.
6. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М.: Изд-во АН СССР, 1957. 502 с.
7. Паундер Э. Р. Физика льда. М.: Мир, 1967. 192 с.
8. Petrenko V., Whitworth R.W. Physics of ice. Oxford Univ. Press, 2002. 347 p.

Статья поступила в редакцию 21.01.2012 г.

УДК 621.548  
ББК 3 25

**Олег Иванович Вийтович**  
старший преподаватель,  
Забайкальский государственный университет  
(Чита, Россия), e-mail: [Vijtjvich-O@mail.ru](mailto:Vijtjvich-O@mail.ru)  
**Виктор Гаврилович Телешов**  
кандидат технических наук, доцент,  
Забайкальский государственный университет  
(Чита, Россия), e-mail: [Vijtjvich-O@mail.ru](mailto:Vijtjvich-O@mail.ru)

**Анализ солнечной энергии, поступающей на поверхность Земли с применением статистических данных природно-климатических условий по Забайкальскому краю**

Проанализированы факторы, характеризующие природно-климатические условия Забайкалья, выявлены зависимости основных доминирующих климатических, экологических, экономических и технологических факторов, определяющих эффективность при проектировании нетрадиционных ветроустановок, в различных климатических условиях, которые имеют математическую сущность. По результатам проведенных статистических данных УГМС по Забайкальскому краю, климатических, экологических, технологических, и экономических факторов выявлены прямые связи их параметров, на основе которых разработано уравнение множественной регрессии, способствующее определению скорости ветрового потока, солнечной радиации и температуры воздуха в заданный период времени. Одной из задач при проектировании ветроустановок является определение количества солнечной радиации поступающей на горизонтальную поверхность Земли, что позволяет спрогнозировать значения одной переменной, на основе значений двух или нескольких независимых переменных.

*Ключевые слова:* скорость ветрового потока, ветроустановка, электромагнитная волна, множественная регрессия, энергетическая освещенность, лучистый поток энергии, солнечная энергия.

**Oleg Ivanovich Viytovich**  
Assistant Professor,  
Trans-Baikal State University  
(Chita, Russia), e-mail: [Vijtjvich-O@mail.ru](mailto:Vijtjvich-O@mail.ru)  
**Victor Gavrilovich Teleshov,**  
Candidate of Technical Sciences,  
Associate Professor, Trans-Baikal State University  
(Chita, Russia), e-mail: [Vijtjvich-O@mail.ru](mailto:Vijtjvich-O@mail.ru)

**Analysis of Solar Energy Reaching the Earth's Surface with the Use of Statistical Data of the Trans-Baikal Climatic Conditions**

The article analyzes the factors that characterize the Trans-Baikal climatic conditions, identifies the dependencies of the main dominant climatic, environmental, economic, and technological factors that determine the effectiveness of designing non-traditional wind turbines in various climatic conditions, which are of a mathematical character. The analysis of the results of the Trans-Baikal statistical data, its climatic, ecological, technological and economic factors identified a direct link of their parameters on the basis of which the multiple regression equation was developed to define the wind flow speed, solar radiation and air temperature at a given time period. One of the objectives in the design of wind turbines is to determine the amount of solar radiation received on the horizontal surface of the Earth that allows predicting the values of one variable, on the basis of the values of two or more independent variables.

*Keywords:* wind flow speed, wind turbine, electromagnetic wave, multiple regression, irradiance, radiant flux of energy, solar energy.

За последние десятилетия мировая промышленность увеличила воздействие на окружающую среду. Возросли потребности в энергоресурсах, увеличилась численность населения. Происходит нерациональное использование энергоресурсов и использование природных ископаемых. Для стабильной работы промышленных предприятий народного хозяйства необходимы энергоресурсы, так называемые альтернативные источники электрической энергии. В этом направлении необходимо выделить взаимовлияющие факторы, которые включают климатические, технологические, экологические, технические и экономические связи, обуславливающие нормальное функционирование нетрадиционных ветроустановок на всех этапах эксплуатационного цикла с позиции надёжности [1; 6; 7].

Солнечная радиация, поступающая на земную поверхность, является одним из основных климатических факторов. В свою очередь, она в значительной степени зависит от циркуляции атмосферы и особенностей подстилающей поверхности.

Возникновение максимальных, положительных температур непосредственно связано с уровнем солнечной радиации. Исследования показывают, что температура  $40^{\circ}$  наблюдается от тропических до умеренных широт. Распределение высоких температур на континентах хорошо согласуется с распределением солнечной радиации.

Воздействие солнечной радиации на технические изделия определяется диапазоном электромагнитных волн, достигающих их поверхности [1; 2; 5; 8].

Солнечная радиация представляет собой электромагнитную радиацию, распространяющуюся в виде электромагнитных волн. До земной поверхности она доходит в виде прямой и рассеянной радиации, а их совокупность называется суммарной радиацией. Прямая радиация – это радиация, которая достигла горизонтальной поверхности Земли. Проходя через атмосферу, солнечная радиация частично рассеивается воздухом и аэрозолями, а также облаками, называется рассеянной радиацией. Забайкальский край отличается большим количеством солнечных дней.

Режим солнечной радиации характеризуется распределением радиационного баланса, учитывающего приход – расход энергии солнечной радиации. Атмосфера, окружающая Землю, поглощает около 19 % солнечной энергии (водяным паром, озоном, углекислым газом, пылью и другими составляющими атмосферы). Около 35 % солнечной энергии поглощается в космическом пространстве. Спектр излучаемой Солнцем энергии состоит из следующих составляющих: ультрафиолетовая часть – длина волны менее  $3900 \cdot 10^{10}$  м, видимая часть спектра – длина волны  $3900 \cdot 10^{10} - 7600 \cdot 10^{10}$  м, инфракрасная часть спектра – длина волны  $7600 \cdot 10^{10} - 1000000 \cdot 10^{10}$  м. На волны ультрафиолетовой части спектра приходится около 9 % энергии солнечного излучения, на волны видимой части спектра – около 41 % и на инфракрасные волны – около 50 %.

Основным источником энергии всех происходящих процессов на Земле является солнечная энергия. Источником солнечной энергии являются ядерные превращения водорода в гелий в центральной части Солнца, температура которой составляет около 15 млн К [3, 4].

Физико-географические условия Забайкалья накладывают свой отпечаток как в распределении числа случаев сильного ветра, так и в частоте их возникновения в каждом отдельном пункте. Наибольшая повторяемость сильных ветров приходится на юго-восточные (степные) районы Забайкальского края и долины в южной части Бурятии.

На основании данных метеостанций Забайкальского края сформирована таблица солнечной радиации за 1999–2008 гг. (табл. 1) [4; 5; 6].

Подставив эти значения, получим мощность, излучаемую Солнцем на горизонтальную поверхность Земли. Солнечная энергия влияет на систему движений атмосферного воздуха в масштабе всей Земли. Шарообразная форма Земли обуславливает неравномерность поступления тепла от Солнца к полюсам и в тропическую зону. Вследствие этого возникает разница в температуре между тропическими, полярными и умеренными широтами. Неравномерность нагревания атмосферы Земли является основным источником энергии для движения воздушных масс и развития циркуляции в мировом воздушном океане [3; 4].

На мощность лучистого потока энергии Солнца на поверхность земли оказывают существенное влияние следующие факторы: циркуляция воздушных масс, загрязнённость воздуха, облачность, температура воздуха.

Таблица 1

**Статистические данные УГМС солнечной радиации за период с 1999–2008 гг., г. Чита (МДж/м<sup>2</sup>) × 100 [3; 4]**

Месяц	Год									
	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
январь	139	279	206	96	294	264	213	207	228	266
апрель	302	253	318	289	332	376	335	296	262	307
июль	338	436	402	375	294	423	335	369	302	396
октябрь	427	378	371	378	408	372	354	303	366	361

Поток энергии  $P$ , излучаемой Солнцем, равен произведению энергетической светимости Солнца на площадь  $S$  его поверхности:

$$P = 4\pi r^2 R_{\odot}, \quad (1)$$

где  $r$  – радиус Солнца;  $R_{\odot}$  – энергетическая светимость.

Определяем энергетическую освещённость  $E_{\odot}$  поверхности Земли (табл. 2), если разделим поток энергии  $P$ , излучаемой Солнцем, на площадь  $S$  поверхности сферы, радиус которой равен среднему расстоянию от Земли до Солнца по формуле:

$$E_{\odot} = P/4\pi R^2; \quad (2)$$

где  $R$  – среднее расстояние от Земли до Солнца (км);

$P$  – поток энергии, (МДж/м<sup>2</sup>) × 100.

Для экологического оздоровления воздушного бассейна необходимо внедрять альтернативные источники электрической энергии на основе использования ветрового потока.

Скорость ветрового потока имеет прямую зависимость с солнечной радиацией.

Таблица 2

**Расчётные данные энергетической освещённости за период с 1999–2008 гг., г. Чита (кВт/м<sup>2</sup>)**

Месяц	Год									
	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
01	0,94	0,98	0,92	0,34	1,04	0,93	0,75	0,73	0,81	0,94
04	1,28	1,34	1,13	1,02	1,17	1,33	1,2	1,05	0,93	1,28
07	1,45	1,8	1,42	1,33	1,04	1,5	1,2	1,3	1,06	1,45
10	1,4	1,25	1,31	1,34	1,44	1,32	1,25	1,07	1,3	1,4

На основе расчётных данных (табл. 2) строим сводный график среднемесячной энергетической освещённости за 10 лет с 1999–2008 гг., г. Чита. (январь, апрель, июль, октябрь).

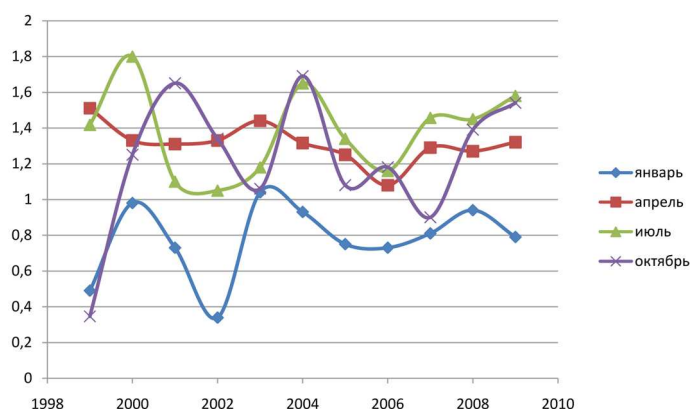
Её количество зависит от природно-климатических условий, определяемыми параметрами, приведёнными на (рис. 1). Обработка данных может быть выполнена с использованием множественной регрессии по определению скорости ветрового потока. Статистические характеристики климатических параметров имеют более компактную форму сбора данных и поэтому дают экономию расчетного времени.

При динамическом моделировании климатических условий используются прямые связи почасовые значения метеорологических факторов – солнечная радиация, температура воздуха, скорость ветрового потока.

Количество почасовых исходных данных настолько велико (за 10 лет для 5 станций составляет более 400 тыс. наблюдений), что стоимость обработки данных становится чрезмерно высокой. Для уменьшения стоимости расчётов при динамическом моделировании следует идти по пути выбора стандартного (базисного) расчётного года.

Климатические параметры – солнечная радиация, температура воздуха, скорость ветрового потока, все эти величины изменяются во времени. Годовой ход средней скорости ветра относится к климатическим характеристикам и зависит от географического положения пункта.

График энергетической освещённости с 1999–2008 гг., г. Чита



В умеренных и полярных широтах на западных окраинах материков северного полушария наибольшая скорость ветра наблюдается зимой, когда разность температур между этими широтами наиболее велика и, соответственно, велика разность давления. К лету, с уменьшением контраста температур и, следовательно, градиентов давления, ветер ослабевает. Однако в центре крупного Евро-Азиатского материка, в Сибири, зимой в области мощного антициклона отмечаются наименьшие скорости ветра и даже штили, а летом скорости ветра наибольшие.

По статистическим данным метеостанций, на основании которых построены графики средней скорости ветрового потока (за основу взят г. Чита) [3; 4] сформирована (табл. 3) средняя скорости ветра в городе Чита, Борзя, Мангут за 10 лет.

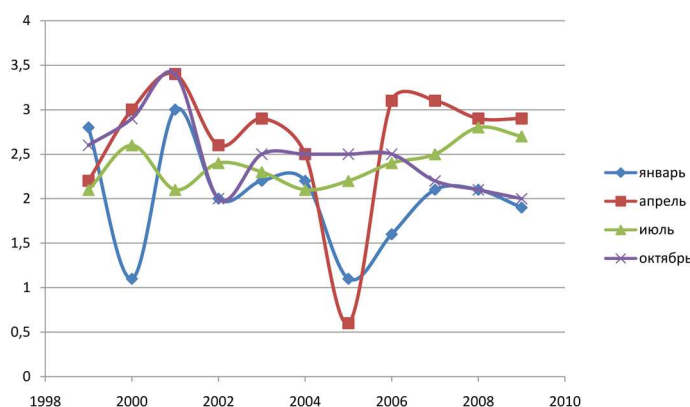
Таблица 3

Данные УГМС средней скорости ветра г. Чита с 1999–2008 гг. [3,4]

Месяцы	Год									
	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
01	2,8	1,1	3	2	2,2	2,2	1,1	1,6	2,1	2,1
04	2,2	3,0	3,4	2,6	2,9	2,5	0,6	3,1	3,1	2,9
07	2,1	2,6	2,1	2,4	2,3	2,1	2,2	2,4	2,5	2,8
10	2,6	2,9	3,4	2,0	2,5	2,5	2,5	2,5	2,2	2,1

На основании данных УГМС (табл. 3) строим график среднегодовой скорости ветрового потока за 10 лет с 1999–2008 гг. по г. Чита (январь, апрель, июль, октябрь).

График среднегодовой скорости ветрового потока с 1999–2008 гг., г. Чита



При анализе климатической обстановки в конкретных районах эксплуатации важное значение имеют сведения о предельных значениях климатических факторов.

Для решения большого числа прикладных задач, связанных с проектированием, необходимо знание продолжительности действия как высоких, так и низких температур воздуха. Учёт экспериментальных температур и их продолжительности даёт возможность правильного выбора времени, режима хранения и эксплуатации техники, проведения испытаний и других видов работ.

При разработке требований к техническим устройствам и при проектировании ветроустановки возникает необходимость в определении продолжительности пребывания создаваемой данной установки в условиях с различной температурой окружающей среды и статистических характеристик распределения температуры воздуха за год.

При анализе состояния оборудования учитывается число дней с высокой температурой в течение месяца и в сумме за год. Число дней с  $T > 40$  рассчитывают по методике, предполагающей нормальное распределение максимальных температур. При нормальном распределении для расчёта применены два параметра: среднее значение температур и коэффициент варьирования [1; 2; 3].

В качестве коэффициента варьирования используется разность между абсолютным и средним максимумом. Схема прямых и косвенных связей климатического и экологического фактора приведена на (рис. 1).

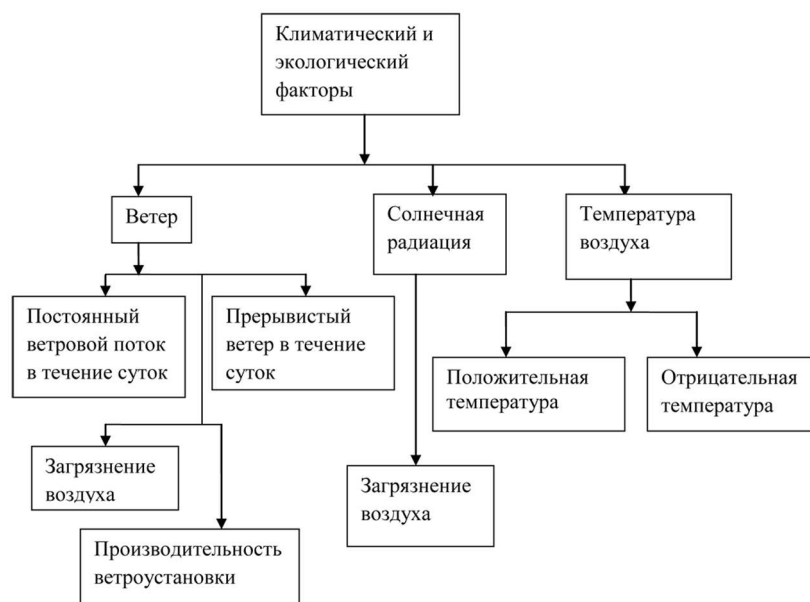


Рис. 1. Схема прямых и косвенных связей

Указанная разность  $T$  в большей части Забайкальского края колеблется около плюс 8 %  $C$  в среднем за месяцы, когда наблюдается такая высокая температура.

При оценке показателей надёжности оборудования приведены данные об изменениях температуры окружающего воздуха во времени.

Характер изменения температуры во времени описывается случайным процессом :

$$T(t) = T(t) + Y(t) \quad [1; 2; 3]. \quad (3)$$

### Прогноз температуры воздуха у поверхности земли по графикам суточного хода

В Забайкальском УГМС построены эмпирические графики суточного хода температуры воздуха у поверхности земли в зависимости от синоптической обстановки, для однородной воздушной массы для каждого месяца отдельно. В результате анализа установлено, что для теплого полугодия суточный ход температуры воздуха можно рассматривать отдельно для двух типов синоптического положения:

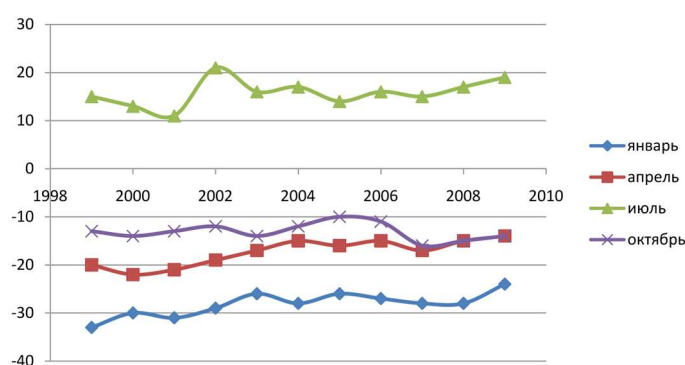
I тип, в который входят следующие процессы: передняя часть циклона, тёплый сектор циклона, периферия антициклона, антициклон, размытое барическое образование;

II тип – тыловая часть циклона [3].

Данные УГМС температуры наружного воздуха с 1999–2008 гг. Чита (январь, апрель, июль, октябрь) [3; 4]

Месяцы	Год										
	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
январь	-33	-30	-31	-29	-26	-28	-26	-27	-28	-28	-24
апрель	-20	-22	-21	-19	-17	-15	-16	-15	-17	-15	-14
июль	15	13	11	21	16	17	14	16	15	17	19
октябрь	-13	-14	-13	-12	-14	-12	-10	-11	-16	-15	-14

На основе таблицы (табл. 4) УГМС по Забайкальскому краю данных температуры наружного воздуха построим график за 10 лет с 1999–2008 гг., ( г. Чита).



Полученные результаты можно использовать в практической работе для прогноза температуры на любой час суток, а также минимальной и максимальной температуры при различном состоянии неба (рис. 2).

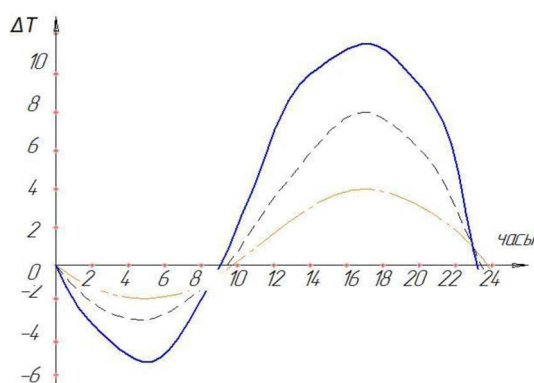


Рис. 2. Суточный ход температуры воздуха в г. Чите

В июне ясно (суммарная облачность 0–5 баллов); полужасно (суммарная облачность 6–7 баллов); -.-.-.-.- пасмурно (суммарная облачность 8–10 баллов).

Учёт экспериментальных данных и их продолжительности даёт возможность правильного выбора времени, режима хранения и эксплуатации техники, проведения испытаний и других видов работ. При разработке требований технических условий дают возможность разработать модель линейной множественной регрессии для определения скорости ветрового потока.

Множественная регрессия даёт возможность прогнозировать значения одной переменной  $Y$  на основе значений двух или нескольких независимых переменных  $X_1, X_2, \dots, X_m$





4. Смирнова Н. С., Солдатова Г. А. Климат Читы. Ленинград: Гидрометеиздат, 1982. 246 с.
5. Экологическая гидрология: учебник / Белоусова А. П. М.: Академкнига, 2007. 397 с.
6. Экология и экономика природопользования: учебник / под ред. Э. В. Гирусова; 3-е изд., перераб. и доп. М.: Юнити-Дана, 2007. 591 с.
7. Экология и безопасность жизнедеятельности: учеб. пособие для вузов / под ред. Л. А. Муравья. М.: Юнити-Дана, 2000. 448 с.
8. Экономика машиностроительного производства: учеб. пособие / под ред. О. Н. Герасимовой. М.: МГИУ, 2007. 128 с.
9. Энергетика и охрана окружающей среды / под ред. Н. Г. Залогина [и др.]. М.: Энергия, 1986. 352 с.

Статья поступила в редакцию 01.03.2012 г.

УДК 539.3  
ББК В251

*Михаил Сергеевич Воронин,*

*аспирант,*

*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева Сибирского отделения  
Российской академии наук (Новосибирск, Россия), e-mail: mohause@academ.org*

*Лев Александрович Мерзиевский,*

*доктор физико-математических наук,*

*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева Сибирского отделения  
Российской академии наук (Новосибирск, Россия), e-mail: merzh@hydro.nsc.ru*

### Моделирование ударно-волнового деформирования эпоксидной смолы<sup>1</sup>

Построены определяющие уравнения модели вязкоупругого тела максвелловского типа для описания поведения эпоксидной смолы при интенсивных динамических нагрузках, включающие уравнение состояния при нешаровом тензоре деформации и зависимость времени релаксации касательных напряжений от параметров, характеризующих состояние среды. Для идентификации параметров модели использованы экспериментальные диаграммы деформирования и данные об ударной сжимаемости конкретных смол. Решён ряд задач ударно-волнового деформирования.

*Ключевые слова:* эпоксидные смолы, уравнение состояния, время релаксации, ударно-волновые процессы.

*Mikhail Sergeevich Voronin,*

*Graduate Student,*

*Institute of Hydrodynamics named after M. A. Lavrentyev,  
Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences  
(Novosibirsk, Russia), e-mail: mihause@academ.org*

*Lev Alekseevich Merzhievsky,*

*Doctor of Physics and Mathematics,*

*Institute of Hydrodynamics named after M. A. Lavrentyev,  
Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences  
(Novosibirsk, Russia) e-mail: merzh@hydro.nsc.ru*

### Modeling Shock-wave Deformation of Epoxy Resin

The article presents the constructed equations of the model of viscoelastic body of Maxwell's type to describe the behavior of epoxy resin under intense dynamic loads, including the equation of state at nonorbicular deformation tensor and the dependence of the relaxation time of shear stress on the parameters that characterize the state of the environment. To identify the model parameters the study uses experimental deformation diagrams and data on the compressibility of specific resins. The article presents solutions to a number of shock-wave deformation problems.

*Keywords:* epoxy resins, equation of state, relaxation time, shock-wave processes

Эпоксидные смолы – олигомеры, содержащие эпоксидные группы и способные под действием отвердителей образовывать шпигые полимеры. Они нашли широкое применение в качестве связующего (матрицы) полимерных композитных материалов, элементов экспериментальных сборок при проведении ударно-волновых экспериментов, других устройствах, подвергающихся интенсивным внешним воздействиям. Этим обусловлен интерес к изучению их свойств и поведения при экстремальных, в том числе – ударно-волновых нагружениях. Экспериментальные данные об ударном сжатии эпоксидных компаундов приведены в [8; 9; 1; 14]. Ряд моделей, описывающих поведение эпоксидных смол, описан в [10; 11]. Они базируются на традиционном описании упругопластического деформирования, недостатки которого в случае применения к ударно-волновым процессам обсуждались в [6]. В данной работе для моделирования ударно-волнового деформирования строится

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке Интеграционного проекта СО РАН № 64.

модель вязкоупругой среды максвелловского типа, полная математическая формулировка которой приведена в [3], а методика построения замыкающих соотношений в [5; 7]. Для решения одномерных нестационарных задач использован численный метод, предложенный в [4]. Результаты решения позволяют проанализировать поведение материала в реализующихся условиях, а их сравнение с экспериментальными данными даёт возможность оценить применимость предлагаемой модели и метода расчёта для описания поведения данного материала при ударно-волновых нагрузках.

В одномерном нестационарном случае система уравнений используемой модели принимает вид [3]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho r^\nu)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u r^\nu)}{\partial r} &= 0, \quad \frac{\partial(\rho u r^\nu)}{\partial t} + \frac{\partial[(\rho u^2 - \sigma_1) r^\nu]}{\partial r} + \nu r^{\nu-1} \sigma_2 = 0, \\ \frac{\partial[\rho(E + u^2/2) r^\nu]}{\partial t} + \frac{\partial[(\rho u(E + u^2/2) - \sigma_1 u) r^\nu]}{\partial r} &= 0, \\ \frac{\partial h_2}{\partial t} + u \frac{\partial h_2}{\partial r} - \frac{\nu(3-\nu)u}{2} \frac{u}{r} &= -\frac{d_2}{\tau}, \quad \frac{\partial h_3}{\partial t} + u \frac{\partial h_3}{\partial r} - \frac{\nu(\nu-1)u}{2} \frac{u}{r} = -\frac{d_3}{\tau}, \\ \rho &= \rho_0 \exp(-h_1 - h_2 - h_3), \quad d_i = h_i - \frac{1}{3} \ln \frac{\rho}{\rho_0}, \\ E &= E(h_i, S), \quad \tau = \tau(h_i, S), \quad \sigma_i = \rho \frac{\partial E}{\partial h_i}, \quad T = \frac{\partial E}{\partial S}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\rho, u, E, S, T$  – плотность, скорость, удельная внутренняя энергия, энтропия и температура;  $\sigma_i$  – главные напряжения;  $h_i$  – логарифмы коэффициентов растяжения элемента среды вдоль главных осей;  $t, r$  – время и пространственная переменная;  $E(h_i, S)$  – уравнение упругой энергии при нешаровом тензоре деформаций;  $\tau(h_i, S)$  – зависимость времени релаксации касательных напряжений от параметров состояния среды,  $\nu$  – показатель симметрии:  $\nu = 0$  – плоская,  $\nu = 1$  – цилиндрическая,  $\nu = 2$  – сферическая.

При построении зависимости  $E(h_i, S)$  воспользуемся представлениями, явившимися основой классического уравнения состояния Ми-Грюнауизена, реализованными в [2]. Вначале запишем уравнение для свободной энергии  $F(\delta, D, T)$  в виде суммы упругой  $F_X$ , тепловой  $F_T$  и девиаторной  $F_{dev}$  составляющих:

$$F = F_X + F_{dev} + F_T, \quad (2)$$

где  $\delta, D$  – первый и второй инварианты тензора деформаций соответственно,

$$\delta = \exp[-(h_1 + h_2 + h_3)], \quad D = (d_1^2 + d_2^2 + d_3^2). \quad (3)$$

Переход от  $F(\delta, D, T)$  к  $E(\delta, D, T)$  и другим термодинамическим потенциалам осуществляется по формулам термодинамики:

$$\begin{aligned} E &= F - TS, \quad S(\delta, D, T) = - \left( \frac{\partial F}{\partial T} \right)_{h_i}, \\ dF &= -S dT + \frac{\sigma_i}{\rho} dh_i, \quad dE = T dS + \frac{\sigma_i}{\rho} dh_i. \end{aligned} \quad (4)$$

Составляющие (2) энергии имеют вид:

$$\begin{aligned} F_X(\delta) &= V_0 \left( \frac{a\delta^{m-1}}{m-1} + \frac{b\delta^{n-1}}{n-1} \right) - F_{X0}, \\ F_{dev}(\delta, D) &= 2c_\perp^2 \delta^{\xi_0} D, \\ F_T(\delta, T) &= R_m T \sum_{i=1}^3 N_i \ln(1 - e^{-x_i}) - \frac{1}{2} \beta(\delta) T^2, \\ x_i &= \frac{\theta_i(\delta)}{T}, \quad \theta_i = \theta_{0i} \delta^{\gamma_{0i}}, \quad \beta(\delta) = \beta_0 \delta^{-\Gamma_e}, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $V_0 = 1/\rho_0$ ;  $a, b, m, n$  – имеют смысл интерполяционных констант; константа  $F_{X0}$  выбирается из условия  $F_X(1) = 0$ ;  $c_{\perp}$  – поперечная скорость звука;  $\xi_0$  – интерполяционная константа;  $R_m$  – универсальная газовая постоянная, делённая на молярную массу,  $\theta_{0i}$  – характеристические температуры, определяемые экспериментально,  $\gamma_{0i}$  – интерполяционные константы, имеющие смысл аналогов коэффициента Грюнайзена для соответствующих колебательных мод,  $N_i$  – интерполяционные константы, удовлетворяющие условию  $\sum N_i = N$ , где  $N$  – полное число колебательных мод;  $\beta_0, \Gamma_e$  – интерполяционные константы, которые отличны от нуля в случае необходимости учёта теплового возбуждения электронов.

Входящие в приведённые соотношения параметры определяются с привлечением данных [15; 16] и сравнения расчетной и экспериментальной ударной адиабаты. На рис. 1, 2 сплошными линиями показаны ударная адиабата и изэнтропы разгрузки эпоксидной смолы, рассчитанные по построенному уравнению состояния, в сравнении с экспериментальными данными.

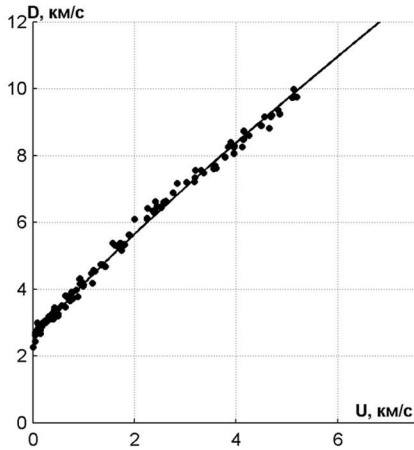


Рис. 1.

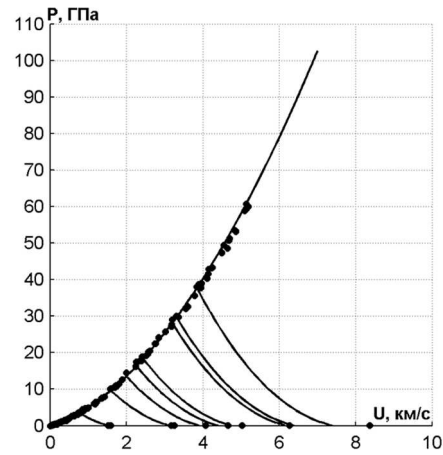


Рис. 2.

Исходя из термоактивируемого характера микроструктурных механизмов [1], для времени релаксации примем классическое соотношение Больцмана-Аррениуса:

$$\tau = \tau_0 \exp(U/RT), \quad (6)$$

где  $\tau_0$  – некоторое характерное время кинетической единицы, за счёт движений которой происходит релаксация,  $U$  – энергия активации соответствующего механизма релаксации,  $R$  – универсальная газовая постоянная,  $T$  – температура. Учёт влияния напряжённого состояния, изменения свободного объёма полимера при изменении температуры, а также возможность протекания нескольких релаксационных процессов приводят к усложнению этой зависимости:

$$\tau(\Sigma, T) = \sum_i \tau_{0i} \exp\left(\frac{U_{0i} - \alpha_i(T)\Sigma}{RT}\right),$$

$$\alpha_i(T) = \alpha_{0i}(1 + \alpha_{1i}\Delta T), \quad \Delta T = T - T_0, \quad 7$$

$$\Sigma = \sqrt{\frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]},$$

где  $\alpha_{0i}, \alpha_{1i}$  – интерполяционные константы,  $\Sigma$  – интенсивность касательных напряжений.

Для определения входящих в зависимость параметров воспользуемся разработанной в [7] методикой. Будем решать задачу об одноосном деформировании тонкого стержня. В предположении об однородности деформации все величины в исходной системе уравнений (1) являются функциями только времени, поэтому в итоге система упрощается и окончательно для описания одноосной деформации тонкого стержня принимает вид:

$$\frac{dh_1}{dt} = \dot{\epsilon} - \frac{2}{3} \frac{h_1 - h_2}{\tau},$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{2h_1 - h_2}{3} \frac{\sigma_1}{\tau \rho T},$$

$$\sigma_2 \equiv \sigma_3 \equiv 0, h_2 = h_3, \tag{8}$$

$$\sigma_i = \rho \left( \frac{\partial F}{\partial h_i} \right)_T, S = - \left( \frac{\partial F}{\partial T} \right)_{h_i}.$$

Результатом решения этой задачи являются диаграммы деформирования. Значения параметров в (7) определяются из условия наилучшего совпадения расчётных и экспериментальных диаграмм деформирования.

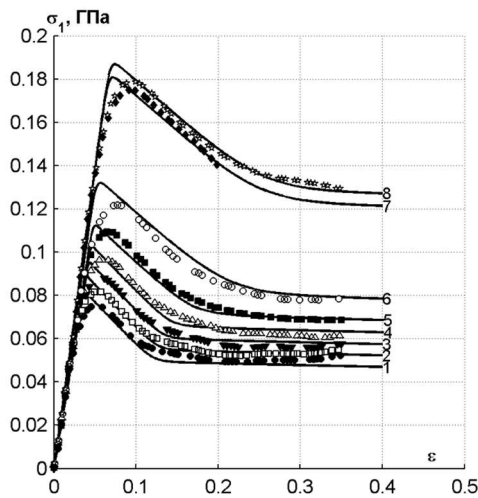


Рис. 3.

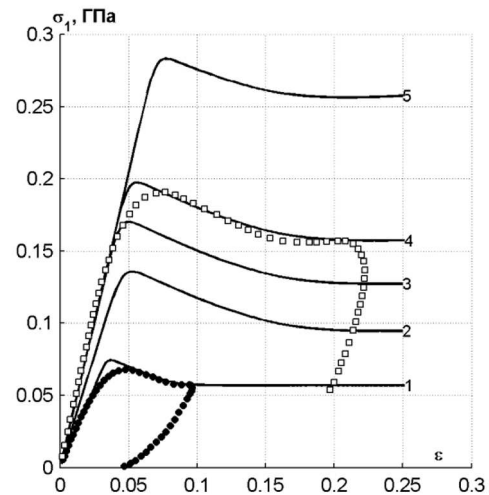


Рис. 4.

На рис. 3 сплошными линиями приведены результаты расчётов диаграмм деформирования эпоксидной смолы Epox 828/T-403 в сравнении с экспериментальными данными [10]. Кривые соответствуют следующим скоростям деформации: 1 –  $1,1 \cdot 10^{-4} \text{ c}^{-1}$ ; 2 –  $1,1 \cdot 10^{-3} \text{ c}^{-1}$ ; 3 –  $1,1 \cdot 10^{-2} \text{ c}^{-1}$ ; 4 –  $1,2 \cdot 10^{-1} \text{ c}^{-1}$ ; 5 –  $1,1 \text{ c}^{-1}$ ; 6 –  $12 \text{ c}^{-1}$ ; 7 –  $2500 \text{ c}^{-1}$ ; 8 –  $5200 \text{ c}^{-1}$ .

На рис. 4 сплошными линиями приведены рассчитанные диаграммы деформирования при скоростях деформации 1 –  $0,0167 \text{ c}^{-1}$ ; 2 –  $10 \text{ c}^{-1}$ ; 3 –  $100 \text{ c}^{-1}$ ; 4 –  $930 \text{ c}^{-1}$ ; 5 –  $106 \text{ c}^{-1}$  в сравнении с экспериментальными данными [15].

На рис. 5 результаты расчёта для RTM-6 (1 –  $0,01 \text{ c}^{-1}$ ; 2 –  $3900 \text{ c}^{-1}$ ; 3 –  $4800 \text{ c}^{-1}$ ; 4 –  $6000 \text{ c}^{-1}$ ), экспериментальные данные [11]. Характерной особенностью этого материала являются области изменения параметров, в которых диаграммы, соответствующие более низкой скорости деформации, идут выше чем, диаграммы, соответствующие большей скоростью.

С использованием построенных замыкающих соотношений решены задачи о распространении ударного импульса. В первом случае в постановке задачи воспроизводились условия экспериментов [14], в которых импульс создавался ударом плоского металлического ударника по плоскому экрану из того же металла, за которым располагались пластины из эпоксидной смолы. Измерения проводились с помощью двух манганиновых датчиков, первый из которых устанавливался на границе между экраном и образцом, а второй – между эпоксидными пластинами на расстоянии 10 мм от контактной границы экран – образец. На рис. 6 сплошными линиями показаны результаты расчётов в случае ударника из алюминия толщиной 10 мм при скорости удара 205 м/с, кривые 1; удара медным ударником толщиной 5 мм со скоростью 638 м/с, кривые 2, и медным ударником толщиной 3,5 мм со скоростью 826 м/с – кривые 3. Отметим, что наблюдающиеся отклонения рассчитанных профилей находятся в пределах экспериментального разброса величин, указанного в [14], но не приведённого на представленных рисунках.

На рис. 7 сплошными линиями показаны результаты расчёта аналогичной задачи, соответствующей экспериментам [9]. В этом случае использовались медный ударник и экран шириной 5 мм и

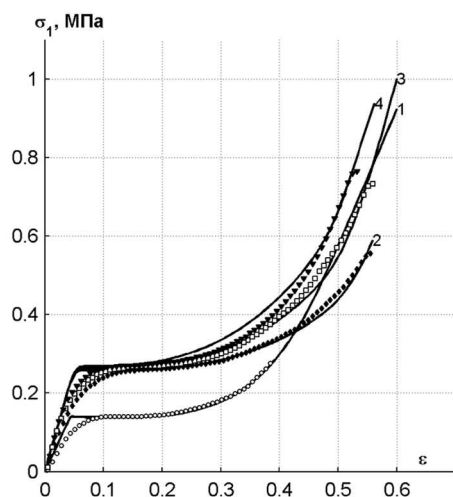


Рис. 5.

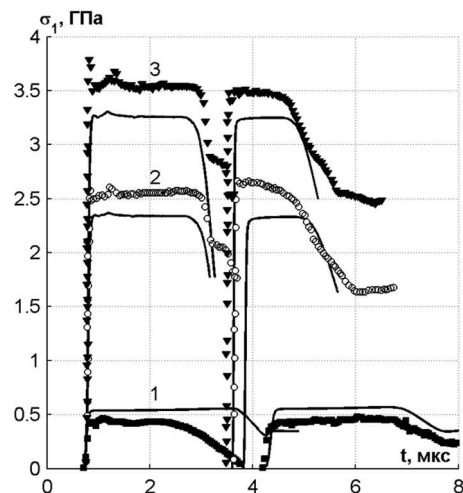


Рис. 6.

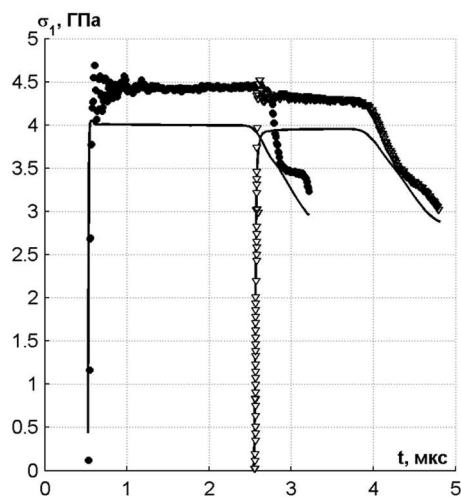


Рис. 7.

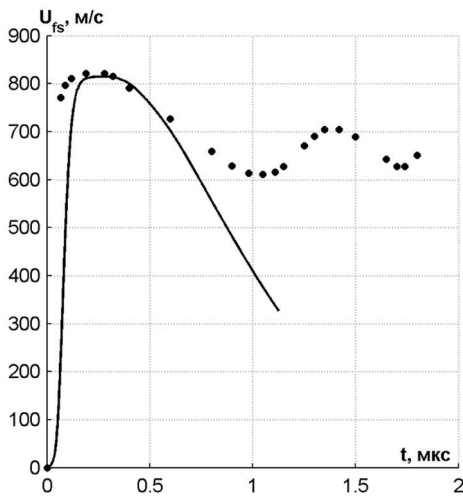


Рис. 8.

1 мм соответственно при скорости ударника 960 м/с. Вместо тыльной пластины из эпоксидной смолы была установлена пластина из ПММА. Манганиновые датчики устанавливались между экраном и образцом из эпоксидной смолы и между образцом и ПММА.

В экспериментах [12] по пластине из эпоксидной смолы толщиной 4,5 мм наносили удар ударником из ПММА толщиной 1,4 мм со скоростью  $850 \pm 30$  м/с. С помощью лазерного интерферометра фиксировалось изменение скорости свободной поверхности образца после выхода на неё ударной волны. На рис. 8 сплошной линией показан результат решения соответствующей задачи в сравнении с экспериментальными данными. В расчёте не учитывался реализовавшийся в эксперименте откол, поэтому расчётная зависимость не воспроизводит колебательный характер движения свободной поверхности, обусловленный циркуляцией откольного импульса.

Проведённое сравнение расчётных и экспериментальных данных показывает применимость построенной модели для решения задач ударноволнового деформирования эпоксидных смол.

#### Список литературы

1. Бартенев Г. М., Френкель С. Я. Физика полимеров. Л.: Химия, 1990.
2. Воронин М. С., Мерзиевский Л. А. Модель квазистатического и динамического деформирования эластомеров // Уч. зап. ЗабГГПУ. Сер. «Физика, математика, техника,

технология», 2011. № 3 (38). С. 53–59.

3. Годунов С. К. Элементы механики сплошной среды. М.: Наука, 1978. 304 с.
4. Мержиевский Л. А. //Динамика твердого тела (Динамика сплошной среды). Вып. 45. Новосибирск, 1980.
5. Мержиевский Л. А. Моделирование динамического сжатия поликристаллического  $Al_2O_3$ , ФГВ, 1998. Т. 34. № 6. С. 85–93.
6. Мержиевский Л. А., Реснянский А. Д. Численное моделирование ударно-волновых процессов в металлах // ФГВ. 1984. Т. 20. № 5. С. 114–122.
7. Мержиевский Л. А., Шамонин С. А. Построение зависимости времени релаксации касательных напряжений от параметров состояния среды // ПМТФ, 1980. № 5. С. 170–179.
8. Трунин Р. Ф., Гударенко Л. Ф., Жерноклетов М. В., Симаков Г. В. Экспериментальные данные по ударно-волновому сжатию и адиабатическому расширению конденсированных веществ. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2001. 446 с.
9. Appleby-Thomas G. J., Hazell P. J., Stennett C. The variation in lateral and longitudinal stress gauge response within an RTM 6 epoxy resin under one-dimensional shock loading // J. Mater. Sci., 2009. Vol. 44. P. 6187–6198.
10. Chen W., Zhou B. Constitutive Behavior of Epon 828/T-403 at Various Strain Rates // Mechanics of Time-Dependent Materials, 1998. Vol. 2. P. 103–111.
11. Gerlach R., Siviour C. R., Petrinic N., Wiegand J. Experimental characterisation and con-stitutive modelling of RTM-6 resin under impact loading // Polymer, 2008. Vol. 49. P. 2728–2737.
12. Kanel' G.I. et al. Experimental profiles of shock waves, Preprint of Scientific Association IVTAN of RAS, 1996.
13. Lindholm U. S. Some experiments with the split Hopkinson pressure bar // J. Mech. Phys. Solids, 1964. Vol. 12. P. 317–335.
14. Millett J. C. F., Bourne N. K., Barnes N. R. The behavior of an epoxy resin under one-dimensional shock loading // J. Appl. Phys., 2002. Vol. 92. №. 11. P. 6590–6594.
15. URL: <http://www.ficp.ac.ru/rusbank/> (дата обращения: 15.01.2012).
16. Wunderlich B. Thermal Analysis of Polymeric Materials, Springer Berlin Heidelberg, 2005.

Статья поступила в редакцию 18.02.2012 г.



УДК 537.226.1:537.311.322  
ББК В25

**Артём Каусарович Гильфанов,**  
научный сотрудник,  
Забайкальский государственный гуманитарно-педагогический университет  
им. Н. Г. Чернышевского (Чита, Россия) e-mail: artem\_gilfanov@mail.ru  
**Алексей Андреевич Калашников,**  
старший преподаватель,  
Забайкальский институт железнодорожного транспорта  
(Чита, Россия) e-mail: zeleny.83@mail.ru  
**Николай Петрович Степанов,**  
доктор физико-математических наук,  
Забайкальский государственный гуманитарно-педагогического университета  
им. Н. Г. Чернышевского (Чита, Россия) e-mail: np-stepanov@mail.ru

### Исследование анизотропии плазменного резонанса в твёрдых растворах теллурида висмута и теллурида сурьмы в инфракрасной области спектра при температурах от 78 до 293 К<sup>1</sup>

Исследованы спектры отражения поляризованного инфракрасного излучения от кристаллов твёрдых растворов  $(\text{Bi}_{2-x}\text{Sb}_x)\text{Te}_3$  ( $0 < x < 1$ ) в диапазоне температур от 78 до 293 К в области возбуждения плазменных колебаний свободных носителей заряда. Обнаружено, что при увеличении количества  $\text{Sb}_2\text{Te}_3$  в составе твёрдого раствора от 0 до 50 процентов, величина анизотропии плазменных частот и магнитной восприимчивости изменяется незначительно. Это свидетельствует о том, что в указанных кристаллах при температуре 293 К, вблизи уровня химического потенциала не происходит существенных изменений в составе групп свободных носителей заряда. Установлено, что для описания наблюдающейся анизотропии плазменных частот необходимо учитывать влияние тяжёлых дырок валентной зоны. Об этом же свидетельствуют и результаты исследования температурной зависимости спектров плазменного отражения, обнаруживающие закономерности, аналогичные аномальным температурным изменениям коэффициента Холла. Показано, что для описания уменьшения плазменных частот, наблюдающегося с ростом температуры, недостаточно увеличения эффективных масс носителей заряда в соответствии с выражением  $m^* \sim T^{0,17}$ , которое было получено при интерпретации результатов исследования температурной зависимости ряда кинетических коэффициентов. Эмпирическое правило Мосса  $\varepsilon_\infty^2 E_g = \text{const}$  было использовано для оценки скорости уменьшения ширины термической запрещённой зоны  $dE_g/dT = -1,6 \cdot 10^{-4}$  эВ/град в кристалле, содержащем 25 процентов  $\text{Sb}_2\text{Te}_3$ .

*Ключевые слова:* спектр отражения, анизотропия коэффициента отражения, зонная структура, теллурид висмута, теллурид сурьмы.

**Artyom Kausarovich Gilfanov,**  
Research Associate,  
Zabaikalsky State Humanitarian Pedagogical University  
named after N. G. Chernyshevsky (Chita, Russia), e-mail: artem\_gilfanov@mail.ru  
**Aleksey Andreevich Kalashnikov**  
Assistant Professor,  
Zabaikalsky Institute of Railway Transport (Chita, Russia), e-mail: zeleny.83@mail.ru  
**Nikolay Petrovich Stepanov**  
Doctor of Physics and Mathematics,  
Zabaikalsky State Humanitarian Pedagogical University  
named after N. G. Chernyshevsky (Chita, Russia), e-mail: np-stepanov@mail.ru

### Studying Anisotropy of Plasma Resonance in Solid Solutions of Bismuth Telluride and Antimony Telluride in the Infrared Spectrum at Temperatures Ranging from 78 to 293 K

The article investigates reflection spectra of polarized infrared radiation from  $(\text{Bi}_{2-x}\text{Sb}_x)\text{Te}_3$  ( $0 < x < 1$ ) solid solution crystals in the temperature range from 78 to 293

<sup>1</sup>Работа выполнена в рамках реализации АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы».

K, in the area of free carriers plasma oscillations excitation. It finds that with the increasing amount of  $\text{Sb}_2\text{Te}_3$  in solid solutions composition from 0 to 50 percent the value of anisotropy of plasma frequencies and magnetic susceptibility varies only slightly. This suggests that in given crystals at the temperature of 293 K near the chemical potential level there are no significant changes in the composition of groups of free carriers. To describe the observed anisotropy of the plasma frequencies it is necessary to take into consideration the impact of heavy holes in the valence band. It is also confirmed by the results of the study of the temperature dependence of plasma reflection spectra that reveal regularities similar to the anomalous temperature variations of the Hall coefficient. It shows that to describe the decrease in plasma frequencies observed with the increase in temperatures, the enlargement of effective mass of charge carriers according to the expression  $m^* \sim T^{0.17}$  is insufficient. This expression was obtained by interpreting the results of the study of temperature dependence of some kinetic coefficients. The empirical Moss rule  $\varepsilon_\infty^2 E_g = \text{const}$  was used to estimate the rate of the thermal band gap decrease  $dE_g/dT = -1,6 \cdot 10^{-4}$  eV/K in a crystal containing 25 percent of  $\text{Sb}_2\text{Te}_3$ .

*Keywords:* reflection spectrum, anisotropy of the reflection coefficient, band structure, bismuth telluride, antimony telluride.

### Введение

Твёрдые растворы  $\text{Bi}_2\text{Te}_3$ – $\text{Sb}_2\text{Te}_3$  продолжают оставаться предметом многочисленных и разно-сторонних экспериментальных исследований, вследствие их большой практической значимости для термоэлектрического материаловедения. Вместе с тем, остаётся актуальной задача проведения дополнительных исследований параметров зонной структуры и её перестройки при изменении состава твёрдого раствора  $\text{Bi}_2\text{Te}_3$ – $\text{Sb}_2\text{Te}_3$  и температуры. Решение указанной задачи предполагает использование разнообразных подходов. Одним из них является исследование анизотропии физических свойств, например, анизотропии плазменного отражения и магнитной восприимчивости. Действительно, сложная решётка, в которой кристаллизуются твёрдые растворы  $\text{Bi}_2\text{Te}_3$ – $\text{Sb}_2\text{Te}_3$ , приводит к значительной анизотропии физических свойств, учёт и исследование которой позволяют судить об изменениях, происходящих в валентной зоне или зоне проводимости в зависимости от изменения состава или температуры. Исследованию анизотропии гальваномагнитных свойств  $\text{Bi}_2\text{Te}_3$ – $\text{Sb}_2\text{Te}_3$  посвящены многочисленные работы, обзор которых приведён в монографии [1]. Результаты исследования анизотропии плазменных частот  $\omega_p$  в рассматриваемых материалах отражены в работах [13; 14; 16]. Анализ указанных работ позволяет утверждать, что анизотропия плазменного отражения кристаллов твёрдых растворов  $\text{Bi}_2\text{Te}_3$ – $\text{Sb}_2\text{Te}_3$ , и особенно её зависимость от температуры, исследована недостаточно подробно. Результаты исследования анизотропии магнитной восприимчивости  $\chi$  кристаллов  $\text{Bi}_2\text{Te}_3$ – $\text{Sb}_2\text{Te}_3$ , приведённые в работах [8; 12; 15], имеют противоречивый характер, что актуализирует задачу исследования  $\chi$  с привлечением современных технических средств. Необходимо отметить, что именно исследование анизотропии плазменных частот и магнитной восприимчивости, которые, как известно, напрямую не зависят от интенсивности рассеяния носителей заряда, выполненное на одних и тех же кристаллах, может дать дополнительную информацию о важнейших характеристиках материала.

В связи с вышеизложенным, целью настоящей работы явилось исследование анизотропии плазменных частот и магнитной восприимчивости кристаллов  $\text{Bi}_2\text{Te}_3$ – $\text{Sb}_2\text{Te}_3$  в зависимости от соотношения компонентов в составе твёрдого раствора и температуры, а также обнаружение корреляции в поведении оптических, магнитных и гальваномагнитных характеристик этих материалов.

### Кристаллы и образцы

Исследовались монокристаллы твёрдых растворов системы  $\text{Bi}_2\text{Te}_3$ – $\text{Sb}_2\text{Te}_3$ , содержащие 0, 10, 25, 40, 50 мол. %  $\text{Sb}_2\text{Te}_3$ , выращенные методом Чохральского в институте металлургии и материаловедения им. А. А. Байкова РАН. В качестве исходных материалов использовались Te, Sb, Bi, содержащие 99.9999 массовых % основного вещества. Химический состав выращенных монокристаллов определялся методом атомно-адсорбционной спектрометрии. Качество монокристаллов контролировалось методом рентгеновской дифракционной топографии.

Исследованные монокристаллы имели толщину 15–20 мм, хорошо выраженные плоскости спайности и массу 200–300 г. Образцы для оптических и магнитных измерений вырезались из слитка при

помощи электроискровой резки, и затем очищались травлением. Характерные размеры образцов для оптических измерений  $10 \times 8 \times 6$  мм и для магнитных измерений  $2 \times 2 \times 4$  мм.

### Методика и техника эксперимента

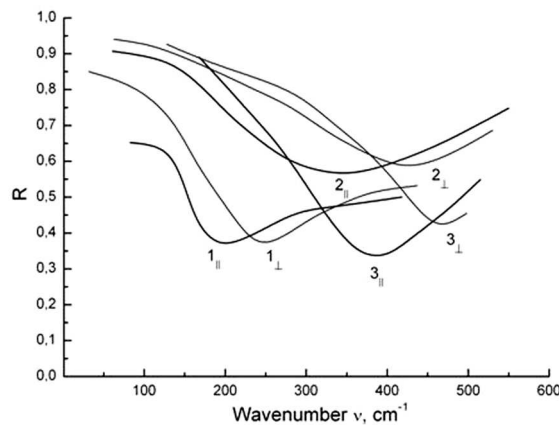
Регистрировались спектры отражения неполяризованного и поляризованного излучения как от свежеприготовленного скола кристалла по плоскости спайности, обладающей зеркальным блеском, так и от полированной поверхности, содержащей оптическую ось кристалла  $C_3$ . Угол падения излучения на образец не превышал 8 градусов.

Измерения  $R(\nu)$  при температуре  $T = 293$  К проводились на фурье-спектрометрах PERKIN ELMER 1720X и SHIMADZU FTIR-8400S в диапазоне  $400\text{--}4000$   $\text{см}^{-1}$  с разрешением  $1$   $\text{см}^{-1}$ . Низкотемпературные измерения от 78 до 293 К были выполнены на фурье-спектрометре BRUKER IFS-113V в диапазоне  $50\text{--}600$   $\text{см}^{-1}$  с разрешением  $1$   $\text{см}^{-1}$ .

В данной работе приведены и результаты исследований магнитной восприимчивости при температуре 293 К, которые проводились в магнитных полях до 30 кЭ на сверхпроводящем квантовом интерферометре Джозефсона (SQUID-магнетометре) при двух ориентациях вектора напряжённости магнитного поля  $H$  по отношению к  $C_3$  ( $H \parallel C_3$  и  $H \perp C_3$ ).

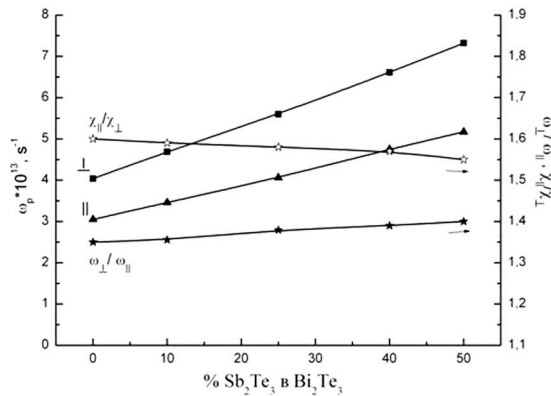
### Экспериментальные результаты

Результаты оптических измерений представлены на рис. 1, на котором приведены спектры отражения двух образцов  $(\text{Bi}_{2-x}\text{Sb}_x)\text{Te}_3$  с  $x = 0$  и  $0,8$ , имеющие вид, характерный для плазменного резонанса свободных носителей заряда. Как видно из рис. 1, в спектрах наблюдается минимум отражения, положение и глубина которого зависят от процентного содержания  $\text{Sb}_2\text{Te}_3$  в твёрдом растворе  $\text{Bi}_2\text{Te}_3\text{--Sb}_2\text{Te}_3$ , температуры, а также от взаимной ориентации вектора напряжённости  $E$  падающего электромагнитного излучения и оптической оси кристалла  $C_3$ .



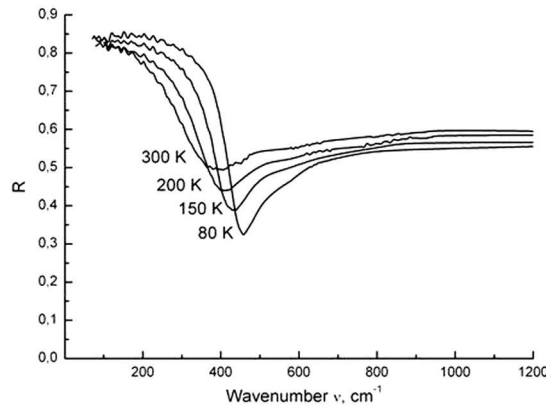
**Рис. 1.** Спектры отражения поляризованного излучения образцов:  $1_{\perp}, 1_{\parallel}$  —  $\text{Bi}_2\text{Te}_3$ ,  $T = 293$  К;  $2_{\perp}, 2_{\parallel}$  —  $\text{Bi}_{1,2}\text{Sb}_{0,8}\text{Te}_3$ ,  $T = 293$  К;  $3_{\perp}, 3_{\parallel}$  —  $\text{Bi}_{1,2}\text{Sb}_{0,8}\text{Te}_3$ ,  $T = 78$  К. Индексы  $\parallel$  и  $\perp$  означают, что  $E \parallel C_3$  и  $E \perp C_3$  соответственно

Наблюдающееся изменение положения плазменных минимумов от состава твёрдого раствора обусловлено изменением концентрации свободных носителей заряда  $p$  (дырок), увеличивающейся с ростом количества  $\text{Sb}_2\text{Te}_3$ . Анизотропия плазменного отражения связана с анизотропией эффективных масс носителей заряда и диэлектрической проницаемости [14]. Все полученные спектры обрабатывались при помощи соотношений Крамерса-Кронига, позволяющих из спектра коэффициента отражения рассчитать спектральные зависимости действительной  $\epsilon_1$  и мнимой  $\epsilon_2$  частей функции диэлектрической проницаемости, а также функции энергетических потерь  $-\text{Im} \epsilon^{-1} = \epsilon_2(\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2)^{-1}$ , характеризующей скорость производства энтропии в системе. Общая картина изменения анизотропных плазменных частот, определяемых по максимуму функции энергетических потерь, в соответствии с методикой, описанной в работе [5], в зависимости от состава твёрдого раствора  $\text{Bi}_2\text{Te}_3\text{--Sb}_2\text{Te}_3$ , представлена на рис. 2.



**Рис. 2.** Изменение плазменных частот, их анизотропии  $\omega_{p\perp}/\omega_{p\parallel}$  и анизотропии магнитной восприимчивости  $|\chi_{\parallel}|/|\chi_{\perp}|$  в зависимости от состава твёрдого раствора  $\text{Bi}_2\text{Te}_3\text{-Sb}_2\text{Te}_3$  при температуре 293 К

На этом же рисунке приведены и результаты исследования анизотропии плазменных частот и магнитной восприимчивости, полученные при температуре 293 К. Как видно из рисунка, наблюдается незначительное изменение анизотропии  $\omega_p$  и  $\chi$  при увеличении количества  $\text{Sb}_2\text{Te}_3$  в составе твёрдого раствора. Обращает на себя внимание тот факт, что  $\omega_{p\perp} > \omega_{p\parallel}$ , в то время как  $|\chi_{\parallel}| > |\chi_{\perp}|$ . Это обстоятельство связано с тем, что величина магнитной восприимчивости свободных носителей заряда зависит от соотношения парамагнитного вклада Паули и доминирующего в исследуемых материалах диамагнитного вклада Ландау-Пайерлса.



**Рис. 3.** Спектры отражения образца  $\text{Bi}_{1.5}\text{Sb}_{0.5}\text{Te}_3$  в зависимости от температуры  $E \perp C_3$

На рис. 3 приведена динамика изменения спектров плазменного отражения, полученных от скола образца  $\text{Bi}_{1.5}\text{Sb}_{0.5}\text{Te}_3$  по плоскости спайности  $E \perp C_3$ , в зависимости от температуры. Сдвиг плазменного минимума в низкочастотную область спектра, наблюдающееся при увеличении температуры, требует анализа, учитывающего температурное изменение поляризационного фона кристалла  $\epsilon_{\infty}$ , концентрации дырок  $p$  и эффективных масс носителей заряда  $m^*$ . Обращает на себя внимание и динамика изменения величины коэффициента отражения в высокочастотной области спектра  $R_{\infty}$ . Как видно из рис. 3,  $R_{\infty}$  монотонно увеличивается с ростом температуры, что свидетельствует и об увеличении  $\epsilon_{\infty}$ , так как при изменении частоты  $\omega \rightarrow \infty$   $R \rightarrow \left(\frac{\epsilon_{\infty}^{0.5} - 1}{\epsilon_{\infty}^{0.5} + 1}\right)^2$  [7].

Изменение величины плазменных частот и их анизотропии от температуры для кристалла  $\text{Bi}_{1.2}\text{Sb}_{0.8}\text{Te}_3$ , характерное и для других образцов, исследованных в данной работе, приведено на рис. 4. Как видно из рисунка, наблюдается увеличение анизотропии плазменных частот с ростом температуры, что свидетельствует не только о количественных, но и возможных качественных изменениях в составе носителей заряда вблизи уровня химического потенциала с повышением темпе-

ратуры.

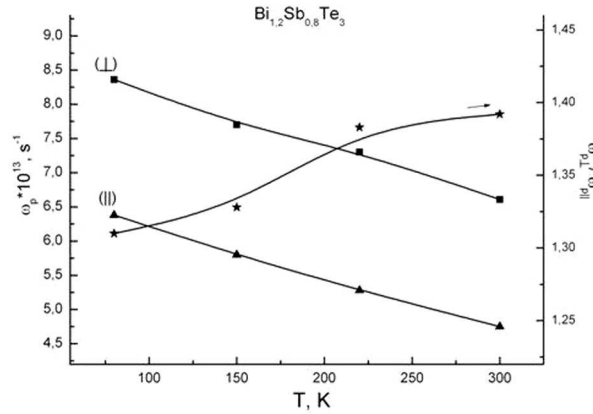


Рис. 4. Температурная зависимость величины плазменных частот и их анизотропии  $\omega_{p\perp}/\omega_{p\parallel}$  образца  $\text{Bi}_{1.2}\text{Sb}_{0.8}\text{Te}_3$

### Анализ экспериментальных результатов

Как видно из рис. 1 и рис. 2, для всех исследованных кристаллов  $\omega_{p\perp\text{min}} > \omega_{p\parallel\text{min}}$ . В соответствии с выражением

$$\omega_p^2 = \frac{e^2}{\varepsilon_\infty \varepsilon_0} \cdot \frac{p}{m^*} \quad (1)$$

наблюдающаяся анизотропия плазменных частот обусловлена анизотропией высокочастотной диэлектрической проницаемости  $\varepsilon_\infty$  и эффективной массы носителей заряда  $m^*$ . Для выделения вклада в анизотропию от  $m^*$  целесообразно рассмотреть отношение

$$A_{m \text{ exp}} = \frac{\omega_{p\perp}^2 \varepsilon_{\infty\perp}}{\omega_{p\parallel}^2 \varepsilon_{\infty\parallel}}. \quad (2)$$

Учитывая анизотропию высокочастотной диэлектрической проницаемости, которая в исследованных кристаллах  $\varepsilon_{\infty\perp}/\varepsilon_{\infty\parallel} \approx 1,6$ , а также то, что при температуре 293 К  $\omega_{p\perp}^2/\omega_{p\parallel}^2 \approx 1,82$ , получим  $A_{m \text{ exp}} = m_{\parallel}^*/m_{\perp}^* \approx 2,91$ , и таким образом  $m_{\perp}^* < m_{\parallel}^*$ .

Рассмотрим, насколько это соответствует представлениям о кристаллической структуре рассматриваемых материалов. Как уже было отмечено, кристаллы  $\text{Bi}_2\text{Te}_3$  и твёрдых растворов  $\text{Bi}_2\text{Te}_3\text{--Sb}_2\text{Te}_3$  обладают симметрией  $R3m$ . Элементами симметрии таких кристаллов являются центр инверсии, ось третьего порядка, проходящие через неё три плоскости отражения и три оси второго порядка, перпендикулярные оси третьего порядка [1]. Рассматриваемая симметрия  $R3m$  приводит к многодолинному типу зонной структуры. Для объяснения комплекса гальваномагнитных коэффициентов  $\text{Bi}_2\text{Te}_3$  с ярко выраженной и значительной анизотропией эффекта Холла, наблюдающейся в  $n$  и  $p$  типе  $\text{Bi}_2\text{Te}_3$ , Драбблом и Вольфом рассматривался вариант зонной структуры, содержащей 6 эллипсоидов, центрированных на осях плоскостей симметрии, причём одна из осей эллипсоида, совпадает по направлению с осью второго порядка [11]. Для шестиэллипсоидальной модели Драббла-Вольфа операции симметрии, связывающие эллипсоиды постоянной энергии, приводят к зависимости энергии от волнового вектора в системе координат, связанной с осями кристалла, имеющей следующий вид (после учёта равенства нулю недиагональных коэффициентов  $\alpha_{12} = \alpha_{23} = 0$  для эллипсоида, центрированного на плоскости отражения  $xz$ ):

$$\varepsilon(k) = \hbar^2/2m_0(\alpha_{11}k_1^2 + \alpha_{22}k_2^2 + \alpha_{33}k_3^2 + 2\alpha_{13}k_1k_3). \quad (3)$$

Исходя из этого выражения, для шестиэллипсоидальной модели Драббла-Вольфа эффективная масса восприимчивости для измерений вдоль оси  $C_3$   $m_{\parallel}^*$ , и перпендикулярно ей  $m_{\perp}^*$ , определяется следующим образом:

$$\frac{1}{m_{\parallel}^*} = \frac{\alpha_{33}}{m_0}, \quad \frac{1}{m_{\perp}^*} = \frac{\alpha_{11} + \alpha_{22}}{2m_0}, \quad (4)$$

где  $\alpha_{11} = c^2\alpha_1 + s^2\alpha_3$ ,  $\alpha_{22} = \alpha_2$ ,  $\alpha_{33} = s^2\alpha_1 + c^2\alpha_3$ ,  $c = \cos\nu$ ,  $s = \sin\nu$ , а  $\nu$  – угол наклона эллипсоида, центрированного на плоскости отражения  $xz$ , к оси кристалла  $y$ . Ось  $C_3$  направлена вдоль  $z$ . В  $p$ - $\text{Bi}_2\text{Te}_3$  угол  $\nu \approx 24^\circ$ . Подстановка компонент тензора эффективных масс для  $p$ - $\text{Bi}_2\text{Te}_3$  [1] в выражение

$$\frac{1}{\alpha_1} = \frac{m_0}{m_1} = 0,43, \quad \frac{1}{\alpha_2} = \frac{m_0}{m_2} = 0,048, \quad \frac{1}{\alpha_3} = \frac{m_0}{m_3} = 0,19 \quad (5)$$

позволяет получить  $m_\perp^* = 0,09m_0$ ,  $m_\parallel^* = 0,22m_0$ , откуда  $A_{m\text{ theor}} = m_\parallel^*/m_\perp^* \approx 2,44$ , т. е.  $m_\perp^* < m_\parallel^*$ , что согласуется с результатами исследования анизотропии плазменного отражения. Таким образом, использование параметров валентной зоны теллурида висмута даёт возможность на качественном уровне объяснить наблюдающуюся анизотропию плазменного отражения. Отметим, что значение  $A_{m\text{ theor}} = m_\parallel^*/m_\perp^* \approx 2,44$  отличается от  $A_{m\text{ exp}} = m_\parallel^*/m_\perp^* \approx 2,91$ , полученного из результатов исследования плазменного отражения. Это обстоятельство указывает на возможное влияние другой группы носителей заряда, также находящихся в валентной зоне.

О существовании подзоны тяжёлых дырок в глубине валентной зоны свидетельствуют и данные температурных измерений плазменного отражения. Так, на рис. 1 и рис. 3 наблюдается смещение плазменных минимумов в низкочастотную область спектра при увеличении температуры. Моделирование спектров отражения, представленных на рис. 3, в рамках классической электронной теории позволяет получить значения  $\omega_p$ ,  $\varepsilon_\infty$  и оптических времён релаксации  $\tau_{\text{opt}}$ , приведённые в таблице, из которой видна динамика изменения перечисленных параметров. Учитывая изменение значений  $\omega_p$  и  $\varepsilon_\infty$  с ростом температуры от 85 К до 293 К, в соответствии с выражением (1), получим, что соотношение  $p/m^*$  уменьшается в 1,47 раза.

Аналогичная картина уменьшения плазменных частот с температурой наблюдалась и в кристаллах висмут-сурьма, легированных акцепторной примесью олова [6], в которых рост температуры приводит к увеличению ширины запрещённой зоны в  $L$ -точке зоны Бриллюэна, и, как следствие, к уменьшению концентрации лёгких дырок. Это, вероятнее всего, и является доминирующей причиной уменьшения соотношения  $p/m^*$ . Однако, в кристаллах твёрдых растворов  $\text{Bi}_2\text{Te}_3$ - $\text{Sb}_2\text{Te}_3$ , в отличие от кристаллов висмут-сурьма, рост температуры сопровождается уменьшением ширины термической запрещённой зоны [1]. Об этом свидетельствуют и результаты наших исследований. Так, из рис. 3 видно, что  $\varepsilon_\infty$  увеличивается с ростом температуры. Это даёт возможность, используя эмпирическое соотношение Мосса

$$\varepsilon_\infty^2 E_g = \text{const}, \quad (6)$$

хорошо выполняющееся для типичных полупроводников, найти скорость изменения  $E_g$  по температурному изменению  $\varepsilon_\infty$  [2]. Расчёт показывает, что в соответствии с (6) наблюдается уменьшение  $E_g$  от 125 мэВ при  $T = 85$  К до 90 мэВ при  $T = 293$  К, откуда следует, что  $dE_g/dT = -1,6 \cdot 10^{-4}$  эВ/град, что в четыре раза больше значения  $dE_g/dT = -0,4 \cdot 10^{-4}$  эВ/град (в следующих работах, обзор которых приведён в [1]), но совпадает со значением  $dE_g/dT$ , определённым в работе [10]. В любом случае уменьшение термической ширины запрещённой зоны с ростом температуры не способствует уменьшению концентрации носителей заряда, а, следовательно, возможность уменьшения плазменных частот за счёт снижения концентрации носителей заряда в рамках однозонной модели необходимо исключить. В связи с этим, полагая, что в рассматриваемом образце  $\text{Bi}_{1,2}\text{Sb}_0,8\text{Te}_3$  концентрация дырок  $p$  при увеличении температуры не изменяется, можно полагать, что уменьшение соотношения  $p/m^*$  в 1,47 раза всецело обусловлено увеличением эффективных масс носителей заряда. Причём, 1,47 – это минимальное значение, характеризующее изменение  $m^*$ , и даже небольшой рост концентрации с температурой должен приводить к более быстрому увеличению  $m^*$ .

В соответствии с рис. 2, при увеличении количества  $\text{Sb}_2\text{Te}_3$  в составе твёрдого раствора до 50 процентов, величина анизотропии плазменных частот и магнитной восприимчивости изменяется слабо. Это свидетельствует о том, что при температуре 293 К в исследованных в данной работе кристаллах  $(\text{Bi}_{2-x}\text{Sb}_x)\text{Te}_3$  ( $0 < x < 1$ ), вблизи уровня химического потенциала не происходит существенных изменений в составе групп свободных носителей заряда. Возможно, это связано с тем, что подзона тяжёлых дырок при увеличении количества  $\text{Sb}_2\text{Te}_3$  в составе твёрдого раствора либо не изменяет своего положения, либо медленно смещается в глубину валентной зоны. Действительно, результаты предшествующих исследований свидетельствуют о том, что в  $\text{Bi}_2\text{Te}_3$  потолок подзоны тяжёлых дырок расположен примерно на 20–30 мэВ ниже потолка подзоны лёгких дырок [3], а в  $\text{Sb}_2\text{Te}_3$  указанный энергетический зазор составляет уже 230 мэВ [9].

### Заключение

В заключение необходимо отметить, что полученные в ходе исследования анизотропии плазменного отражения и магнитной восприимчивости кристаллов твёрдых растворов  $(\text{Bi}_{2-x}\text{Sb}_x)\text{Te}_3$  ( $0 < x < 1$ ) результаты хорошо согласуются между собой и результатами гальваномангнитных исследований. Из этого следует, что оптические и магнитные свойства рассматриваемых материалов, а также их анизотропия, во многом обусловлены влиянием свободных носителей заряда. Это обстоятельство открывает возможность исследования параметров зонной структуры и энергетического спектра носителей заряда твёрдых растворов  $\text{Bi}_2\text{Te}_3$ – $\text{Sb}_2\text{Te}_3$  в широком диапазоне температур и составов, с использованием современных высокочувствительных средств фурьеспектроскопии и SQUID магнетометрии, обладающих несомненным преимуществом, заключающемся в отсутствии прямой зависимости плазменных частот и магнитной восприимчивости от влияния механизмов рассеяния носителей заряда, что значительно упрощает задачу интерпретации экспериментальных результатов.

### Список литературы

1. Гольцман Б. М., Кудинов В. А., Смирнов И. А. Полупроводниковые термоэлектрические материалы на основе  $\text{Bi}_2\text{Te}_3$ . М.: Наука, 1972.
2. Мосс Т., Баррелл Г., Эллис Б. Полупроводниковая электроника. М.: Мир, 1965. 382 с.
3. Сологуб В. В., Галицкая А. Д., Парфеньев Р. В. ФТП. 14, 915 (1972).
4. Степанов Н. П. Электрон-плазмонное взаимодействие в висмуте, легированном акцепторной примесью // Известия высших учебных заведений. Физика. 2004. № 3. С. 33–42.
5. Степанов Н. П., Грабов В. М. Оптические эффекты, обусловленные совпадением энергии плазменных колебаний и межзонного перехода в легированных акцепторной примесью кристаллах висмута // Оптика и спектроскопия. 2002. Т. 92. № 5. С. 794–798.
6. Степанов Н. П., Грабов В. М. Температурная зависимость спектров плазменного отражения кристаллов висмут-сурьма // ФТП. 2001. Т. 35. № 6. С. 734–738.
7. Уханов Ю.И. Оптические свойства полупроводников. М: Наука, 1977. 366 с.
8. Itterbeek A. Van, Deynse N. Van, Herinckx C. Measurements of the magnetic anisotropy of single crystals of  $\text{Bi}_2\text{Te}_3$ ,  $\text{Sb}_2\text{Te}_3$  and compounds of them between room temperature and 1.3 K // Physica. 1966. № 32. P. 2123–2128.
9. Ronlund B., Beckman O., Levy H. Doping properties of  $\text{Sb}_2\text{Te}_3$  indicating a two valence band model // Journal of Physics and Chemistry of Solids. 1965. № 26. P. 1281–1286.
10. Dennis J. H. Anisotropy of thermoelectric power in bismuth telluride. Laboratory of electronics. Massachusetts Institute of Technology: 1961. 52 p.
11. Drabble J. R., Wolfe R. Anisotropic Galvanomagnetic Effects in Semiconductors // Proceedings of the Physical Society. Section B. 1956. №69. P. 1101–1109.
12. Matyas. M. The susceptibility of selenides and tellurides of heavy elements // Czechosl. J. Phys. 1958. № 8. P. 309–314.
13. Stordeur M., Stolzer M., Sobotta H., Riede V. Investigation of the valence band structure of thermoelectric  $(\text{Bi}_{1-x}\text{Sb}_x)_2\text{Te}_3$  // Phys. Stat. Sol. (b). 1988. № 150. P. 165–176.
14. Groth R., Schnabel P. Bestimmung der anisotropie der effektiven masse in  $n$ - $\text{Bi}_2\text{Te}_3$  durch reflexionsmessungen im ultraroten // Journal of Physics and Chemistry of Solids. 1964. № 25. P. 1261–1267.
15. Mansfield R. The magnetic susceptibility of bismuth telluride // Proc. Phys. Soc., 74, 599 (1960). 1960. № 74. P. 599–603.
16. Sehr R., Testardi L. R. The optical properties of  $p$ -type  $\text{Bi}_2\text{Te}_3$  –  $\text{Sb}_2\text{Te}_3$  alloys between 2–15 microns // Journal of Applied Physics. 1962. № 23. P. 1219–1224.

Статья поступила в редакцию 25.02.2012 г.

УДК 539  
ББК В36

*Рудольф Абрамович Гицельтер,*

*доктор философии,  
генеральный директор Союза Российских соотечественников «Золотая моя Москва»,  
член международного совета российских соотечественников  
(Хадера, Израиль), e-mail: rudolf194138@mail.ru*

### **Физико-механические свойства «RubCon»**

Представлены экспериментальные результаты определения физико-механических свойств нового строительного материала – нанобетона (с наноструктурированной матрицей), названного «RubCon». Проведены исследования по изучению деформации материала и оценке температурного эффекта. Представлен анализ термомеханического разрушения нанобетона и методов его упрочнения. Предложена методика оценки степени упрочнения нанобетона.

*Ключевые слова:* физико-механические свойства, «RubCon», деформация, температурный эффект, термомеханическое разрушение и упрочнение

*Rudolf Abramovich Gitselter,*

*Doctor of Philosophy,  
General Director of Russian Compatriots' Union "My Golden Moscow",  
member of the International Board of Russian Compatriots (Hadera, Israel),  
e-mail: ru-dolf194138@mail.ru*

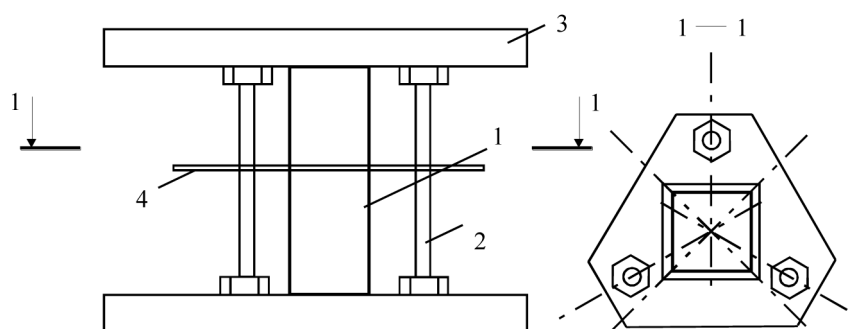
### **Physical-Mechanical Properties of "RubCon"**

The article presents the experimental results of determining physical and mechanical properties of a new construction material – nanoconcrete (with the nanostructured matrix) called "RubCon". The study describes the deformation of the material and the assessment of the temperature effect, analyzes the thermal and mechanical destruction of the nanoconcrete and methods of its hardening. It offers the technique of assessing the degree of nanoconcrete hardening/

*Keywords:* physical and mechanical properties, "RubCon", deformation, temperature effect, thermal and mechanical destruction and hardening.

### ***Stress-strain relationship at central uniaxial compression***

The experimental research of *RubCon* deformation at uniaxial central compression carried out. The special testing module consisting from three calibrated rods allowed to provide constant deformation speed (Figure 1).



**Figure 1.** Draft of testing gadget: 1 – sample of RubCon; 2 – calibrated rods; 3 – plate; 4 – centering bar

Characteristic pressure – deformation relationship is shown in Figure 2.



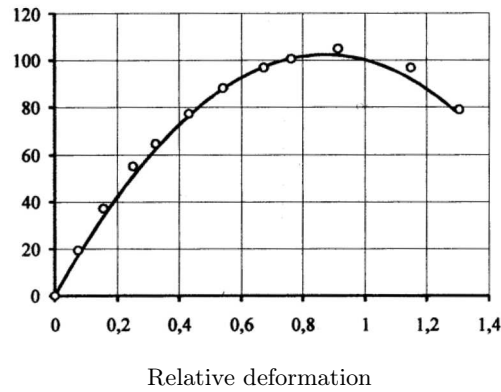


Figure 2. Draft of testing gadget: 1 – sample of RubCon; 2 – calibrated rods; 3 – plate; 4 – centering bar

Analytical form of this dependence may be submitted as:

$$\sigma = 2.6 + 241.4\epsilon - 146\epsilon^2 \tag{1}$$

Let  $\nu = \sigma/\sigma_R$ ;  $\eta = \epsilon/\epsilon_R$ ;  $\kappa = E\epsilon_R/\sigma_R$ . On the experimental base it is believed that dependence  $\nu = f(\kappa, \eta)$  looks like square parabola  $\nu = \kappa\eta - \eta^2$ , where  $\sigma, \epsilon$  are the current values of compression stress and deformations correspondingly,  $\sigma_R, \epsilon_R$  – coordinates of the diagram top,  $\kappa$  – the factor describing elastic-plastic properties of *RubCon*. Then,

$$\sigma = \sigma_R \left[ \kappa (\epsilon/\epsilon_R) - (\epsilon/\epsilon_R)^2 \right] \tag{2}$$

and

$$\eta = 0.5 \left[ \kappa \pm (\kappa^2 - 4\nu)^{0.5} \right] \tag{3}$$

The diagram of function (3) (dashed line) in relative coordinates well coincides with experimental dependence (a continuous line) stress – strain (Figure 3).

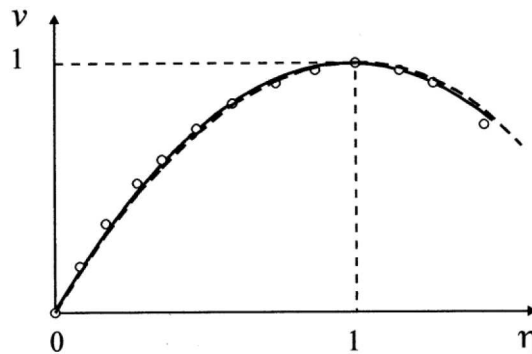
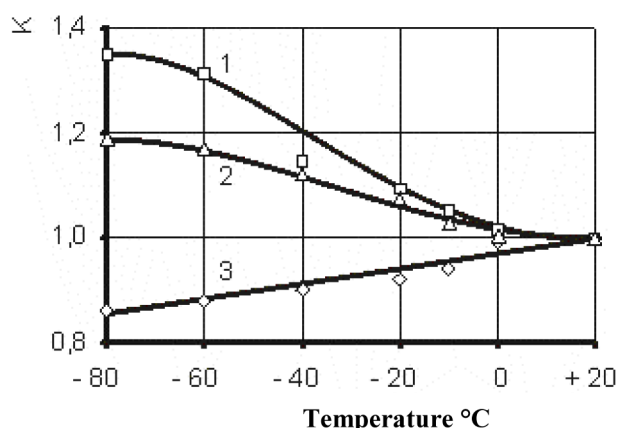


Figure 3. Diagram of function (3)

### Temperature effect

For the experiment performance the test *RubCon* samples in size  $40 \times 40 \times 160$  mm. were prepared. Tests were carried out in the special chamber, in the temperature range  $-80 \text{ }^\circ\text{C} \pm +80 \text{ }^\circ\text{C}$  appropriated to real operation conditions of the material. During experiments the stress-strain state of samples was determined depending on temperature of environment. In particular, the changes of the module of elasticity, ultimate strength at compression and the appropriate ultimate deformations of a material at influence of temperature were determined in comparison with the similar values obtained at test of control samples at room temperature. Results of experiments at negative temperature range are illustrated in Figure 4. It is possible to see, that at the maximal negative temperature  $-80 \text{ }^\circ\text{C}$  the ultimate relative strain decreases on the average 14 % in comparison with control values, and ultimate

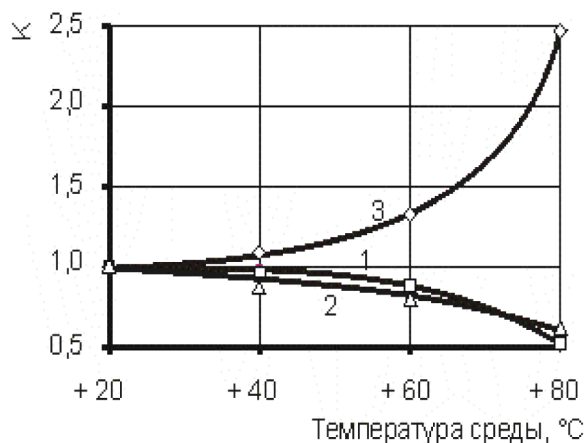
strength at compression and the module of elasticity, on the contrary, are increased on 19 and 35 % correspondingly. It is necessary to note thus, that change of ultimate deformations linearly depends on temperature.



**Figure 4.** Influence of negative temperatures on the ratio of the module of elasticity (1), ultimate compression strength (2) and ultimate deformations at compression (3) to the similar values obtained at test of control *RubCon* samples at room temperature

We have shown that microstructure of *RubCon* has elastic, elastic – plastic and viscous phases. The amount of a last in the composite is less in comparison with others and consequently deformability of *RubCon* at action a long-term and a short-term loadings in the greater degree is determined by elastic and elastic – plastic deformations. Increase of the *RubCon* strength and the module of elasticity at compression and decrease of its ultimate deformations at negative temperatures can be explain by increase of a viscous phase viscosity and partial transformation of an elastic – plastic phase of a composite in elastic. The increase of an elastic phase results to embitterment of composite and by that to changes of its stress-strain state.

Influence of the increased positive temperatures in a range  $+20\text{ }^{\circ}\text{C} \div +80\text{ }^{\circ}\text{C}$  on *RubCon* mechanical characteristics is shown in Figure 5.



**Figure 5.** Influence of *positive* temperatures on the ratio of the module of elasticity (1), ultimate compression strength (2) and ultimate deformations at compression (3) to the similar values obtained at test of control *RubCon* samples at room temperature

Increase of temperature from  $+20\text{ }^{\circ}\text{C}$  up to  $+50\text{ }^{\circ}\text{C}$  has a little effect on *RubCon*. At the further increase of temperature, as it was possible to expect, substantial growth of ultimate deformations is observed at simultaneous drastically decrease of ultimate compressive strength and the module of elasticity. At the maximal positive temperature  $+80\text{ }^{\circ}\text{C}$  deformability of *RubCon* grows in 2,5 times, ultimate strength is reduced on 40 %, the module of elasticity on 50 %. At rise in temperature the part of an elastic – plastic phase transfers to viscous; thus highly elastic and viscous deformations are developing

and producing the increase of *RubCon* deformability, decrease of its ultimate compressive strength and the module of elasticity.

These deformations have convertible character, i. e. at decrease of temperature there is a return process. The effect of temperature influence depends on its value and duration of heating or cooling. Short-term heating causes the convertible weakening of composite structure as a result of temperature binder plasticization. Result of this process is decrease of *RubCon* compressive strength and the module of elasticity and increase of its deformability.

### *Thermomechanical destruction of RubCon*

As is known, load-carrying capacity of any structural materials depends on relationship of external force factors, temperature and time of their action, i. e. on strength, thermostability and durability. By this means problem of the forecast and increase of material serviceability is reduced to revealing the interrelations between aforementioned material behavior characteristics. Thermomechanical destruction is one of most practically important kinds of the high-molecular composite materials failure, accompanying with break of chemical connections. The stresses in the places of deformation grow under loading and probability of macromolecular chains change is increased as well. These chains are oriented in a direction of external force action determine the elastic deformation of molecules which changes of position may be responsible for destruction of them.

Being based on the conventional concept of S.Jurkov that mechanical failure of a polymeric material is process its thermochemical destruction, V. Jartsev put forward the formula of load-carrying capacity *time border* of a composite material depending on its strength and an external temperature field.

$$\tau_f = \tau_m * exp [(U_0 - \gamma * \sigma) (R * T) (1 - T/T_m)] \quad (4)$$

where:  $\tau_f, T, \sigma$  – time to failure (sec), temperature ( $^{\circ}K$ ), strength (MPa) correspondingly;  $\tau_m$  – minimal durability of the material (sec),  $U_0$  – activation energy of a failure (thermomechanical destruction);  $\gamma$  – coefficient external mechanical forces;  $R$  – universal gas constant;  $T_m$  – ultimate design temperature for the material.

The *ultimate strength* dependent on temperature and time of its action:

$$\sigma = (1/\gamma) * \{U_0 - [2.3 * R * T * lg(\tau_f/\tau_m) / 1 - T/T_m]\} \quad (5)$$

The *ultimate temperature* dependent on strength and time

$$T = (1/T_m) + [2,3 * R * lg(\tau_f/\tau_m) / U_0 - \gamma * \sigma] \quad (6)$$

Each of formulae (4)–(6) describes interrelation between stress-strain state of the composite material and time of temperature and external loading actions. Thus, for an estimation of load-carrying capacity of a composite material and its directed regulation it is necessary to know all materials physical constants. For this purpose we have undertaken an experimental research at a number of preset values of the normal stresses and temperatures time of sample destruction.

Prismatic beam samples ( $30 \times 60 \times 700$  mm) of *RubCon* were tested for a cross, so-called "pure" bend by two equal concentrated forces symmetrically located in an average third of samples span and simultaneous temperature influence. Loading was carried out by step-by-step to the attainment of the normal stress in the middle span 5,7, 6,1 and 6,5 MPa.

For creation of the increased temperatures the special spiral heating elements, which were settled down from, two sides of a sample were used. The level of temperature heating is  $60 - 105$   $^{\circ}C$ . During the test loading was put after the attainment of a steady in time a temperature mode. The control of temperature was made in a maximal stresses zone.

Experimental values of load-carrying capacity averaged by test results for various stresses and temperatures levels are given in Table 1.

The experimental data described are shown on Figure 6. Each line, converging a bunch of isobars family corresponds to the given level of normal stress  $\sigma_1; \sigma_2; \sigma_3$ .

Table 1

Normal stress $\sigma$ (MPa)	Temperature, T (°C)	Time to failure, $\tau_f$ (min)
$\sigma_1 = 5.65$	72	527
	77	340
	78	132
	65	83
	105	3
$\sigma_2 = 6.07$	72	552
	66	340
	71	215
	72	74
	76	56
$\sigma_3 = 6.47$	60	300
	64	256
	67	151
	78	21

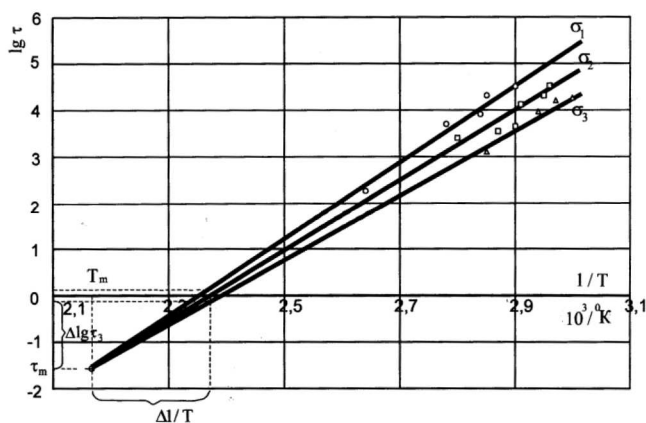


Figure 6. Test results for different levels of stresses and temperatures

Values  $T_m$  and  $\tau_m$  can find from Figure 1. Two constants  $U_0$  and  $\gamma$  can be determined from an inclination of straight lines by the formula of activation energy :

$$U(\sigma) = 2,3 * R * \Delta \lg \tau(\sigma) / \Delta 1/T \tag{7}$$

For each given loading value it is possible to determine  $U(\sigma)$  (Figure 7).

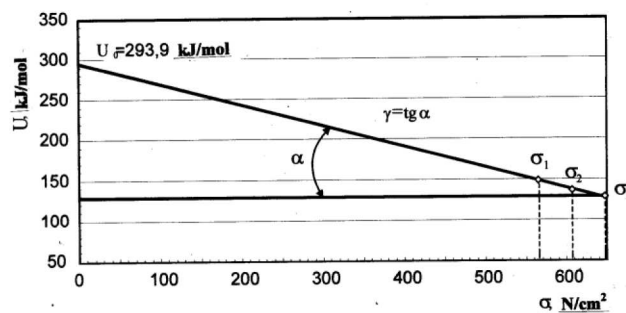


Figure 7. Relationship activation energy  $U$  and normal bending stress  $\sigma$

It can be see that  $\gamma = tg \alpha$  and  $U_0$  is ordinate of straight line "U -  $\sigma$ " at extrapolation to  $\sigma = 0$ . Values of all constants calculated on the experimental database are given in the Table 2.

Table 2

Constant				Load-carrying capacity parameters		
$U_0(kJ/mol)$	$\tau_m(sec)$	$\Gamma(kJmm/molN)$	$T_m(10^3/^\circ K)$	$\tau_f(sec)$	$\sigma(MPa)$	$T(^\circ K)$
293.9	0.025	25.7	2.15	$10^{4.1}$	5.65	352

From Table 2 follows, that  $U_0$  value is close to activation energy of chemical connections break, resulting to formation free macroradicals [5]. The temperature  $T_m$  corresponds to initial temperature of rubber decomposition. Value of a structural – mechanical constant  $\gamma$  corresponds to complex composite materials on the rubber and phenol-formaldehyde resin base. It should be noted, that experimentally received minimal time of destruction  $\tau_m$  is in 100 times exceeds the period of atoms fluctuation of a hard body. Such sharp increase  $\tau_m$  is obviously connected to a plenty quantity of filler in the *RubCon* material (about 90%), resulting to a complex way of a crack development at destruction.

The resulting values of constants allow to define the key parameters of load-carrying capacity of the researched composition in the given range of loadings, temperatures and operation time.

Obviously, for increase of load-carrying capacity of a material it is necessary to increase constants  $T_m$ ,  $\tau_m$  and  $U_0$  and to reduce  $\gamma$ . It is known, that the increase  $U_0$  is promoted by increase of a degree of filling and its uniformity. Introduction in a composition the special additives (plasticizers, antioxidants and others), and also the manufacturing process and material structure will have essential influence on constants  $T_m$ ,  $\tau_m$  and  $U_0$ .

It is known also [6] that for various kinds of plastics the ratio between design bending stress and tension stress is 0,5–0,87 i. e.  $\gamma_{bend}/\gamma_{tens} \approx 0,5 - 0,87$ . Ratio between design compression and tension stresses is.  $\gamma_{compr}/\gamma_{tens} \approx 0,95$ .

The knowledge of these relationships and constants will allow to forecast the borders of *RubCon* load-carrying capacity and by their directed regulation increase its durability.

***Strength of reinforced RubCon  
RubCon with steel ribbed reinforcement***

Joint work of reinforcement and polymer concrete matrix

The joint work of a steel reinforcement and composite matrix depends on:

- Coefficients of linear expansion of polymer concrete and steel reinforcements;
- The friction forces arising owing to reinforcing draft in the process of composite hardening and shrinkage;
- Mechanical bond of a reinforcement and a matrix;
- Adhesion of a metal reinforcement to a matrix.

The listed above factors in turn are determined with physical-mechanical characteristics of a composite material, a cross section and diameter of reinforcement rods, technology of preparation and placement of a composite mix, thickness of a composite protection layer etc.

*a. Coefficient of thermal linear expansion of RubCon*

It has been known that the average coefficient of thermal linear expansion is equal to the relation of a sample length increment  $\Delta l$  in temperature interval  $[t_1, t_2]$  to size of this interval  $t_1 - t_2$ . The average coefficient of linear expansion of *RubCon* was determined with test unit Figure 8.

Heating of a *RubCon* sample was made with speed not exceeding  $1,5 \pm 0,5 \text{ }^\circ C/min$  in a range  $t_1 = 23 \text{ }^\circ C \div t_2 = 120 \text{ }^\circ C$ .

Measurements of elongation of test samples in the size  $40 \times 40 \times 160mm$  during heating were carried out in a thermostatic mode. The average coefficient of linear thermal expansion  $\alpha$  was calculated with the following formula:

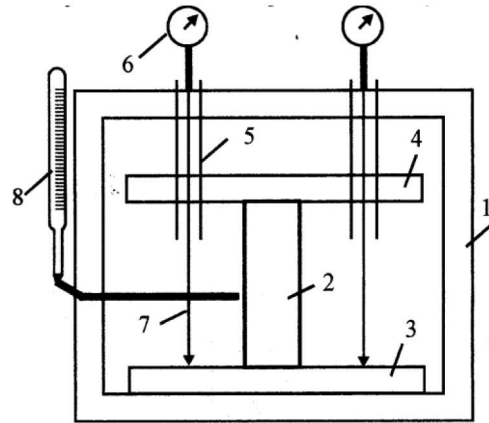
$$\alpha = 1/l_0(\Delta l/\Delta t) \tag{8}$$

where:  $l_0$  – initial length of a sample measured at temperature  $23 \text{ }^\circ C$ , mm;  $\Delta l$  – increment of length of a sample in the temperature interval borders  $[t_1, t_2]$ , mm;  $\Delta t = t_2 - t_1$ .

As the a result of the carried out researches it is established, that for *RubCon* samples

$$\alpha = 1,35 * 10^{-5}(1/^\circ C) \tag{9}$$

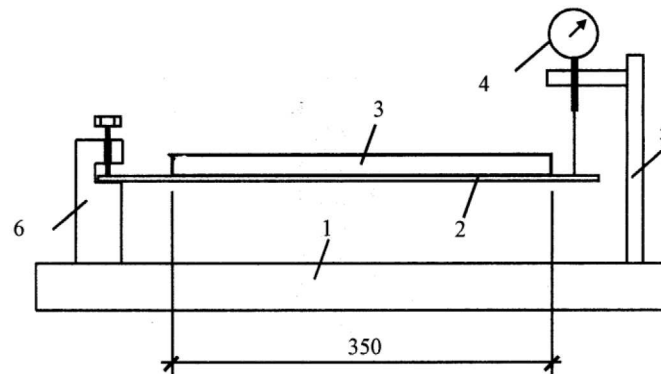
We shall note, that the coefficient of linear expansion of steel is equal  $\alpha = 1.2 \div 1.3 * 10^{-5}(1/^\circ C)$  at the same temperature range. Thus, in the reinforced building *RubCon* structures in all range of an operational temperature there will be no additional internal temperature stresses.



**Figure 8.** Test unit for determination of coefficient linear expansion of *RubCon*:  
1 – indicator; 7 – leg of indicator; 8 – thermometer

*b. Shrinkage stress of RubCon matrix*

Dependence of internal shrinkage stresses of *RubCon* matrix on time of its manufacturing was determined with the help of the special device (Figure 9).



**Figure 9.** Test device for determination of shrinkage stress of *RubCon* matrix:  
1 – rigid frame; 2 – steel substrate; 3 – layer of *RubCon*; 4 – indicator; 5 – stand; 6 – holder

The *RubCon* layer thickness of 10 mm was put on a surface of a steel console plate in the size  $350 \times 20 \times 2$  mm. Then the device was located in drying cabinet where at temperature  $120^\circ\text{C}$  *RubCon* was hardened. By means of the dial type indicator displacements of the free end of a console substrate were fixed during *RubCon* vulcanization. Initial indication was made after 2 hours after isothermal exposure of the sample, that is at the moment of the vulcanization beginning and further at regular time intervals.

Displacement of the free end of a steel plate - substrate occurs owing to shrinkage stresses in a *RubCon* layer. Knowing value of this displacement it is possible to determine shrinkage stresses with the formula:

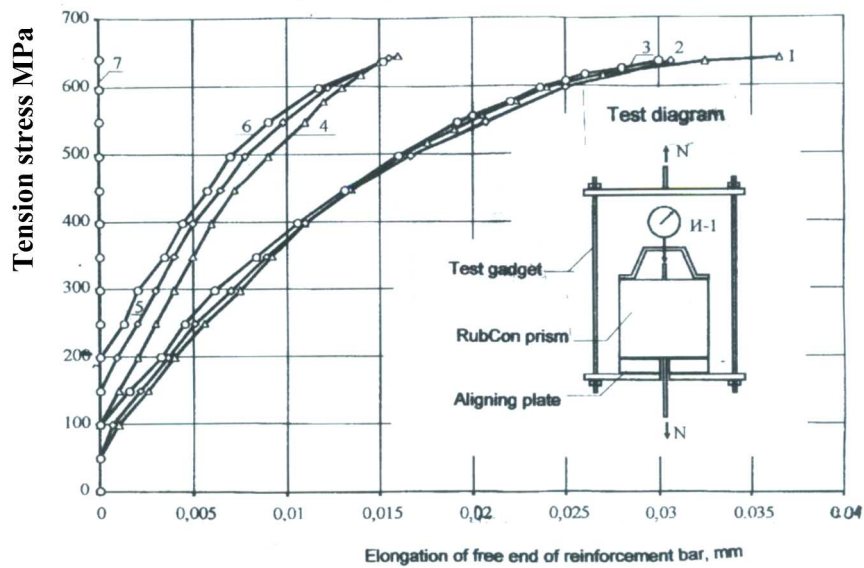
$$\sigma_{sh} = \{4\Delta * E_s * k [I_s + I_{RC} (E_{RC}/E_s)]\} / F_{RC} * l_{RC}^2 * (t_s + t_{RC}) \quad (10)$$

where:  $\Delta$  – displacement of free end of steel console substrate;  $E_s, E_{RC}$  – modulus of elasticity of steel substrate and *RubCon* layer correspondingly;  $k = 1 + (E_s/E_{RC})$ ,  $I_s, I_{RC}$  – moments of inertia of steel substrate and *RubCon* layer correspondingly,  $F_{RC}, l_{RC}$  – area and length of *RubCon* layer correspondingly,  $t_s, t_{RC}$  – thickness of steel substrate and *RubCon* layer correspondingly.

From the experimental results it may be deduced that at hardening of *RubCon* polymer matrix initial shrinkage stresses are,  $\sigma_{sh} \leq 1,6 \text{ MA}$ . It is worth nothing that shrinkage stress of other kinds of polymer concrete it is much more, for example,  $8 \div 12 \text{ MPa}$  for furfurolacetate concrete, 10 MPa for epoxy concrete and  $5 \div 6$  for polyester concrete. By this means the value of shrinkage stress of *RubCon* is insignificant

in comparison with compression strength of the material and practically does not influence on structures behavior under loading. On the other hand, initial compressing stresses are of important concern in the joint work of *RubCon* and steel reinforcement. Shrinkage stresses compress a reinforcement bar with the results that there are an additional bond forces between reinforcement bar and matrix.

c. *Mechanical bond and adhesion between steel reinforcement and RubCon matrix* Forces of mechanical bond between steel reinforcing bar and *RubCon* matrix were experimentally determined with the help of the device (Fig. 10). Some series of prismatic reinforced *RubCon* samples were produced. Reinforcement was the ribbed steel bar  $\varnothing 8\text{mm}$ . The height of samples or depth of a reinforcement anchorage was equaled from 35 up to 120 mm, that is  $(4.3 \div 15)\varnothing$ ; thickness of protection layer was 8,16 and 24 mm (1,2 and 3)  $\varnothing$ . Displacements of a reinforcing bar relatively the end face of *RubCon* prism and load were measured during the tests. Results of tests are shown in Fig. 10, 11.



**Figure 10.** Draft of test gadget and displacements of non-loaded end of reinforcement bar in dependence of height of anchorage (a) and thickness of protection layer (b): 1, 2, 3 - a = 60 mm, b=8, 16, 24 mm correspondingly; 4, 5, 6 - a = 80 mm, b=8,16,24 mm correspondingly; 7, 8 - a = 120 mm, b=8, 16, 24 mm correspondingly

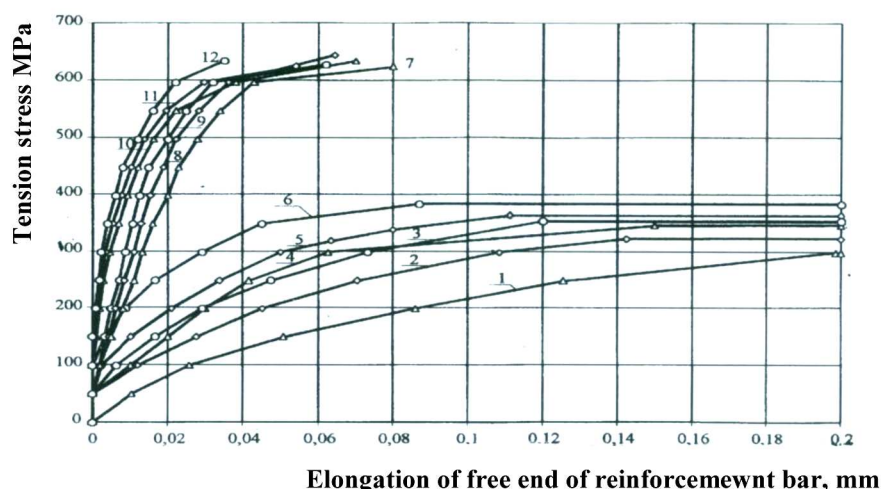
Destruction of samples with depth of anchorage 35 and 40 mm (Figure 11) occurred as a result of shear of reinforcement bar and the subsequent splitting of the *RubCon* prisms. At depth of anchorage 45 and 50 mm destruction occurred owing to the reinforcement rupture. The initial displacements of a non-loaded end of reinforcement bars were marked at stress up to 50 MPa at all tested samples. Destruction of samples with depth of anchorage 60,80 and 120 mm (Figure 10) occurred as a result of reinforcement bar rupture. The initial displacements of a non-loaded end of reinforcement bars were marked at stress  $50 \div 200 \text{ MPa}$ . As this take place the final displacements of bars didn't depend on thickness of a protection layer.

We can make conclusion that minimal thickness of a protection layer of a reinforced *RubCon* structures should be not less than one diameter of a reinforcement bar The average bond stress between steel reinforcement and *RubCon* matrix can be determined from the formula:

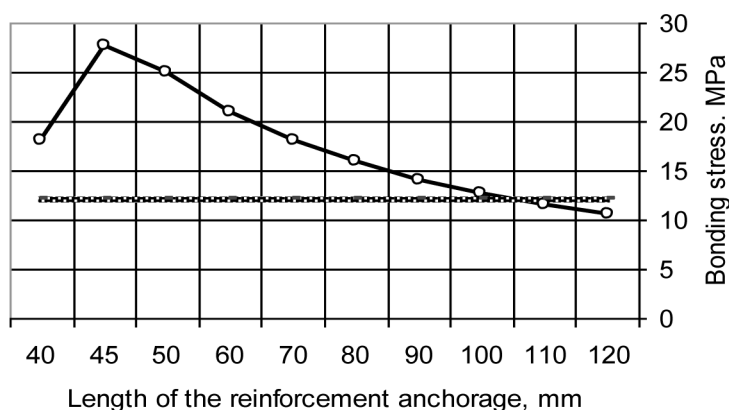
$$\tau_b = \sigma_r * A_r / u * l_r \tag{11}$$

where  $\sigma_r, A_r, l_r$  – ultimate normal stress, cross section area and anchorage length (depth) of reinforcement bar correspondingly;  $u = \pi d$  – perimeter reinforcement bar with diameter d. Dependence of average bond stress  $\tau_b$  on anchorage depth of reinforcement bar  $l_r$  is shown in Figure 12.

It is possible to see, that at depth 45 mm  $\tau_b = \max \tau_b = 27,9 \div 28,6 \text{ MPa}$ . One of the important factors of *RibCon* and steel reinforcement joint work is an adhesive bond between these materials which are caused by forces of intermolecular interaction. As have shown [9] the adhesion of *RubCon* to steel is equal 12,1 MPa, that makes approximately 0,8 from *RubCon* tensile strength. It is necessary to note,



**Figure 11.** Displacements of non-loaded end of reinforcement bar in dependence of height of anchorage (a) and thickness of protection layer (b): 1, 2, 3 - a = 35 mm, b=8, 16, 24 mm correspondingly; 4, 5, 6- a = 40 mm, b=8, 16, 24 mm correspondingly; 7,8,9- a = 45 mm, b=8, 16, 24 mm correspondingly; 10, 11, 12- a = 50 mm, b=8, 16, 24 mm correspondingly



**Figure 12.** Dependence of average bond stress  $\tau_b$  on anchorage depth of reinforcement bar  $l_r$

that this value approximately in 10 times exceeds adhesion of furfuroacetate polymer concrete or usual cement concrete. Such high adhesion of RubCon matrix to steel reinforcement apparently connected with a nature of diene oligomer used as binder.

#### **Load-carrying capacity at eccentric compression load**

Experimental researches of the eccentrically compressed elements capacity was carried out on samples in the size 100 × 100 × 500 mm reinforced by longitudinal rods  $\varnothing 8$  mm and stirrups  $\varnothing 5$  mm.

As a result of regression analysis of the experimental data mathematical model was obtained:

$$N_u = 3200e^{(0,23\mu-2,15)} \tag{12}$$

where  $N_u$  – limiting compressive load (kN),  $\mu$  – is percent of reinforcing (%), – is initial load eccentricity (cm).

From the consideration of the response surface (Figure 13), it can be seen that capacity of the investigated samples depends from eccentricity to a greater extent than from the reinforcement.

The analysis of (13) shows, that the increase initial eccentricity of loading drastically reduces the loading capacity of a eccentric compressed element from RubCon on the equation of power function. It is possible to note the "weak" dependence of the loading capacity on reinforcing percents.



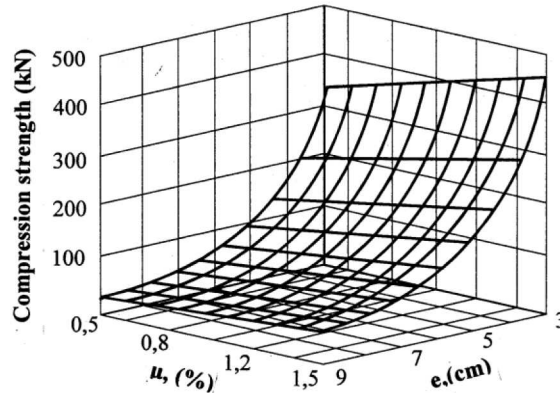


Figure 13. Relationship between compressive strength, percent of reinforcing and eccentricity

Design model for eccentric compressed elements from RubCon (Figure 14) was developed in view:

- Hypothesis of flat sections;
- Physical non-linearity of material;
- Work of the tension zone in a condition approached to destruction is insignificant;
- Position of forces system resultant is constant during all loading process.

Exhaustion of loading capacity comes at achievement of a maximum on the diagram "bending moment – curvature".

Let's write down the equilibrium equations of normal section of an eccentric compressed *RubCon* short column (without buckling) at loading approached to destruction:

$$\sum z = 0, \quad N - N_k + \sigma_S A_S = 0; \quad (13)$$

$$\sum M_0 = 0, \quad Ne - N_k z_\kappa = 0. \quad (14)$$

In view of nonlinear dependence between stress and strain we have:

$$N - b \int_0^x \sigma(y) dy + \sigma_S A_S = 0; \quad (15)$$

$$ne - x_k b \int_0^x \sigma(y) dy = 0. \quad (16)$$

where  $y$  – the current coordinate of height of cross section,  $z$ - shoulder of internal force pair the forces, equal:

$$z_\kappa = h_0 - \frac{\int_0^x \sigma(y) dy}{\int_0^x \sigma(y) dy}, \quad (16)$$

Normal stress in compressed zone may be computed from the formula uniaxial compression:

$$\sigma = \sigma_R \left[ \kappa \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_R} \right) - \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_R} \right)^2 \right] \quad (17)$$

with

$$\epsilon_{ky} = \epsilon_k \frac{x-y}{x}, \quad \epsilon_S = \epsilon_\kappa \frac{h_0-x}{x} \quad (18)$$

Substituting (17) and (18) in equilibrium equations (14) and (15) we have:

$$N - bR_\kappa \int_0^x \left[ \kappa \left( \frac{\epsilon_\kappa x - y}{\epsilon_R x} \right) - \left( \frac{\epsilon_\kappa x - y}{\epsilon_R x} \right)^2 \right] dy + E_S A_S \epsilon_\kappa \frac{h_0 - x}{x} = 0; \quad (19)$$

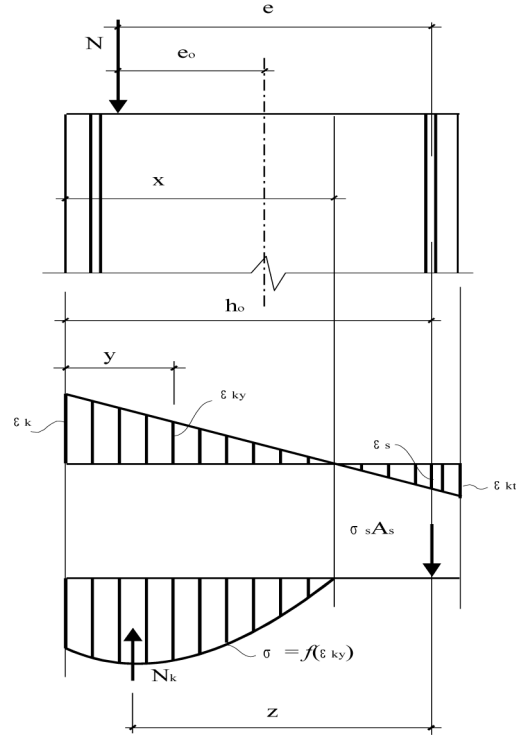


Figure 14. Model of stress-strain state of eccentrically compressed element

$$\begin{aligned}
 & N e - b R_{\kappa} \int_0^x \left[ k \left( \frac{\epsilon_{\kappa} x - y}{\epsilon_R x} \right) - \left( \frac{\epsilon_{\kappa} x - y}{\epsilon_R x} \right)^2 \right] dy \times \\
 & \times \left( h_0 - \frac{\int_0^x \left[ k \left( \frac{\epsilon_{\kappa} x - y}{\epsilon_R x} \right) - \left( \frac{\epsilon_{\kappa} x - y}{\epsilon_R x} \right)^2 \right] y dy}{\int_0^x \left[ k \left( \frac{\epsilon_{\kappa} x - y}{\epsilon_R x} \right) - \left( \frac{\epsilon_{\kappa} x - y}{\epsilon_R x} \right)^2 \right] dy} \right) = 0
 \end{aligned} \quad (20)$$

Supposing that loss of load capacity of a eccentric compressed element is determined by maximal bending moment, we shall add the third equation, describing condition of a maximum:

$$\frac{dM}{d\epsilon_{\kappa}} = 0, \quad (21)$$

or

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{d\epsilon_{\kappa}} \left\{ b R_{\kappa} \int_0^x \left[ k \left( \frac{\epsilon_{\kappa} x - y}{\epsilon_R x} \right) - \left( \frac{\epsilon_{\kappa} x - y}{\epsilon_R x} \right)^2 \right] dy \times \right. \\
 & \left. \times \left( h_0 - \frac{\int_0^x \left[ k \left( \frac{\epsilon_{\kappa} x - y}{\epsilon_R x} \right) - \left( \frac{\epsilon_{\kappa} x - y}{\epsilon_R x} \right)^2 \right] y dy}{\int_0^x \left[ k \left( \frac{\epsilon_{\kappa} x - y}{\epsilon_R x} \right) - \left( \frac{\epsilon_{\kappa} x - y}{\epsilon_R x} \right)^2 \right] dy} \right) \right\} = 0
 \end{aligned} \quad (22)$$

After integration and transformations the equations (17),(18) and (20) we shall write down as:

$$\begin{cases}
 N - \frac{b R_{\kappa}}{3} \times \frac{x(3\epsilon_R \epsilon_{\kappa} - \epsilon_{\kappa}^2)}{\epsilon_R^2} + \sigma_S A_S = 0 \\
 N \cdot e - \frac{b R_{\kappa}}{12} \times \frac{12 h_0 \epsilon_R \epsilon_{\kappa} x - 4 h_0 \epsilon_{\kappa}^2 + \epsilon_{\kappa}^2 x^2 - 4 \epsilon_R \epsilon_{\kappa} x^2}{\epsilon_R^2} = 0. \\
 \epsilon_{\kappa} = \epsilon_R \frac{6 h_0 - 2 x}{4 h_0 - x}
 \end{cases} \quad (23)$$

We obtained the system of three equations with three unknown, which can be solved analytically, where:  $N$  – is limiting compressive load;  $b$  – width of cross section of sample;  $R_k$  – compressive strength of *RubCon*;  $x$  – distance from the most compressed fiber to neutral axis of the cross section;  $\epsilon_R$  – deformation corresponding to maximal stress from diagram "  $\sigma - \epsilon$  ";  $\epsilon_k$  – deformation of extreme compressed fiber;  $\sigma_s$  – tension stress;  $A_s$  – area of tension zone of cross section;  $h_0$  – distance between centers of longitudinal reinforcements.

Results of experiment are in close agreement with calculated the formula (23).

**Статья поступила в редакцию 20.01.2012 г.**

УДК 517.956  
ББК В143

*Ирина Анатольевна Гуримская,*  
аспирант,

*Южно-Якутский институт железнодорожного транспорта*  
(Нерюнгри, Россия), e-mail: gurim567@rambler.ru

### О решении задачи Дирихле в неоднородной полуплоскости<sup>1</sup>

Рассмотрена первая краевая задача в полуплоскости для дивергентного уравнения с функциональными коэффициентами, зависящими от двух переменных. Функция проницаемости в полуплоскости возрастает при удалении от осей координат по квадратичным законам. Используя метод свертывания разложений Фурье, решение задачи выражено в однократных квадратурах через решение классической задачи Дирихле для уравнения Лапласа в однородной полуплоскости.

*Ключевые слова:* краевые задачи, метод свертывания разложений Фурье, неоднородная полуплоскость.

*Irina Anatolyevna Gurimskaya,*

*Graduate Student,*

*South Yakutiya Institute of Railway Transport*  
(Neryungri, Russia), e-mail: gurim567@rambler.ru

### Solving the Dirichlet Problem in the Inhomogeneous Half-plane

The article considers the first boundary value problem on the half-plane for the divergence equation with functional coefficients depending on two variables. The function of permeability in the half-plane increases with the distance from the axes of a quadratic law. Using the method of convolution of Fourier expansions, the solution is expressed in single quadratures through the solution of the classical Dirichlet problem for the Laplace equation in the homogeneous half-plane.

*Keywords:* boundary value problems, method of convolution of Fourier expansions, inhomogeneous half-plane.

Рассмотрим неоднородную полуплоскость  $D(x > 0, y \in R)$ , состоящую из двух квадрантов  $D_1(x > 0, y < 0)$  и  $D_2(x > 0, y > 0)$  с функциональной проницаемостью  $K_1(x, y) = k(px+1)^2(q_1y-1)^2$  в  $D_1$  и  $K_2(x, y) = k(px+1)^2(q_2y+1)^2$  в  $D_2$ , где постоянные  $k, p, q_i > 0$ , т.е. нули функций проницаемости  $K_i(x, y)$  лежат вне соответствующей зоны  $D_i$ . В данном случае функция проницаемости на границе  $x = 0$  зон  $D_i$  непрерывна и во всей полуплоскости  $D(x > 0)$  для каждого фиксированного  $x$  имеет минимум при  $y = 0$ . Для потенциалов  $\varphi_i(x, y)$  в  $D_i$  рассмотрим первую краевую задачу с неоднородным граничным условием на внешней границе  $D_2$ , что не умаляет общности:

$$(q_1y - 1)^2 \partial_x [(px + 1)^2 \partial_x \varphi_1] + (px + 1)^2 \partial_y [(q_1y - 1)^2 \partial_y \varphi_1] = 0, \quad (1)$$

$$(q_2y + 1)^2 \partial_x [(px + 1)^2 \partial_x \varphi_2] + (px + 1)^2 \partial_y [(q_2y + 1)^2 \partial_y \varphi_2] = 0, \quad (2)$$

$$\varphi_1|_{x=0} = 0, \quad \varphi_2|_{x=0} = h(y), \quad (3)$$

$$y = 0: \quad \varphi_1 = \varphi_2, \quad \partial_y \varphi_1 = \partial_y \varphi_2, \quad (4)$$

где  $\partial_x^n = \partial^n / \partial x^n$ . Классические условия сопряжения (4) выражают непрерывность потенциала и нормальной скорости на общей границе зон  $D_i$ .

Представим решение задачи (1)–(4) в виде [1, с. 220]

<sup>1</sup>Работа выполнена в рамках Государственного задания вузу Минобрнауки РФ, № 1.3985.2011

$$\varphi_1(x, y) = \frac{u_1(x, y)}{(px + 1)(q_1y - 1)}, \quad \varphi_2(x, y) = \frac{u_2(x, y)}{(px + 1)(q_2y + 1)}. \quad (5)$$

Отсюда для функций  $u_i(x, y)$  получим задачу Дирихле относительно уравнения Лапласа с неклассическими условиями сопряжения:

$$\Delta u_i = 0, \quad i = 1, 2, \quad u_1|_{x=0} = 0, \quad u_2|_{x=0} = h_1(y), \quad (6)$$

$$y = 0: \quad -u_1 = u_2, \quad -\partial_y u_1 - q_1 u_1 = \partial_y u_2 - q_2 u_2, \quad (7)$$

где  $h_1(y) = h(y)(q_2y + 1)$ ,  $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$ .

Наряду с данной задачей рассмотрим задачу Дирихле в однородной полуплоскости  $D(x > 0)$  относительно уравнения Лапласа с сохранением граничной функции (6):

$$\Delta f = 0, \quad f|_{x=0} = \begin{cases} h_1(y), & y > 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases}. \quad (8)$$

Решение классической задачи (8) строится по формуле Пуассона [2, с. 327]:

$$f(x, y) = \frac{x}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{h_1(t) dt}{x^2 + (y - t)^2}.$$

Отметим, что последний интеграл для широкого класса кусочно-непрерывных граничных функций  $h_1(y)$ , составленных из многочленов, вычисляется в конечном виде. Далее функцию  $f(x, y)$  считаем заданной функцией.

Методом свертывания разложений Фурье [4; 5] выразим решение задачи (6), (7) через функцию  $f(x, y)$ . Пусть функция  $f(x, 0)$  на полуоси  $x > 0$  разлагается в интеграл Фурье по синусам:

$$f(x, 0) = \int_0^{\infty} g(x, \lambda) d\lambda, \quad g(x, \lambda) = f_1(\lambda) \sin \lambda x, \quad (9)$$

где

$$f_1(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(x, 0) \sin \lambda x dx.$$

При этом функция  $f(x, 0)$  должна удовлетворять условию  $f(x, 0) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$  [3, с. 529]. Отсюда функция  $f(x, y)$  в квадранте  $D_1(x > 0, y < 0)$ , где эта функция удовлетворяет однородному граничному условию (8), представима в виде

$$f(x, y) = \int_0^{\infty} e^{\lambda y} g d\lambda, \quad y < 0. \quad (10)$$

Последний интеграл представляет собой решение задачи Дирихле в квадранте  $D_1(x > 0, y < 0)$  вида  $\Delta u = 0$ ,  $u|_{y=0} = f(x, 0)$ ,  $u|_{x=0} = 0$ , полученное методом Фурье, при этом функция  $f(x, y)$  также является решением этой задачи.

Представим решение задачи (6), (7) в виде разложений Фурье:

$$u_1 = \int_0^{\infty} a_1 e^{\lambda y} g d\lambda, \quad y < 0, \quad (11)$$

$$u_2 = f(x, y) + \int_0^{\infty} a_2 e^{-\lambda y} g d\lambda, \quad y > 0, \quad (12)$$

где функция  $g(x, \lambda)$  равна (9). Функции  $u_i(x, y)$  удовлетворяют условиям (6) при условии сходимости интегралов (11), (12). Из условий сопряжения (7) с учётом разложения (10) для параметров  $a_i$  получим систему алгебраических уравнений

$$a_1 + a_2 = -1, \quad -a_1(\lambda + q_1) = \lambda(1 - a_2) - q_2(1 + a_2),$$

решение которой имеет вид

$$a_1 = -1 + \frac{\gamma}{\lambda + \gamma}, \quad a_2 = -\frac{\gamma}{\lambda + \gamma},$$

где

$$\gamma = \frac{q_1 + q_2}{2}. \quad (13)$$

Отсюда решение (11), (12) задачи (6), (7) с учётом разложения (10) примет вид

$$u_1 = -f(x, y) + \gamma \int_0^{\infty} \frac{e^{\lambda y} g}{\lambda + \gamma} d\lambda, \quad y < 0, \quad (14)$$

$$u_2 = f(x, y) - \gamma \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda y} g}{\lambda + \gamma} d\lambda, \quad y > 0. \quad (15)$$

Отметим, что полученное решение содержит двукратные квадратуры от сильно осциллирующих тригонометрических функций (9), что затрудняет практическое использование полученных решений.

Из разложения функции  $f(x, y)$  (10) следует формула, указанная в работах [4, 5]:

$$\int_0^{\infty} e^{-\gamma t} f(x, y - t) dt = \int_0^{\infty} \frac{e^{\lambda y} g}{\lambda + \gamma} d\lambda, \quad y < 0.$$

Отсюда функции (14), (15) непосредственно выражаются через заданную функцию  $f(x, y)$  в однократных квадратурах без разложений Фурье:

$$u_1 = -f(x, y) + \gamma \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} f(x, y - t) dt, \quad y < 0, \quad (16)$$

$$u_2 = f(x, y) - \gamma \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} f(x, -y - t) dt, \quad y > 0, \quad (17)$$

где постоянная  $\gamma$  имеет вид (13). Решение исходной задачи (1)–(4) строится по формулам (5), (16), (17).

#### Список литературы

1. Положий Г. Н. Обобщение теории аналитических функций комплексного переменного. Киев: Изд-во Киевского ун-та. 1965. 442 с.
2. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 735 с.

3. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3. М.: Наука, 1962. 656 с.
4. Холодовский С. Е. Метод свертывания разложений Фурье. Случай обобщённых условий сопряжения типа трещины (завесы) в кусочно-неоднородных средах // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 6. С. 855–859.
5. Холодовский С. Е. Метод свертывания разложений Фурье. Случай трещины (завесы) в неоднородном пространстве // Дифференциальные уравнения. Т. 45. № 8. 2009. С. 1204–1208.

Статья поступила в редакцию 18.02.2012 г.

УДК 517.956  
ББК В143

Галина Михайловна Давиденко,  
аспирант,  
Забайкальский государственный университет  
(Чита, Россия), e-mail: y.g.m@mail.ru

**О решении краевых задач на плоскости  
с параллельными линиями разрыва проницаемости при классическом и  
обобщённом условиях сопряжения<sup>1</sup>**

В работе решена краевая задача для уравнения Лапласа на кусочно-однородной плоскости, состоящей из трёх зон с различной проницаемостью. На границах зон выполняются классические и обобщённые условия сопряжения, соответствующие идеальному контакту и сильно проницаемой трещине. Для решения задачи применяется метод свертывания разложений Фурье, позволяющий выразить искомые потенциалы через заданную гармоническую функцию с сохранением её особых точек.

*Ключевые слова:* особые точки гармонических функций, уравнение Лапласа, сильно проницаемые трещины, кусочно-однородные зоны, метод свертывания разложений Фурье.

*Galina Mikhailovna Davidenko*  
Graduate Student,  
Trans-Baikal State University  
(Chita, Russia), e-mail: y.g.m@mail.ru

**Solving Boundary Value Problems on the Plane with Parallel Lines of  
Permeability Discontinuity in Classical and Generalized Conjugation Conditions**

This paper solves the boundary value problem for the Laplace equation on a piecewise-homogeneous plane consisting of three zones with different permeability. On the borders of these zones classical and generalized conjugation conditions are executed. They correspond with an ideal contact and a strongly permeable crack. To solve the problem the method of convolution of Fourier expansions is used that allows expressing the potentials of each zone through the given harmonic function with the preservation of its singular points.

*Keywords:* singular points of harmonic functions, Laplace equation, strongly permeable cracks, piecewise-homogeneous zones, method of convolution of Fourier expansions

Рассмотрим плоскость  $x, y$ , состоящую из трёх однородных зон  $D_1(x < 0)$ ,  $D_2(0 < x < l)$ ,  $D_3(x > l)$  с различной проницаемостью  $k_i$  в  $D_i$ . Контакт  $x = l$  зон  $D_2$  и  $D_3$  идеальный, а зоны  $D_1$  и  $D_2$  разделены сильно проницаемой трещиной  $x = 0$ . На данной плоскости рассмотрим установившиеся динамические процессы тепломассопереноса, индуцированные заданными особыми точками (источниками, стоками и т.д.). Рассмотрим случай, когда особые точки расположены в средней зоне  $D_2(0 < x < l)$ . Пусть известна гармоническая функция  $F(x, y)$ , имеющая указанные особые точки (при  $0 < x < l$ ). Функция  $F(x, y)$  является потенциалом рассматриваемого процесса на однородной плоскости  $x, y$ .

Для потенциалов  $u_i(x, y)$  в  $D_i$  задача имеет вид [2–4]:

$$\Delta u_i = 0, \quad (x, y) \in D_i, \quad (1)$$

$$x = 0: \quad u_1 = u_2, \quad k_2 \partial_x u_2 - k_1 \partial_x u_1 = A \partial_x^2 u_1, \quad (2)$$

$$x = l: \quad u_2 = u_3, \quad k_2 \partial_x u_2 = k_3 \partial_x u_3, \quad (3)$$

<sup>1</sup>Работа выполнена в рамках Государственного задания вузу Минобрнауки РФ, № 1.3985.2011.



при этом в окрестности особых точек выполняется условие

$$u_2 \sim F(x, y), \quad (4)$$

т. е. функция  $u_2(x, y)$  имеет особые точки функции  $F(x, y)$ , где  $\partial_x^n = \partial^n / \partial x^n$ ,  $A$  – параметр трещины [3; 4], уравнение (1) для функции  $u_2$  выполняется вне особых точек. Частный случай данной задачи при  $k_1 = k_2$  рассмотрен в работе [1].

Применяя метод свертывания разложений Фурье [3; 4], выразим решение задачи (1)–(4) непосредственно через заданную гармоническую функцию  $F(x, y)$ . Предположим сначала, что функции  $F(0, y)$  и  $F(l, y)$  разлагаются в интегралы Фурье:

$$F(0, y) = \int_0^{\infty} f_j \sigma_j d\lambda, \quad F(l, y) = \int_0^{\infty} g_j \sigma_j d\lambda,$$

где

$$\sigma_1 = \sin \lambda y, \quad \sigma_2 = \cos \lambda y,$$

$f_j(\lambda)$  и  $g_j(\lambda)$  – коэффициенты Фурье функций  $F(0, y)$  и  $F(l, y)$ . Здесь и ниже по повторяющимся в одной части равенства индексам  $j = 1, 2$  суммируем. Тогда функция  $F(x, y)$  в полуплоскостях  $x \leq 0$  и  $x \geq l$ , где она не имеет особых точек, представима в виде

$$F(x, y) = \int_0^{\infty} e^{\lambda x} f_j \sigma_j d\lambda, \quad x \leq 0, \quad (5)$$

$$F(x, y) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda(x-l)} g_j \sigma_j d\lambda, \quad x \geq l. \quad (6)$$

Указанные формулы дают решения двух задач Дирихле в полуплоскостях  $x \leq 0$  и  $x \geq l$  с граничными функциями соответственно  $F(0, y)$  и  $F(l, y)$ , полученные методом Фурье. Отметим, что предположения (5), (6) существенно сужают класс особых точек функции  $F(x, y)$ . В частности фундаментальное решение не разлагается в интегралы Фурье (5), (6).

Представим решение задачи (1)–(4) в виде

$$u_1 = \int_0^{\infty} e^{\lambda x} a_j \sigma_j d\lambda, \quad x \leq 0, \quad (7)$$

$$u_2 = F(x, y) + \int_0^{\infty} (b_j \operatorname{sh} \lambda x + d_j \operatorname{ch} \lambda x) \sigma_j d\lambda, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (8)$$

$$u_3 = \int_0^{\infty} e^{-\lambda(x-l)} p_j \sigma_j d\lambda, \quad x \geq l. \quad (9)$$

При этом функции  $u_i$  удовлетворяют условиям задачи (1), (4). Из условий сопряжения (2), (3) с учётом (5), (6) для параметров  $a_j, b_j, d_j, p_j$  получим систему алгебраических уравнений  $a_j = f_j + d_j, k_2(f_j + b_j) - k_1 a_j = A \lambda a_j, g_j + b_j s + d_j c = p_j, k_2(-g_j + b_j c + d_j s) = -k_3 p_j$ , решение которой имеет вид

$$a_j = \frac{k_2(k_3 + k_2)e^{\lambda l}}{r} f_j - \frac{k_2(k_3 - k_2)}{r} g_j,$$

$$b_j = \frac{(A\lambda + k_1 - k_2)(k_3 c + k_2 s)}{r} f_j - \frac{(A\lambda + k_1)(k_3 - k_2)}{r} g_j,$$

$$d_j = -\frac{(A\lambda + k_1 - k_2)(k_3 s + k_2 c)}{r} f_j - \frac{k_2(k_3 - k_2)}{r} g_j,$$

$$p_j = -\frac{k_2(A\lambda + k_1 - k_2)}{r}f_j + \frac{k_2(A\lambda + k_1 + k_2)e^{\lambda l}}{r}g_j,$$

где

$$r = k_2(k_3c + k_2s) + (A\lambda + k_1)(k_3s + k_2c), \quad (10)$$

$s = \text{sh } \lambda l$ ,  $c = \text{ch } \lambda l$ . Отсюда решение (7)–(9) задачи (1)–(4) примет вид

$$u_1 = k_2 \int_0^\infty \frac{(k_2 + k_3)e^{\lambda(x+l)}f_j - (k_3 - k_2)e^{\lambda x}g_j}{r} \sigma_j d\lambda, \quad (11)$$

$$u_2 = F(x, y) + \int_0^\infty \left\{ \frac{(A\lambda + k_1 - k_2)[k_3 \text{sh } \lambda(x-l) - k_2 \text{ch } \lambda(x-l)]f_j}{r} - \frac{(k_3 - k_2)[(A\lambda + k_1) \text{sh } \lambda x + k_2 \text{ch } \lambda x]g_j}{r} \right\} \sigma_j d\lambda, \quad (12)$$

$$u_3 = k_2 \int_0^\infty \frac{(A\lambda + k_1 + k_2)e^{-\lambda(x-2l)}g_j - (A\lambda + k_1 - k_2)e^{-\lambda(x-l)}f_j}{r} \sigma_j d\lambda. \quad (13)$$

Полученное решение содержит двукратные квадратуры (внешние и внутренние в коэффициентах Фурье  $f_j, g_j$ ) от сильно осциллирующих тригонометрических функций. Кроме того, как отмечалось, это решение справедливо для достаточно узкого класса гармонических функций  $F(x, y)$ . Приведём формулы (11)–(13) к виду, не содержащему разложений Фурье. Разлагая дробь  $1/r$  (10) в геометрическую прогрессию со знаменателем  $q$ , получим

$$\frac{1}{r} = \frac{2e^{-\lambda l}}{A(k_2 + k_3)(\lambda + \gamma)(1 - q)} = \frac{2}{A(k_2 + k_3)} \sum_{n=0}^\infty e^{-2\lambda n l - \lambda l} \mu^n \frac{(\lambda + \nu)^n}{(\lambda + \gamma)^{n+1}}, \quad (14)$$

где

$$q = e^{-2\lambda l} \mu \frac{\lambda + \nu}{\lambda + \gamma}, \quad \mu = \frac{k_3 - k_2}{k_3 + k_2}, \quad \nu = \frac{k_1 - k_2}{A}, \quad \gamma = \frac{k_1 + k_2}{A}.$$

при этом  $|q(\lambda)| < 1$  при  $0 \leq \lambda < \infty$ . Из равенств (5), (6) следует

$$F(x - t, y) = \int_0^\infty e^{\lambda(x-t)} f_j \sigma_j d\lambda, \quad F(l - x + t, y) = \int_0^\infty e^{\lambda(x-t)} g_j \sigma_j d\lambda, \quad x \leq 0.$$

Отсюда, аналогично статье [5], подучим формулы

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^k}{n!} \int_0^\infty e^{-\delta t} t^n \partial_t^k [e^{-\nu t} F(x - t, y)] dt &= \int_0^\infty \frac{(\lambda + \nu)^k}{(\lambda + \gamma)^{n+1}} e^{\lambda x} f_j \sigma_j d\lambda, \\ \frac{(-1)^k}{n!} \int_0^\infty e^{-\delta t} t^n \partial_t^k [e^{-\nu t} F(-x + l + t, y)] dt &= \int_0^\infty \frac{(\lambda + \nu)^k}{(\lambda + \gamma)^{n+1}} e^{\lambda x} g_j \sigma_j d\lambda, \quad x \leq 0, \end{aligned}$$

где постоянная

$$\delta = \gamma - \nu = \frac{2k_2}{A} > 0.$$

Тогда с учётом (14) функции  $u_i$  (11)–(13) выражаются непосредственно через заданную гармоническую функцию  $F(x, y)$  (без разложений Фурье):

$$u_1 = \delta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\mu)^n}{n!} \int_0^{\infty} e^{-\delta t} t^n \partial_t^n \{e^{-\nu t} [F(x - 2nl - t, y) - \mu F(-x + 2nl + 2l + t, y)]\} dt, \quad (15)$$

$$u_2 = F(x, y) - \mu F(-x + 2l, y) -$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\mu)^n}{n!} \int_0^{\infty} e^{-\delta t} t^n \partial_t^{n+1} \{e^{-\nu t} [\mu F(x - 2nl - 2l - t, y) - F(-x - 2nl - t, y) - \mu^2 F(-x + 2nl + 4l + t, y) + \mu F(x + 2nl + 2l + t, y)]\} dt, \quad (16)$$

$$u_3 = (1 - \mu)F(x, y) - (1 - \mu) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\mu)^n}{n!} \int_0^{\infty} e^{-\delta t} t^n \partial_t^{n+1} \{e^{-\nu t} [\mu F(x + 2nl + 2l + t, y) - F(-x - 2nl - t, y)]\} dt. \quad (17)$$

В силу теоремы, доказанной в [6], ряды (15)–(17) сходятся для класса гармонических функций  $F(x, y)$ , удовлетворяющих условию

$$|\partial_x^m [e^{-\nu x} F(x, y)]| < c \alpha^m e^{\alpha|x|}, \quad |x| \rightarrow \infty, \quad (18)$$

где  $0 < \alpha < \alpha_0$ ,  $\alpha_0(1 + e^{(\alpha_0 + \nu)l}) = \delta$ .

Формулы (15)–(17) в отличие от формул (11)–(13), полученных методом Фурье, содержат однократные квадратуры от гладких функций без осцилляций. Кроме того, эти формулы справедливы для более широкого класса особых точек (18), индуцирующих процесс, включая фундаментальное решение типа источника.

### Список литературы

1. Давиденко Г. М. О построении особых точек потенциалов на плоскости с классическим и обобщённым условиями сопряжения на двух параллельных прямых // Математический анализ и его приложения. Вып. 10. Забайкал. гос. гум.-пед. ун-т. Чита, 2011. С. 20–27.
2. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 735 с.
3. Холодовский С. Е. Метод свёртывания разложений Фурье в решении краевых задач с пересекающимися линиями сопряжения // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2007. Т. 47. № 9. С. 1550–1556.
4. Холодовский С. Е. Метод свёртывания разложений Фурье. Случай обобщённых условий сопряжения типа трещины (завесы) в кусочно-неоднородных средах // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 6. С. 855–859.
5. Холодовский С. Е. О решении краевых задач в полупространстве, ограниченном многослойной плёнкой // Учёные записки Забайкальского государственного гуманитарно-педагогического университета. Серия «Физика, математика, техника, технология». № 3 (38). Чита. 2011. С. 160–164.
6. Холодовский С. Е. О решении краевых задач в цилиндрах с двумя параллельными трещинами // Математический анализ и его приложения. Вып. 10. Забайкальский государственный гуманитарно-педагогический университет. Чита, 2011. С. 56–62.

Статья поступила в редакцию 13.03.2012 г.

УДК 517.956  
ББК В143

**Ирина Анатольевна Ефимова**  
кандидат физико-математических наук, доцент,  
Забайкальский институт предпринимательства  
Сибирского университета потребительской кооперации  
(Чита, Россия), e-mail: hol47@yandex.ru

### Об эффективном решении первых краевых задач в кусочно-однородных круговых областях<sup>1</sup>

Рассмотрены первые краевые задачи в круге, состоящем из двух зон с различной проницаемостью, когда зоны разделены окружностью. Методом свертывания разложений Фурье решение задачи выражено в виде быстроходящихся рядов через решение классической задачи Дирихле в однородном круге.

*Ключевые слова:* краевые задачи, кусочно-однородный круг, метод свёртывания разложений Фурье.

**Irina Anatolyevna Efimova**  
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor,  
Transbaikalian Institute of Entrepreneurship of Siberian University of Consumer Cooperation,  
(Chita, Russia), e-mail: hol47@yandex.ru

### On the Efficient Solution of the First Boundary Value Problems in Piecewise Homogeneous Circular Domains

The paper considers the first boundary value problems in the disk consisting of two zones with different permeability when the zones are separated by a circle. With the help of the method of convolution of Fourier expansions, the solution of the problem is expressed in the form of rapidly converging series in terms of the classical solution of the Dirichlet problem in the homogeneous circle.

*Keywords:* boundary value problems, piecewise homogeneous circle, method of convolution of Fourier expansions.

Композитные материалы находят всё более широкое применения в промышленности, строительстве и т. д. Поэтому имеет большой интерес исследование динамических процессов теплопроводности, фильтрации, диффузии и т.д. в кусочно-однородных средах. Математические модели указанных процессов приводят к краевым задачам математической физики. При этом среди аналитических методов наибольший интерес представляют методы, позволяющие строить эффективные решения краевых задач в достаточно простом виде, допускающем численные расчёты.

Рассмотрим в кусочно-однородном круге  $D(r < l)$ ,  $l > 1$ , состоящем из круга  $D_1(r < 1)$  и кольца  $D_2(1 < r < l)$ ,  $0 < \alpha < 2\pi$ , для потенциалов  $u_i$  в  $D_i$  первую краевую задачу

$$r\partial_r(r\partial_r u_i) + \partial_\alpha^2 u_i = 0, \quad (r, \alpha) \in D_i; \quad u_2|_{r=l} = f(\alpha), \quad (1)$$

$$r = 1: \quad u_1 = u_2, \quad k_1 \partial_r u_1 = k_2 \partial_r u_2, \quad (2)$$

где  $\partial_r^n = \partial^n / \partial r^n$ ;  $r, \alpha$  – полярные координаты,  $k_i$  – проницаемость зоны  $D_i$ . Наряду с данной задачей рассмотрим классическую задачу Дирихле в однородном круге  $r < l$  с сохранением граничной функции  $f(\alpha)$  (1) вида

$$r\partial_r(r\partial_r F) + \partial_\alpha^2 F = 0, \quad r < l; \quad F|_{r=l} = f(\alpha). \quad (3)$$

<sup>1</sup>Работа выполнена в рамках Государственного задания вузу Минобрнауки РФ, № 1.3985.2011.

Решение  $F(r, \alpha)$  задачи (3) строится по формуле Пуассона [1; 2]:

$$F(r, \alpha) = \frac{l^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\xi) d\xi}{l^2 + r^2 - 2lr \cos(\alpha - \xi)}, \quad (4)$$

и для широкого класса граничных функций  $f(\alpha)$  функция  $F(r, \alpha)$  вычисляется в конечном виде. Поэтому будем считать функцию  $F(r, \alpha)$  (4) известной.

Методом работ [3; 4] выразим решение задачи (1), (2) непосредственно через заданную функцию  $F(r, \alpha)$ . Разложим граничную функцию  $f(\alpha)$  в ряд Фурье:

$$f(\alpha) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} g_m(\alpha), \quad g_m(\alpha) = a_m \cos m\alpha + b_m \sin m\alpha, \quad (5)$$

где  $a_m, b_m$  – коэффициенты Фурье:

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \cos m\alpha d\alpha, \quad m = 0, 1, \dots,$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \sin m\alpha d\alpha, \quad m = 1, 2, \dots \quad (6)$$

Решая задачу Дирихле (3) методом Фурье, представим заданную функцию  $F(r, \alpha)$  в круге  $r \leq l$  в виде разложения Фурье:

$$F(r, \alpha) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{r}{l}\right)^m g_m(\alpha), \quad r \leq l, \quad (7)$$

где функция  $g_m(\alpha)$  имеет вид (5). Аналогично, применяя метод Фурье, представим решение задачи (1), (2) в виде

$$u_1(r, \alpha) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} c_m r^m g_m(\alpha), \quad r < 1, \quad (8)$$

$$u_2(r, \alpha) = F(r, \alpha) + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} p_m \left[ \left(\frac{r}{l}\right)^m - \left(\frac{l}{r}\right)^m \right] g_m(\alpha), \quad 1 < r < l, \quad (9)$$

где  $c_m, p_m$  – искомые параметры, при этом функции  $u_i(r, \alpha)$  удовлетворяют условиям (1). Из условий сопряжения (2) с учётом разложения (7) найдем параметры  $c_m, p_m$  в виде

$$c_m = \frac{k_2}{d_m}, \quad p_m = \frac{l^{-m}(k_1 - k_2)}{d_m},$$

где

$$d_m = \frac{(k_1 + k_2)l^m - (k_1 - k_2)l^{-m}}{2}. \quad (10)$$

Таким образом, решение задачи (1), (2) имеет вид разложений Фурье (8)–(10). Полученное решение содержит квадратуры (6) в функциях  $g_m(\alpha)$  (5) и ряды (8), (9) от сильно осциллирующих тригонометрических функций, что вызывает трудности при численных расчётах.

Приведём полученные формулы (8), (9) к виду, не содержащему разложений Фурье. Разложим дробь  $1/d_m$  (10) в геометрическую прогрессию:

$$\frac{1}{d_m} = \frac{2l^{-m}}{(k_1 + k_2)(1 - q_m)} = \frac{2}{k_1 + k_2} \sum_{n=0}^{\infty} \nu^n l^{-(2n+1)m},$$

где

$$q_m = \nu l^{-2m}, \quad \nu = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2},$$

при этом учитываем неравенства  $|q_m| < 1$ . Отсюда функции  $u_i$  (8), (9) с учётом (10) примут вид

$$u_1 = \frac{a_0}{2} + (1 - \nu) \sum_{n=0}^{\infty} \nu^n \sum_{m=1}^{\infty} (l^{-2n-1}r)^m g_m(\alpha), \quad (11)$$

$$u_2 = F(r, \alpha) + \sum_{n=0}^{\infty} \nu^{n+1} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ (rl^{-2n-3})^m - (r^{-1}l^{-2n-1})^m \right] g_m(\alpha). \quad (12)$$

Из разложения заданной функции  $F(r, \alpha)$  (7) следует равенство

$$\sum_{m=1}^{\infty} \rho^m g_m(\alpha) = -\frac{a_0}{2} + F(l\rho, \alpha), \quad \rho \leq 1.$$

Отсюда решение (11), (12) задачи (1), (2) непосредственно выражается через решение  $F(r, \alpha)$  задачи Дирихле (3) (без разложений Фурье):

$$u_1(r, \alpha) = (1 - \nu) \sum_{n=0}^{\infty} \nu^n F(l^{-2n}r, \alpha), \quad r < 1, \quad (13)$$

$$u_2(r, \alpha) = F(r, \alpha) + \sum_{n=0}^{\infty} \nu^{n+1} [F(rl^{-2n-2}, \alpha) - F(r^{-1}l^{-2n}, \alpha)], \quad 1 < r < l. \quad (14)$$

Можно непосредственно проверить, что ряды (13), (14) сходятся и функции  $u_i(r, \alpha)$  удовлетворяют условиям задачи (1), (2). Полученное решение, в отличие от (8), (9), не содержит квадратур и имеет вид быстроходящихся рядов со скоростью геометрических прогрессий.

Отметим, что по найденным функциям (13), (14) методом конформных отображений, осуществляемых дробно-линейными функциями, можно решать первые краевые задачи в круговых областях с неконцентрическим круговым включением, а также в полуплоскости с круговым включением.

### Список литературы

1. Арсенин В. Я. Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1974. 431 с.
2. Тихонов А. Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.
3. Холодовский С. Е. Метод свертывания разложений Фурье. Случай обобщённых условий сопряжения типа трещины (завесы) в кусочно-неоднородных средах // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 6. С. 855–859.
4. Холодовский С. Е. Метод свертывания разложений Фурье. Случай трещины (завесы) в неоднородном пространстве // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 8. С. 1204–1208.

Статья поступила в редакцию 26.02.2012 г.

УДК 539.23; 539.216.1  
ББК В36

**Сергей Фёдорович Забелин**

доктор технических наук, член-корреспондент РАН, профессор,  
Забайкальский государственный гуманитарно-педагогический университет  
им. Н. Г. Чернышевского (Чита, Россия), e-mail: metal@zabspu.ru

**Виктор Александрович Зеленский**

кандидат физико-математических наук,  
Институт металлургии и материаловедения им. А. А. Байкова РАН  
(Москва, Россия), e-mail: zelensky55@bk.ru

### Особенности кинетики нанокристаллизации аморфных металлических материалов при нестационарных режимах термического воздействия

В статье приведены результаты экспериментальных исследований по кинетике процессов нанокристаллизации аморфных металлических материалов (АММ) в условиях изотермического отжига и при термоциклическом воздействии (ТЦВ). Дан анализ химического состава АММ и методик экспериментальных исследований. Приведены результаты высокотемпературной деформации и пластичности АММ при нанокристаллизации. Установлено, что в условиях оптимального режима ТЦВ в АММ получена стабильная нанокристаллическая структура и хорошее сочетание свойств прочности и пластичности. Показана возможность эффективного использования ТЦВ для осуществления контролируемой нанокристаллизации АММ.

*Ключевые слова:* аморфные металлические материалы, нанокристаллизация, изотермическое и термоциклическое воздействие, деформация и пластичность, стабильная наноструктура, конструкционные и функциональные свойства.

**Sergey Fyodorovich Zabelin**

Doctor of Technical Sciences,  
RANS Corresponding member, Professor, Zabaikalsky State Humanitarian Pedagogical University  
named after N. G. Chernyshevsky (Chita, Russia), e-mail: metal@zabspu.ru

**Viktor Alexandrovich Zelensky**

Candidate of Physics and Mathematics,  
A. A. Baykov Institute of Metallurgy and Materials Science, Russian Academy of Sciences  
(Moscow, Russia), e-mail: zelensky55@bk.ru

### Kinetics Features of Nanocrystallization of Amorphous Metal Materials at Non-stationary Modes of Thermal Influence

The article describes the results of the experimental studies on the kinetics of the processes of nanocrystallization of amorphous metal materials (AMM) in the conditions of isothermal annealing and thermal cyclic influence (TCI). It analyzes the chemical composition of AMM and techniques of the experimental studies. The results of high-temperature deformation and plasticity of AMM are given at nanocrystallization. The paper emphasizes that in the conditions of the TCI optimum mode in AMM the stable nanocrystal structure and a good combination of durability and plasticity properties are received. It shows the possibility of the effective use of TCI for the implementation of controlled AMM nanocrystallization.

*Keywords:* amorphous metal materials, nanocrystallization, isothermal and thermal cyclic influence, deformation and plasticity, stable nanostructure, constructional and functional properties.

### Введение

Проблема обеспечения конструктивной прочности материалов – одна из важнейших в современном практическом материаловедении. Она занимает главенствующее положение применительно к разработке новых конструкционных и функциональных материалов нового поколения, поскольку надежная эксплуатация требует обеспечения достаточной несущей способности, стабильности и определенного запаса прочности, пластичности и сопротивления разрушению.

Появление нового класса перспективных материалов – аморфных металлических материалов (АММ) (в настоящее время получены АММ – сплавы для многих металлических систем [2; 13]), из-за их уникальных физических характеристик является предметом разнообразных детальных экспериментальных исследований. Возрастающее внимание к АММ связано с уникальным сочетанием высоких показателей магнитных характеристик и удельного электрического сопротивления, прочности, твёрдости, сопротивлению износу, стойкости к коррозии и радиации, по уровню которых они во многом превосходят традиционные кристаллические металлы. Однако структурные состояния АММ являются неравновесными. Процессы эволюции структуры к метастабильному равновесию путём самоорганизующихся самопроизвольных атомных перестроек (структурной релаксации) приводят к изменению всех физических свойств АММ. Под воздействием различного рода дестабилизирующих факторов (механические и/или термические воздействия, химическая или физическая обработка (облучение радиационное или концентрированными потоками энергии)) осуществляется переход к новому, более равновесному состоянию, сопровождающимся изменением совокупности свойств АММ, в частности, к существенному снижению макро- и микроскопической пластичности [3].

Поиск путей достижения лучшего сочетания свойств прочности и пластичности АММ показал, что необходимо структурное строение таких материалов перевести из аморфного в нанокристаллическое состояние [13]. Обычно перевод АММ из аморфного в нанокристаллическое состояние технологически осуществляется в режиме изотермического отжига при температуре выше температуры кристаллизации [3; 4; 13]. Однако, данная технология не позволяет обеспечить полную стабилизацию образовавшейся наноструктуры и, соответственно, свойств наноструктурированного материала [5]. Поэтому актуальной проблемой материаловедения является вопрос температурно-временной стабильности аморфного и нанокристаллического состояния и физико-механических свойств таких сплавов.

Для решения данной проблемы предлагается новая технология контролируемой нанокристаллизации АММ, которая осуществляется в режиме термоциклического воздействия на материал. Поэтому целью данной работы является разработка технологии и исследование кинетики процесса контролируемой нанокристаллизации АММ в режиме термоциклирования, обеспечивающей стабильное наноструктурированное состояние и оптимальное сочетание свойств прочности и пластичности. Для достижения цели необходимо решить следующие задачи:

- исследовать кинетику процесса нанокристаллизации АММ в условиях изотермического отжига и термоциклического воздействия;
- установить закономерности деформации АММ при различных температурных режимах;
- установить оптимизацию параметров режима термоциклического воздействия на процесс нанокристаллизации;
- подобрать методики определения и оценки физико-механических и функциональных свойств исследуемых материалов.

## 1. Материалы и методики эксперимента

### 1.1. Материалы

Исследование проводили на аморфных металлических сплавах 10НСП и 71 КНСП, полученных по технологии ЦНИИ ЧЕРМЕТА методом спиннингования [3]. Образцы вырезали из лент толщиной 27–28 мкм, шириной 3,5–4,0 мм и длиной 30–50 мм. Химический состав исследуемых сплавов (табл. 1, табл. 2) определяли на микроанализаторе марки VEGA – TESCAN с помощью программы INCA с комментариями количественных результатов (рис. 1, рис. 2) и анализировали изображение растровой электронной микроскопии (РЭМ) (рис. 3, рис. 4).

Таблица 1

Химический состав сплава 10НСП

Спектр	В стат	В	С	Si	Fe	Ni	Итого
Спектр 1	Да		2,24	5,91	81,59	10,26	100,00
Спектр 2	Да	7,23	4,24	4,98	74,41	9,13	100,00
Спектр 3	Да		3,50	5,48	80,97	10,05	100,00
Макс.		7,23	4,24	5,91	81,59	10,26	
Мин.		7,23	2,24	4,98	74,41	9,31	



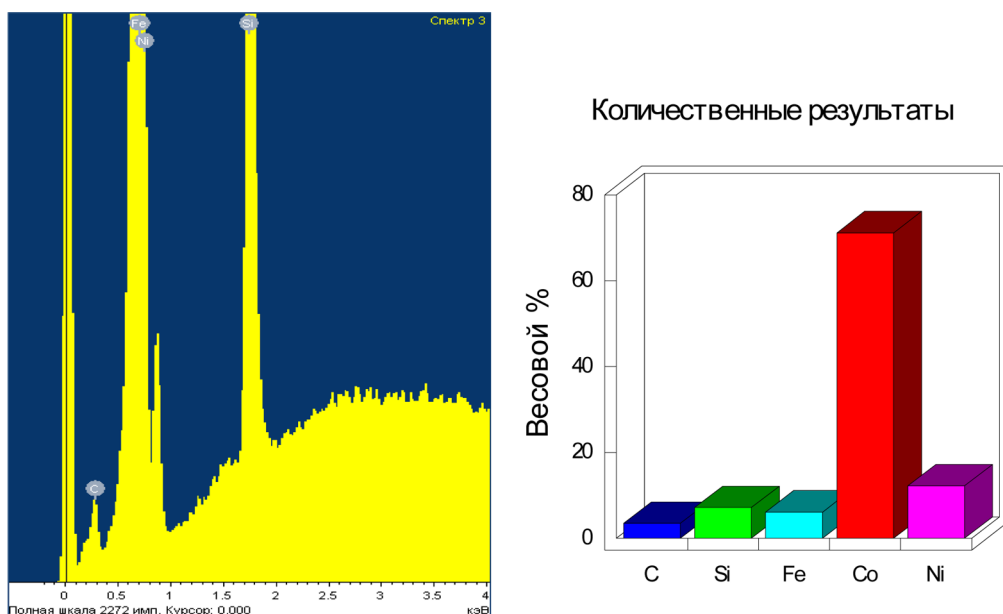


Рис. 1. Спектральный анализ и количественные результаты химического состава сплава 10НСП

Таблица 2

Химический состав сплава 71КНСП

Элемент	Усл. конц.	Интенсивность попр.	Весовой %	Весовой % сигма	Атомный %
C K	1,78	0,2947	3,47	0,50	13,98
Si K	4,60	0,2699	7,13	0,12	12,29
Fe K	10,89	1,0280	6,07	0,09	5,26
Co K	120,55	0,9715	71,13	0,41	58,41
Ni K	21,14	0,9938	12,19	0,15	10,05
Итого			100,00		

### 1.2. Методика изотермического и термоциклического отжига

Методика изотермического отжига ленточных образцов АММ включает их нагрев и выдержку в лабораторной печи при заданных температурах (300, 350, 400, 450, 500, 550, 600, 650 °С) и заданной выдержке (1, 3, 5, 10, 20 мин).

Учитывая специфику нагрева тонких лент из АММ в обычной лабораторной печи без вакуума или инертной среды, образцы размещали между стабилизирующими пластинками из материала с большой теплопроводностью (пластины технической чистой меди толщиной не менее 2–3 мм) [6]. Заданная температура между пластинами с образцом практически не изменяется при загрузке и соответствует заданному времени отжига при заданной температуре. Температурный режим обработки контролировали термпарой (Х–А), зачеканенной в стабилизирующей пластинке.

При термоциклическом отжиге интервал термоцикла при экспериментах варьировали от  $T_{min} = 200$  °С до  $T_{max} = 350, 400, 450, 500$  °С. Число термоциклов – 1, 3, 5, 7. Скоростной режим нагрева и охлаждения в термоцикле обеспечивали различной рабочей температурой печи (500, 700, 900 °С).

### 1.3. Методика определения механических свойств материалов

Механические испытания тонких лент из АММ проводили по методикам, рекомендованным в работах Ушакова И. В. [15] и Глезера А. М. [2] с использованием инденторов различной геометрической формы на приборах ПМТ – 3М и Виккерса.

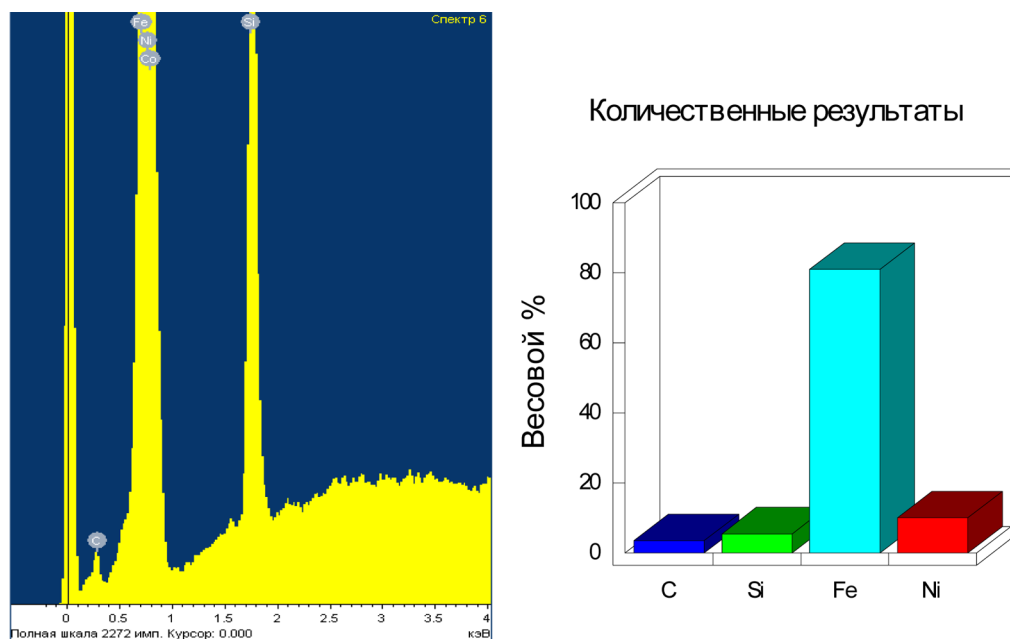


Рис. 2. Спектральный анализ и количественные результаты химического состава сплава 71KHCP

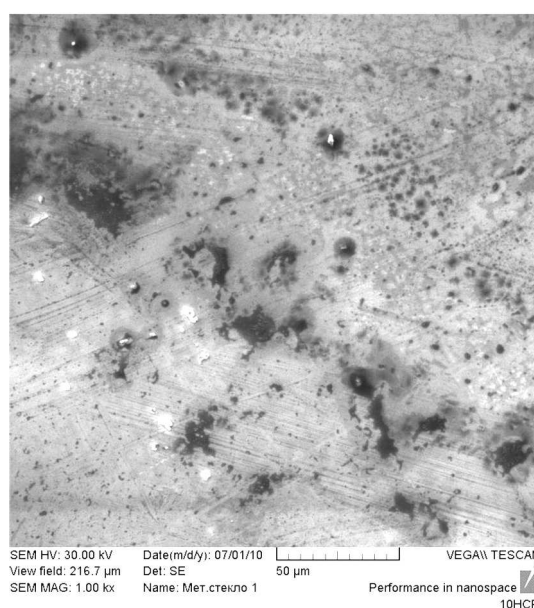


Рис. 3. Изображение сплава 10HCP, полученного в режиме прямого разрешения с помощью РЭМ TESCAN

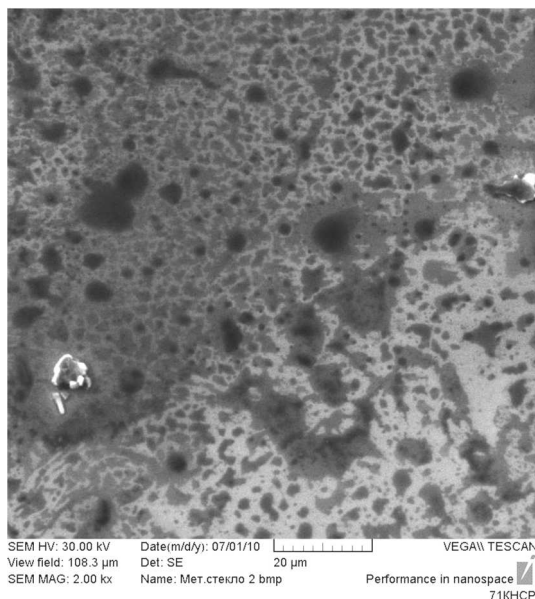
Характер изменения пластичности аморфных и нанокристаллических материалов в зависимости от режима и температуры отжига исследовали и оценивали по методу изгиба [2]. Мету пластичности оценивали из выражения:

$$\epsilon = h / (D - h),$$

где  $h$  – толщина ленты,  $D$  – расстояние между параллельными пластинами, при котором изогнутый образец разрушался.

#### 1.4. Методика проведения механических испытаний

Эксперименты по оценке высокотемпературной пластичности и прочности были проведены на испытательной машине фирмы «Инстрон» (модель ТМ-М, диапазон нагрузок от 0,02 до 5000 Н),



**Рис. 4.** Изображение сплава 71KHPC, полученные в режиме прямого разрешения с помощью РЭМ TESCAN

позволяющей осуществлять испытания образцов в широком диапазоне скоростей деформации. Равномерность температурного поля образца обеспечивалась управляемым электронным блоком, а температура образца контролировалась при помощи хромель-алюмелевой термопары, подключенной к цифровому ампервольтметру Ф-30. Рабочее пространство нагревательного устройства заполнялось инертным газом (гелием) с целью исключить окисление образцов при высоких температурах.

Для испытания на растяжение применяли образцы длиной 60 мм, а их крепление на машине осуществляли при помощи специально сконструированных захватов (рис. 5), основным элементом которых является вороток диаметром 3 мм. За счёт сил трения на поверхности между воротком и навиваемым на него образцом обеспечивается надёжное крепление образца в захватах, исключая проскальзывание при высокотемпературных испытаниях. Кроме того, такая схема крепления уменьшает вероятность разрушения образца в захватах.

Испытания проводили при двух скоростях нагрева: 5 и 50 К/мин. Деформирование образцов наблюдали непосредственно после окончания нагрева до требуемой температуры. Начальные скорости деформации варьировались в пределах  $1 * 10^{-5} - 5 * 10^{-2} \text{ с}^{-1}$ . Относительное удлинение образцов определяли по результатам замера рабочей части образца до и после испытания. Базовую (рабочую) длину, равную 10 мм, отмечали путём нанесения двух рисок, для чего использовали эмульсию, приготовленную из силикатного клея и диоксида титана.

Начальную скорость деформации рассчитывали по формуле:

$$\epsilon = v/l * 60, \text{ с}^{-1}$$

где  $v$  – скорость деформирования, мм/мин;  $l$  – рабочая длина образца, мм.

### 1.5 Дилатометрический и дифференциальный термический анализ

Дилатометрический анализ исследуемых аморфных сплавов проводили на установке, устройство и принцип работы которой описаны в работе [17]. Суть методики состоит в том, что с помощью двух высокочувствительных индуктивных дифференциальных трансформаторов регистрируется разность удлинений образца и эталона из кварца (длиной 30 мм), свободно подвешенных на тонких вольфрамовых нитях. Нагрев образца и эталона осуществляли с помощью специального нагревательного устройства, варьируя скорость нагрева от 1 до 80 К/мин. В нашем случае измерение теплового расширения проводили при нагреве со скоростями 5 и 50 К/мин.

С целью определения температур стеклования –  $T_g$  и кристаллизации –  $T_k$  проводили исследование АММ сплавов методом дифференциального термического анализа (ДТА). Температуры

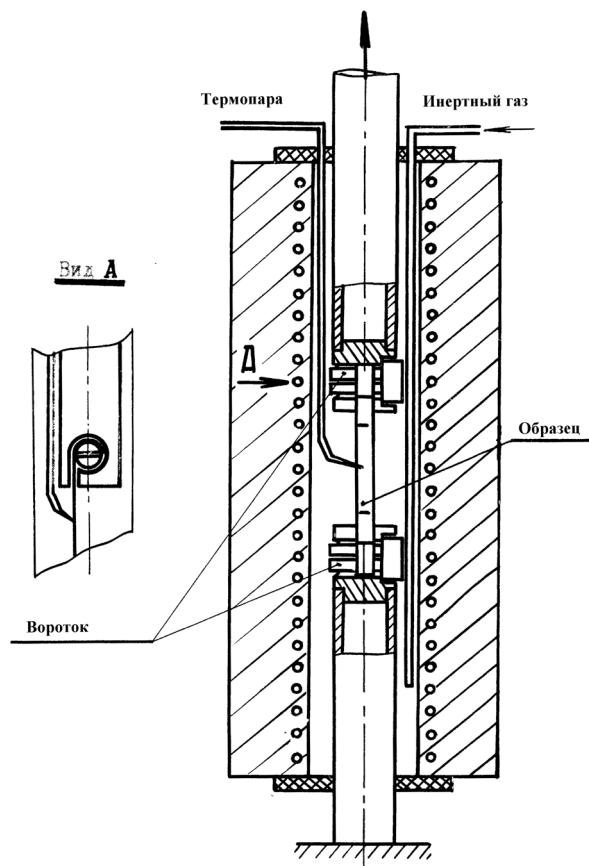


Рис. 5. Схема закрепления образца аморфного металлического сплава в специальных захватах при испытании на растяжение

стеклования  $T_g$  и кристаллизации  $T_k$  определяли по положению начала и конца эндотермических реакций на термограммах ДТА. Измерения проводили на дифференциальных термовесах модели «TGD- 1500RH», этот прибор позволяет проводить и микро-ДТА, для чего требуется незначительное количество материала. Температура образца и эталона из оксида алюминия ( $Al_2O_3$ ) регистрировалась платино-платинородиевой термопарой, установленной в днище кюветы. Для обеспечения стабильности базисной (нулевой) линии ДТА вес образца и эталона принимался одинаковым – 45 мг. Все измерения выполняли со скоростями нагрева 5 и 50 К/мин.

## 2. Исследование кинетики процесса нанокристаллизации аморфных металлических материалов

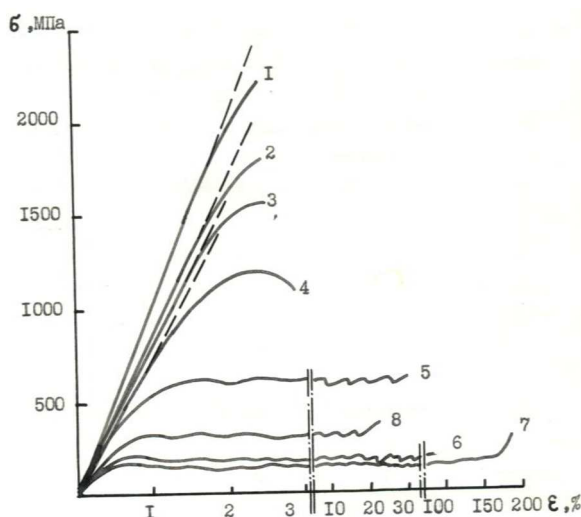
### 2.1. Нанокристаллизация при изотермическом отжиге

В результате выдержки при определённой температуре отжига в пределах устойчивости аморфного состояния сплава, материал образцов полностью или частично становится хрупким. Явление потери пластичности АММ имеет не только научный, но и большой практический интерес, так как это в значительной мере ограничивает и определяет температурный интервал термической обработки промышленных сплавов. Известно, что падение пластичности АММ происходит в две стадии [7–9]: первое – при низких температурах, вторая – при более высоких. На низкотемпературном этапе охрупчивания пластичность ( $\epsilon$ ) снижается от 1,0 до 0,1. На втором высокотемпературном этапе пластичность изменяется в пределах нескольких сотых единиц. Учитывая, что изменения  $\epsilon$  в интервале  $\pm 0,1$  лежит в пределах доверительного интервала при измерении пластичности на изгиб, вторую стадию охрупчивания можно не заметить при эксперименте. Явление потери пластичности АММ подробно описано в литературе для отжига в вакууме [2; 7; 11].

По результатам эксперимента получены зависимости пластичности исследуемых сплавов АММ от температуры отжига и продолжительности отжига (рис. 6). Установлено, что во всем температурном интервале изменения пластичности зависят от времени отжига. Зависимости в области

температур до 500 °С характеризуют кинетику процессов, лежащих в основе падения пластичности на первой стадии. Из анализа литературных данных [2–5; 13; 15] известно, что решающую роль в падении пластичности играет избыточный свободный объем и характер его эволюции при термических воздействиях на аморфную структуру, а также то, что это явление имеет релаксационную природу. Однако не предложен конкретный механизм, по которому структурная релаксация могла бы приводить к резкому охрупчиванию с позиции физики пластической деформации и разрушения. Частично данный подход вариативно рассмотрен в наших работах [7; 10; 11; 16]. К настоящему времени предложено две группы моделей для объяснения хрупкости аморфных металлических сплавов: «сегрегационная» модель, объясняющая хрупкость или падение пластичности при термическом воздействии образованием сегрегации атомов-металлоидов в определённых участках аморфной матрицы; и «кристаллическая» модель, связывающая хрупкость с формированием в аморфной матрице заметного ближнего порядка или кристаллических фаз определённого типа [2; 6; 7; 10; 11; 16].

Из полученной зависимости (рис. 6) видно, что с увеличением времени выдержки при отжиге падение пластичности начинается при меньших температурах. Критическая температура охрупчивающего отжига (первая стадия падения пластичности), значение которой соответствует снижению  $\epsilon$  пластичности в два раза, с увеличением времени выдержки уменьшается.



**Рис. 6.** Зависимости напряжение-деформация АММ 71КНСР при различных температурах: 1 – 293К, 2 – 473К, 3 – 573К, 4 – 673К, 5 – 803К, 6 – 823К, 7 – 836К, 8 – 863К.

Скорость нагрева – 50 К/мин.

Скорость деформации: 1–4 –  $8,3 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$ , 5–8 –  $1,2 \cdot 10^{-2} \text{ с}^{-1}$

Например, для сплава с Fe – основой при выдержке 5 мин падение пластичности начинается при температуре 400–420 °С, при выдержке в 10 мин. – при температуре 360–380 °С, а при выдержке в 20 мин – при температуре 350–360 °С, что свидетельствует, о термоактивационной природе процессов охрупчивания.

Полученные результаты хорошо согласуются с известными данными изменения пластичности АММ для отжига в вакууме [2] и в лабораторной печи в стабилизирующих пластинках [6], что позволяет определить температурный интервал термической обработки промышленных сплавов, а также сделать вывод о том, что характер изменения пластичности имеет двухступенчатый характер для всех температурных – временных режимов отжига.

## 2.2. Нанокристаллизация при термоциклическом воздействии

В результате экспериментальных исследований определили критическую температуру кристаллизации  $T_{кр}$  исследуемых сплавов: для сплава 10НСР  $\approx 530$  °С; для сплава 70КНСР  $\approx 550$  °С. Установлено, что критической температурой для нанокристаллизации АММ следует считать такую, когда для режима термоциклического воздействия в структуре материала наблюдается формирование (более 50 %) мелкодисперсных образований кристаллов (нанофаз) с размерами наномасштабного диапазона (определяли методами высокоразрешающей электронной микроскопии на

РЭМ марки VEGA-TESCAN с компьютерным микроанализом и рентгеноструктурными методами) [8; 9].

Анализ результатов экспериментальных опытов показал, что максимальную температуру термоциклирования следует назначать ниже критической температуры кристаллизации обрабатываемого сплава. Превышение максимальной температуры термоциклического отжига выше критической приводит к повышенному охрупчиванию и падению пластичности, что можно объяснить увеличением размеров формирующихся нанокристаллов и переходом материала из наносостояния в кристаллическое [8]. Стабилизацию структурного состояния материала при ТЦВ обеспечивает скоростной режим нагрева и охлаждения в термоцикле, когда в процессе ТЦВ уравниваются процессы генерации и релаксации внутренних напряжений [9; 18]. Полученные результаты по нанокристаллизации аморфных металлических материалов при ТЦВ на материал показали необходимость проведения дополнительных экспериментальных исследований для уточнения механизма и кинетики нанокристаллизации и оптимизации параметров режима термоциклического воздействия на материал. Анализ полученных результатов исследований показал, что для детальной оптимизации параметров ТЦВ необходимо провести дополнительные исследования по установлению закономерностей деформации АММ при температурах интервала термоциклирования.

### *2.3. Некоторые закономерности деформации аморфных сплавов при температурах (293 – 1,1 $T_k$ ) К*

Выполнены экспериментальные исследования определения высокотемпературных пластических и прочностных свойств в условиях активной деформации растяжением аморфных сплавов 10НСП и 71КНСП, состав которых приведён в табл. 1 и 2. Первоочередной задачей работы являлось установление температурных интервалов проявления высоких пластических свойств аморфных металлических сплавов. С этой целью проведены испытания аморфного сплава 71КНСП в интервале температур от комнатной до  $1,1T_k^-$  ( $T_k$  – температура начала кристаллизации). При анализе результатов исследований было установлено два обстоятельства:

1. Не все АММ сплавы могут проявлять высокопластичное (или сверхпластичное, СП) поведение. В том случае если сплав проявляет высокие пластические свойства, то это имеет место в достаточно узком температурном интервале вблизи  $T_k$ , что показано на примере аморфного сплава 71КНСП. На рис. 6 представлены зависимости напряжение  $\sigma$ -деформация  $\epsilon$  АММ 71КНСП при температурах 293, 473, 573, 673, 803, 823 и 863 К (кривые 1–7). Как видно, предел прочности этого сплава при комнатной температуре составляет  $\sim 2100$  МПа, а величина пластической деформации до разрушения составляет  $\sim 0,2 - 0,25$  % (кривая 1). В случае испытаний при  $T=473$  К (кривая 2) зависимость  $\sigma - \epsilon$  мало отличается от таковой при комнатной температуре. При  $T=573$  К величина пластической деформации до разрушения составляет  $\sim 0,7$  % (кривая 3). Дальнейшее повышение температуры испытания приводит к появлению на кривой  $\sigma - \epsilon$  ярко выраженной стадии пластического течения. Причём величина относительного удлинения стремительно растёт вблизи температуры начала кристаллизации  $T_k$  ( $T_k = 843$  при скорости нагрева  $T=50$ К/мин). Так при  $T=823$  К величина пластической деформации достигает 50 % (кривая 6), а при  $T=836$  К – 180 % (кривая 7). Предел текучести по мере повышения температуры испытания уменьшается и достигает минимума при  $T=836$  К. Деформирование при  $T > T_k$  сопровождается снижением показателей пластичности и повышением предела текучести (кривая 8). При высоких температурах деформации имеет место нестабильность пластического течения, выражающаяся в появлении срывов напряжения на кривой  $\sigma - \epsilon$ . Приведённые температурные зависимости  $\sigma$  и  $\epsilon$  показывают, что при  $\sim 573$  К ( $T \sim 0,7T_k$ ) имеет место перегиб в сторону значительного увеличения пластичности аморфного сплава 71КНСП.

2. Можно заметить, что установленная температура перехода от квазихрупкого поведения к пластичному ( $\sim 0,7T_k$ ) соответствует смене низкотемпературного гетерогенного механизма деформации на высокотемпературный гомогенный [14].

Смена механизма деформации с гетерогенного на гомогенный сопровождается изменением картины разрушения. При низких температурах в изломе наблюдается характерный для АММ веноподобный узор (рис. 7, а). При  $T > 0,7 T_k$  густота расположения «вен» растёт, а их узор становится более сложным (рис. 7, б).

Рассмотрим подробно механические свойства исследуемых сплавов в температурном интервале  $(0,85-1,1)T_k$ . Результаты исследования зависимостей пластичности  $\delta$  и предела текучести  $\sigma$  от температуры и скорости деформации для аморфного сплава 71КНСП представлены на рис. 8, а, б.

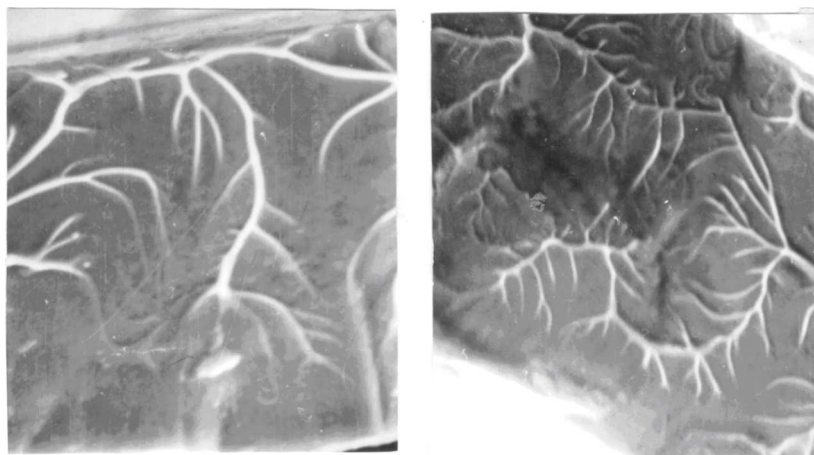


Рис. 7. Фрактограммы аморфного сплава 71КНСР после испытаний при 293К (а) и 600К (б). Увеличение –  $\times 1000$

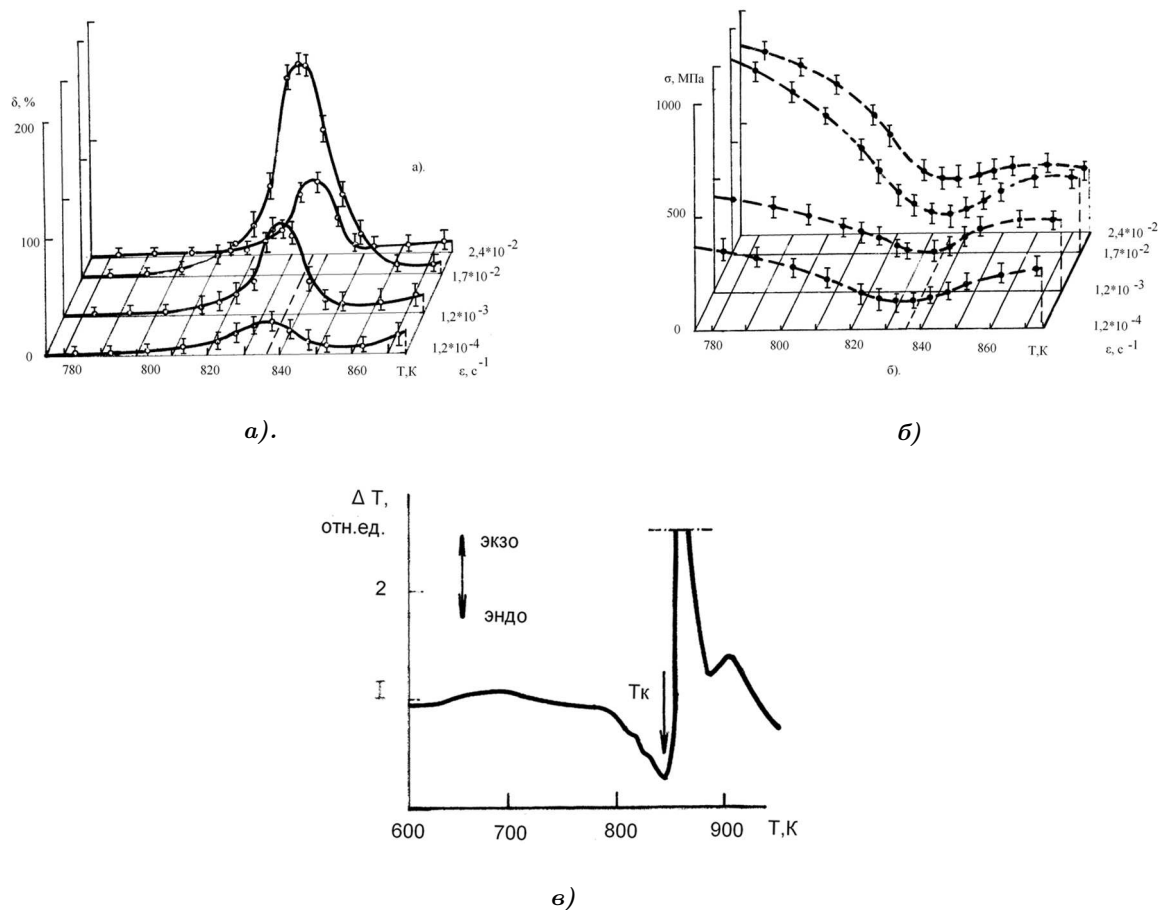


Рис. 8. Зависимость относительного удлинения (а), предела текучести (б) от температуры и скорости деформации, термограмма ДТА аморфного сплава 71КНСР (в). Скорость нагрева – 50К/мин

Деформация образцов начиналась непосредственно после достижения требуемой температуры, что позволяло ограничить неблагоприятное воздействие структурной релаксации на проявление эффекта повышенной пластичности. При постоянной скорости деформации по мере приближения к температуре  $T_{\text{опт}}$  пластичность возрастает сначала плавно, а затем – резко и достигает максимума при  $T = T_{\text{опт}}$ . При  $T > T_{\text{опт}}$ , пластичность материала резко падает. Зависимость  $\delta$  при постоянной температуре от скорости деформации также немонотонна. При оптимальной скорости деформа-

ции  $\dot{\epsilon}_{\text{опт}}$  материал обладает наивысшей пластичностью. Повышение скорости выше  $\dot{\epsilon}_{\text{опт}}$  приводит к понижению пластичности. Предел текучести при постоянной  $\dot{\epsilon}$  по мере приближения к  $T$  уменьшается, достигает минимума при  $T = T_{\text{опт}}$ , а затем увеличивается. С ростом скорости деформации при постоянной температуре предел текучести возрастает немонокотнно: вблизи  $\dot{\epsilon}$  наблюдается сильная зависимость  $\sigma - (\dot{\epsilon})$ .  $T$  и  $\dot{\epsilon}$  для сплава 71КНСР соответственно равны 836 К и  $1,7 * 10^{-2} \text{ с}^{-1}$ .

Результаты исследования АММ 71КНСР методом дифференциального термического анализа (ДТА) представлены на рис. 8, в. Термограмма ДТА этого сплава, полученная со скоростью нагрева 50 К/мин, имеет хорошо выраженный эндотермический пик и мощный кристаллизационный экзотермический пик. Наличие эндотермического пика свидетельствует о том, что началу процесса кристаллизации этого сплава предшествует процесс стеклования, имеющий место в интервале 800–842 К. Сопоставление данных, приведённых на рис. 8, приводит к выводу о том, что резкое увеличение пластичности наблюдается в интервале стеклования, а максимумы зависимостей  $\delta(T)$  (минимумы  $\sim(T)$ ) приходятся на  $T \sim 0,98T_k$ . При  $T > T_k$  происходит резкое снижение пластичности, обусловленное интенсивно протекающими процессами кристаллизации. Последнее согласуется с данными работ [1; 19], авторы которых наблюдали быстрое снижение скорости ползучести при кристаллизации АММ.

### Заключение

По результатам исследований сделаны следующие выводы:

1. Характер изменения пластичности АММ при изотермическом отжиге носит двухступенчатый характер для всех температурно-временных режимов отжига: низкотемпературный и высокотемпературный.

2. Характер изменения пластичности АММ при термоциклическом воздействии носит монотонный характер, если максимальная температура цикла не превышает температуры кристаллизации.

3. Показана возможность и эффективность использования режима термоциклического воздействия для осуществления контролируемой нанокристаллизации АММ, с целью повышения пластичности наноструктурированного материала и стабилизации его структурного состояния.

4. Установлено, что если кристаллизация аморфного сплава не начинается раньше достижения фазы стеклования (размягчения), которая фиксируется ДТА или дилатометрическим измерением, то в температурной области вблизи этой фазы материал проявляет сверхпластическое поведение. В любом случае, кристаллизация является лимитирующим пластичность фактором, что подтверждается на примере аморфного сплава 71КНСР, начало интенсивной кристаллизации вызывает сильное деформационное упрочнение и разрушение материала.

Исследования по кинетике процесса нанокристаллизации АММ в условиях изотермического отжига выполнены в полном объёме, а при термоциклировании требуют дополнительных исследований. Однако, по результатам проведённых исследований предложены рекомендации выбора и обоснования параметров термоциклического воздействия на аморфный материал (ноу-хау) с целью стабилизации нанокристаллического состояния и обеспечения оптимального сочетания свойств прочности и пластичности.

### Список литературы

1. Андриевский Р. А., Глезер А. М. Прочность наноструктур // Успехи физических наук. 2009. Т. 179. № 4. С. 337–358.
2. Глезер А. М. [и др.] Механическое поведение аморфных сплавов. Новокузнецк: Изд-во СибГИУ. 2006. 416 с.
3. Глезер А. М., Молотилов Б. В. Структура и механические свойства аморфных сплавов. М.: Металлургия. 1992. 208 с.
4. Глезер А. М., Пермякова И. Е., Федоров В. А. Трещиностойкость и пластичность аморфных сплавов при микроиндентировании // Изв. РАН. Серия физическая. 2006. С. 155.
5. Забелин С. Ф. [и др.]. Анализ нанокристаллизации и формирования нанофазных систем в поверхностном слое металлов и сплавов // Технология машиностроения. 2010. № 11. С. 5–12.



6. Забелин С. Ф., Васильев А. А., Феофанов А. А. Особенности формирования нанофазных систем в поверхностном слое материала при силовых и термопластических методах воздействия // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2010. Т. 15. № 3-1п. С. 837–838.
7. Забелин С. Ф. [и др.] Влияние режима отжига на кинетику процессов нанокристаллизации и охрупчивания аморфных металлических сплавов // Материалы международной конференции «Физика прочности и пластичности материалов». Самара: СГТУ. 2009. С. 74–75.
8. Забелин С. Ф., Зеленский В. А., Феофанов А. А. Механизм контролируемой нанокристаллизации аморфных металлических материалов при термоциклическом воздействии // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2010. Т. 15. № 3-1п. С.835–836.
9. Забелин С. Ф. [и др.] Особенности нанокристаллизации аморфных сплавов при нестационарных режимах термического воздействия // Сборник трудов 5-ой Евразийской конференции «Прочность неоднородных структур». М.: НИТУ «МИСиС». 2010. С. 119.
10. Забелин С. Ф. [и др.] Контролируемая нанокристаллизация аморфных сплавов при термоциклировании // Материалы 3-й Всероссийской конференции по наноматериалам «НАНО - 2009». Екатеринбург: Урал. изд-во, 2009. С. 440.
11. Забелин С. Ф. и др. Особенности поведения сплавов при переходе из аморфного в нанокристаллическое состояние при термоциклировании // Материалы 4-ой Евразийской конференции «Прочность неоднородных структур». 2008. М.: МИСиС (ТУ). С. 145.
12. Ковнеристый Ю. К. Объёмно-аморфизирующиеся металлические сплавы. М.: Наука, 1999. 80 с.
13. Ковнеристый Ю. К. Объёмно-аморфизирующиеся металлические сплавы и наноструктурные материалы на их основе // МиТОМ. 2005. № 7. С. 14–16.
14. Мильман Ю. В., Пан С. В., Рачек А. П. Хладноломкость аморфных металлических сплавов // Металлофизика. 1985. Т. 7. № 1. С. 112–114.
15. Ушаков И. В. Поликарпов В.М. Механические испытания тонких лент металлического стекла инденторами различной геометрической формы // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2007. Т. 69. № 7. С. 43–47.
16. Федоров В. А., Яковлев А. В., Капустин А. Н. Изменение пластических свойств аморфных металлических сплавов в зависимости от времени и температуры отжига // Труды Международной конференции «Деформация и разрушение материалов - DFMN - 2007». М.: ИМЕТиМ РАН. 2007. С. 344–346.
17. Хоник В. А., Зеленский В. А. Высокотемпературная пластичность и сверхпластичность металлических стекол // Физика металлов и металловедение. 1989. Т. 67. Вып. 1. С. 192–197.
18. Хоник В. А. Термическое расширение аморфных сплавов // Новые материалы электронной техники: сб. научных трудов. Воронеж: ВПИ. 1983. С. 35–39.
19. Штанский Д. В., Кулинич С. А., Левашов Е. А., Moore J. J. Особенности структуры и физико-механических свойств наноструктурных тонких пленок // Физика твердого тела. 2003. Т. 45. Вып. 6. С. 1122–1129.

Статья поступила в редакцию 24.03.2012 г.

УДК 517.956  
ББК В143

*Наталья Владимировна Игнатьева,*  
аспирант,  
Забайкальский государственный университет  
(Чита, Россия), e-mail: Ignatievanatalia@mail.ru

### О решении задачи Неймана в кусочно-однородных криволинейных областях со слабо проницаемой плёнкой в виде луча<sup>5</sup>

Решена задача Неймана для уравнения Лапласа в кусочно-однородной области, ограниченной одной ветвью гиперболы и состоящей из двух симметричных зон с различной проницаемостью. Линия раздела однородных зон состоит из отрезка с идеальным контактом зон и луча в виде слабо проницаемой пленки. Указанный контакт разнородных сред имеет место при неравномерных внешних воздействиях. С помощью метода свертывания разложений Фурье решение задачи выражено через решение классической задачи Неймана в однородной полуплоскости.

*Ключевые слова:* уравнение Лапласа, краевая задача Неймана, слабо проницаемая пленка, метод свертывания разложений Фурье.

*Natalia Vladimirovna Ignatyeva,*  
Graduate Student,  
Trans-Baikal State University  
(Chita, Russia), e-mail: Ignatievanatalia@mail.ru

### Solving the Neumann Problem in Piecewise-homogeneous Curved Areas with a Weakly Permeable Film as a Beam

The article solves the Neumann problem for the Laplace equation in a piecewise-homogeneous region bounded by one branch of a hyperbola, and consisting of two symmetrical zones with different permeability. The line between the homogeneous zones consists of a segment with the ideal zones contact and the beam in the form of a weakly permeable film. The specified contact of heterogeneous environments takes place in case of non-uniform external forces. Using the method of convolution of Fourier expansions, the solution is expressed through the solution of the classical Neumann problem in a homogeneous half-plane.

*Keywords:* Laplace equation, Neumann boundary value problem, weakly permeable film, method of convolution of Fourier expansions.

Рассмотрим на плоскости  $z = x + iy$  область  $D$ , ограниченную одной из ветвей гиперболы  $L: x^2(\sin l)^{-2} - y^2(\cos l)^{-2} = 1$ ,  $-\pi/2 < l < \pi/2$  и разделенную прямой  $y = 0$  на две симметричные однородные зоны  $D_1(x > \sin l, y < 0)$  и  $D_2(x > \sin l, y > 0)$  проницаемости  $k_j$  в  $D_j$ , когда луч  $L_1(x > 1, y = 0)$  (т.е. часть общей границы зон  $D_j$ ) является слабо проницаемой завесой, а на отрезке  $L_0(\sin l < x < 1, y = 0)$  контакт зон  $D_j$  идеальный. В данном случае имеет место сложный контакт зон  $D_j$ , что на практике соответствует контакту разнородных сред при неравномерных внешних воздействиях (при неравномерной деформации, неравномерном тепловом режиме и т. д.). Отметим, что при  $l \in (-\pi/2, 0)$  гипербола  $L$  выпукла вправо, а при  $l \in (0, \pi/2)$  гипербола  $L$  выпукла влево, при этом в обоих случаях область  $D$  расположена справа от гиперболы  $L$ . При  $l = 0$  область  $D$  является правой полуплоскостью.

Рассмотрим в области  $D = D_1 \cup D_2$  задачу Неймана относительно уравнения Лапласа, для постановки которой перейдем к эллиптическим координатам:

$$x = \sin \xi \operatorname{ch} \eta, \quad y = \cos \xi \operatorname{sh} \eta. \quad (1)$$

Аналитическая функция  $z = \sin \zeta$  конформно отображает полосу  $G(l < \xi < \pi/2, -\infty < \eta < \infty)$  вспомогательной плоскости  $\zeta = \xi + i\eta$  на рассматриваемую область  $D$  с разрезом в виде луча  $L_1(x > 1, y = 0)$  [1]. При этом прямая  $\xi = \pi/2$  отображается в дважды пробегаемый луч  $L_1$  разреза,

<sup>5</sup>Работа выполнена в рамках Государственного задания вузу Минобрнауки РФ, № 1.3985.2011.

полуполосы  $G_1(\eta < 0)$  и  $G_2(\eta > 0)$ ,  $l < \xi < \pi/2$  отображаются соответственно в зоны  $D_1(y < 0)$  и  $D_2(y > 0)$ , прямая  $\xi = l$  – в границу области  $D$ , т. е. в гиперболу  $L$ , отрезок  $\eta = 0$  ( $l < \xi < \pi/2$ ) – в отрезок  $L_0(\sin l < x < 1, y = 0)$ .

В эллиптических координатах  $\xi, \eta$  (1) или тоже самое в декартовых координатах вспомогательной плоскости  $\zeta = \xi + i\eta$  задача имеет вид [2–5]:

$$\partial_\xi^2 u_j + \partial_\eta^2 u_j = 0, \quad (\xi, \eta) \in G_j, \quad j = 1, 2, \quad (2)$$

$$\partial_\xi u_{1|\xi=l} = 0, \quad \partial_\xi u_{2|\xi=l} = f(\eta), \quad (3)$$

$$\eta = 0: \quad u_1 = u_2, \quad k_1 \partial_\eta u_1 = k_2 \partial_\eta u_2, \quad (4)$$

$$u_2(p, \eta) - u_1(p, -\eta) = Bk_1 \partial_\xi u_1(p, -\eta), \quad k_2 \partial_\xi u_2(p, \eta) + k_1 \partial_\xi u_1(p, -\eta) = 0, \quad (5)$$

где  $\partial_\xi^n = \partial^n / \partial \xi^n$ ,  $p = \pi/2$ . Условия (4) являются классическими условиями сопряжения на идеальном контакте. Условия (5) соответствуют обобщённым условиям сопряжения на завесе, при этом разрезом  $L_1$  можно пренебречь [5]. Отметим, что решение задачи (2)–(5) определяется с точностью до аддитивной постоянной, одинаковой для функций  $u_i$ .

Представим решение задачи (2)–(5) в виде

$$u_1(\xi, \eta) = \frac{2k_2}{k_1 + k_2} \varphi(\xi, \eta), \quad u_2(\xi, \eta) = \varphi(\xi, \eta) + \frac{k_2 - k_1}{k_1 + k_2} \varphi(\xi, -\eta), \quad (6)$$

при этом функции (6) тождественно удовлетворяют классическим условиям сопряжения (4). Отсюда для функции  $\varphi(\xi, \eta)$  получим задачу в однородной полосе  $G(l < \xi < p, \eta \in R)$  вида

$$\partial_\xi^2 \varphi + \partial_\eta^2 \varphi = 0, \quad \partial_\xi \varphi|_{\xi=l} = \begin{cases} f(\eta), & \eta > 0 \\ 0 & \eta < 0 \end{cases}, \quad (7)$$

$$\varphi(p, \eta) - \varphi(p, -\eta) = \frac{2}{\gamma} \partial_\xi \varphi(p, -\eta), \quad \partial_\xi \varphi(p, \eta) + \partial_\xi \varphi(p, -\eta) = 0, \quad (8)$$

где

$$\gamma = \frac{k_1 + k_2}{Bk_1 k_2}. \quad (9)$$

Решение задачи (7), (8) также определяется с точностью до аддитивной постоянной.

Наряду с данной задачей рассмотрим классическую задачу Неймана в однородной полуплоскости  $\xi > l, \eta \in R$ :

$$\partial_\xi^2 F + \partial_\eta^2 F = 0, \quad \partial_\xi F|_{\xi=l} = \begin{cases} f(\eta), & \eta > 0 \\ 0 & \eta < 0 \end{cases}, \quad (10)$$

решение которой строится методом функции Грина [2] и далее считается известной функцией  $F(\xi, \eta)$ .

Методом свертывания разложений Фурье [3; 4] выразим решение задачи (7), (8) непосредственно через функцию  $F(\xi, \eta)$ . Предположим сначала, что функция  $F(l, \eta)$  разлагается в интеграл Фурье с коэффициентами Фурье  $g_i(\lambda)$ :

$$F(l, \eta) = \int_0^\infty g_i \sigma_i d\lambda, \quad \sigma_1 = \sin \lambda \eta, \quad \sigma_2 = \cos \lambda \eta. \quad (11)$$

Здесь и ниже по повторяющимся в одной части равенства индексам  $i = 1, 2$  суммируем. Отсюда, решая задачу Дирихле в полуплоскости  $\xi \geq l$  с граничной функцией  $F(l, \eta)$  методом Фурье, представим функцию  $F(\xi, \eta)$  в виде

$$F(\xi, \eta) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda(\xi-l)} g_i \sigma_i d\lambda, \quad \xi \geq l. \quad (12)$$

Решение задачи (7), (8) будем искать в виде

$$\varphi(\xi, \eta) = F(\xi, \eta) + \int_0^{\infty} \operatorname{ch} \lambda(\xi-l) a_i \sigma_i d\lambda, \quad l < \xi < p, \quad (13)$$

где  $a_i(\lambda)$  – неизвестные параметры, при этом функция (13) удовлетворяет условиям задачи (7). Приравнявая в условиях сопряжения (8) коэффициенты при функциях  $\sigma_j$ , с учётом разложения (12) для двух параметров  $a_i$  получим систему четырёх алгебраических уравнений, два из которых выполняются тождественно. Отсюда находим

$$a_1 = \frac{e^{-\lambda r}(\lambda - \gamma)g_1}{\lambda \operatorname{sh} \lambda r + \gamma \operatorname{ch} \lambda r}, \quad a_2 = \frac{e^{-\lambda r}g_2}{\operatorname{sh} \lambda r},$$

где  $r = p - l$ , при этом  $a_2 \rightarrow \infty$  при  $\lambda \rightarrow 0$ , т. е. при формальной подстановке коэффициентов  $a_i$  в выражение (13) получим расходящийся интеграл. Подберём аддитивную постоянную для функции  $\varphi$  (13) так, чтобы результирующий интеграл сходился. Отсюда функция  $\varphi$  (13) примет вид

$$\varphi = F(\xi, \eta) + \int_0^{\infty} e^{-\lambda r} \left[ \frac{(\lambda - \gamma)g_1 \operatorname{ch} \lambda(\xi-l)\sigma_1}{\lambda \operatorname{sh} \lambda r + \gamma \operatorname{ch} \lambda r} + \frac{g_2 \operatorname{ch} \lambda(\xi-l)\sigma_2 - g_2}{\operatorname{sh} \lambda r} \right] d\lambda, \quad (14)$$

где функции  $\sigma_i(\eta, \lambda)$  имеют вид (11), при этом полученный интеграл сходится и функция  $\varphi$  (14) удовлетворяет условиям задачи (7), (8), что проверяется непосредственно.

Приведём функцию (14) к виду, не содержащему разложений Фурье. Разложим дроби (14) в геометрические прогрессии

$$\frac{1}{\operatorname{sh} \lambda r} = \frac{2e^{-\lambda r}}{1 - e^{-2\lambda r}} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda r(2n+1)},$$

$$\frac{\lambda - \gamma}{\lambda \operatorname{sh} \lambda r + \gamma \operatorname{ch} \lambda r} = \frac{2e^{-\lambda r}(\lambda - \gamma)}{(\lambda + \gamma)(1 - q)} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\lambda - \gamma}{\lambda + \gamma} \right)^{n+1} e^{-\lambda r(2n+1)},$$

где

$$q = \frac{\lambda - \gamma}{\lambda + \gamma} e^{-2\lambda r},$$

при этом  $|q| < 1$  при  $0 < \lambda < \infty$ . Отсюда функция (14) примет вид

$$\varphi = F(\xi, \eta) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \left\{ (e^{-\lambda \xi_1} + e^{-\lambda \xi_2}) \left[ \left( \frac{\lambda - \gamma}{\lambda + \gamma} \right)^n g_1 \sigma_1 + g_2 \sigma_2 \right] - 2e^{-2\lambda r n} g_2 \right\} d\lambda, \quad (15)$$

где  $\xi_1 = -\xi + 2rn + l > 0$ ,  $\xi_2 = \xi + 2rn - l > 0$ ,  $r = p - l$ ,  $p = \pi/2$ .

Из разложения функции  $F(\xi, \eta)$  (12) следуют равенства

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda \tau} g_i \sigma_i d\lambda = F_i(\tau, \eta), \quad i = 1, 2, \quad (16)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda\tau} \frac{(\lambda - \gamma)^k}{(\lambda + \gamma)^n} g_1 \sigma_1 d\lambda = \frac{(-1)^k}{(n-1)!} \int_0^{\infty} e^{-2\gamma t} t^{n-1} \frac{\partial^k}{\partial t^k} [e^{\gamma t} F_1(\tau + t, \eta)] dt, \quad (17)$$

где

$$F_i(\tau, \eta) = \frac{F(\tau + l, \eta) + (-1)^i F(\tau + l, -\eta)}{2}, \quad \tau > 0. \quad (18)$$

Равенство (17) следует из равенства (16) при  $i = 1$ , на которое действует оператор по переменной  $t$ , стоящий в правой части равенства (17). Отсюда решение (15) задачи (7), (8) приводится к виду без разложений Фурье

$$\begin{aligned} \varphi(\xi, \eta) = & F(\xi, \eta) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ F_2(\xi_1, \eta) + F_2(\xi_2, \eta) - 2F_2(2rn, 0) + \right. \\ & \left. + \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \int_0^{\infty} e^{-2\gamma t} t^{n-1} \frac{\partial^n \Phi_n(\xi, t, \eta)}{\partial t^n} dt \right\}, \quad (19) \end{aligned}$$

где

$$\Phi_n(\xi, t, \eta) = e^{\gamma t} [F_1(\xi_1 + t, \eta) + F_1(\xi_2 + t, \eta)],$$

переменные  $\xi_i$  определены в (15), постоянная  $\gamma$  и функции  $F_i(\xi, \eta)$  имеют вид (9), (18),  $F(\xi, \eta)$  – решение классической задачи Неймана в однородной полуплоскости (10). Решение исходной задачи (2)–(5) строится по формулам (6), (19).

#### Список литературы

1. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
2. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.
3. Холодовский С. Е. Метод свёртывания разложений Фурье. Случай обобщённых условий сопряжения типа трещины (завесы) в кусочно-неоднородных средах // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 6. С. 855–859.
4. Холодовский С. Е. Метод свертывания разложений Фурье. Случай трещины (завесы) в неоднородном пространстве // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 8. С. 1204–1208.
5. Холодовский С. Е., Гуримская И. А., Игнатьева Н. В. О решении краевых задач на неоднородной плоскости с трещиной и завесой, соединенными последовательно // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47. № 3. С. 396–404.

Статья поступила в редакцию 30.03.2012 г.

УДК 517.51  
ББК 22.161

*Ольга Сергеевна Лямина,*

*аспирант,*

*Забайкальский государственный университет*

*(Чита, Россия), e-mail: lyamina-os@mail.ru*

### О нормах тригонометрических операторов Баскакова

Статья относится к одному из актуальных вопросов теории приближений: исследованию аппроксимативных возможностей конкретных аппроксимирующих конструкций.

В статье рассмотрен один из активно исследуемых в последнее время видов аппроксимирующих операторов – тригонометрические операторы Баскакова. Исследуется вопрос об оценке норм и характере их зависимости от  $n$  (порядкового номера оператора) и параметров  $m$  и  $k_j$ .

*Ключевые слова:* тригонометрические операторы Баскакова, нормы, аппроксимирующие последовательности.

*Olga Sergeevna Lyamina,*

*Graduate Student,*

*Trans-Baikal State University (Chita, Russia), e-mail: lyamina-os@mail.ru*

### On Norms of Baskakov Trigonometric Operators

The article discusses one of the actual problems in the theory of approximations – the study of approximative opportunities of the concrete approximating structures. It considers one of the recent times actively studied types of approximating operators – Baskakov trigonometric operators. It investigates the problem of estimating the norms and the nature of their dependence on  $n$  (serial number of the operator) and parameters  $m$  and  $k_j$ .

*Keywords:* Baskakov trigonometric operators, norms, approximating sequences.

#### *Вводные замечания*

Предметом предлагаемой статьи является изучение характера изменения величины  $\eta(m, k_1, \dots, k_m)$  (см. ниже) в зависимости от изменения параметров  $m, k_j$ . Изучаемая величина определяется выражением

$$\eta(m, k_1, \dots, k_m) = 2 \pi^{2m-1} \prod_{j=1}^m k_j^2 \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 t dt}{t^2 \prod_{j=1}^m |k_j^2 \pi^2 - t^2|}. \quad (1)$$

Здесь  $m, k_1, \dots, k_m$  – целые параметры, удовлетворяющие неравенствам  $m > 0, 0 < k_1 < k_2 < \dots < k_m$ . Если  $m = 1$ , то вместо  $k_1$  будем писать  $k$ . Величина (1) появляется при изучении аппроксимативных свойств так называемых тригонометрических операторов Баскакова  $M_n^{[m](k_1, \dots, k_m)}(f, x)$  (определение и некоторые факты, касающиеся операторов  $M_n^{[m](k_1, \dots, k_m)}(f, x)$  приведены, например, в [1]). Для норм этих операторов выполняется равенство

$$\left\| M_n^{[m](k_1, \dots, k_m)} \right\| = \eta(m, k_1, \dots, k_m) + \gamma_n, \quad (2)$$

где при любых фиксированных значениях  $m, k_j$ , выполняется  $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n([m], k_1, \dots, k_m) = 0$ .

Мы изложим полученные к настоящему времени результаты: 1) при увеличении  $m$  величина  $\eta(m, 1, 2, \dots, m)$  неограниченно растёт, 2) при  $m = 1, 2$   $\sup_k \eta(1, k)$  и  $\sup_{k_1, k_2} \eta(2, k_1, k_2)$  равномерно ограничены.

**Отсутствие конечной верхней грани  $\eta(m, k_1, \dots, k_m)$  по  $m$ .**

**Теорема 1.** Множество величин  $\eta(m, k_1, \dots, k_m)$  не имеет конечной верхней грани.

*Доказательство.*

Для сокращения записи обозначим

$$\eta(m) = \eta(m, 1, 2, \dots, m). \text{ Обозначим далее } \Phi(m, r) = 2 \pi^{2m-1} (m!)^2 \int_0^r \frac{\sin^2 t dt}{t^2} \left( \prod_{j=1}^m |j^2 \pi^2 - t^2| \right)^{-1}.$$

Тогда  $\eta(m) = \lim_{r \rightarrow \infty} \Phi(m, r)$ . При фиксированном  $r > 0$  имеем

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \Phi(m, r) = 2 \pi^{-1} \int_0^r \frac{\sin^2 t dt}{t^2 \prod_{j=1}^{\infty} \left| 1 - \frac{t^2}{j^2 \pi^2} \right|}. \quad (3)$$

Учитывая, что  $\sin t = t \prod_{j=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{t^2}{j^2 \pi^2} \right)$ , а, следовательно, при  $t > 0$

$$t \prod_{j=1}^{\infty} \left| 1 - \frac{t^2}{j^2 \pi^2} \right| = \left| t \prod_{j=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{t^2}{j^2 \pi^2} \right) \right| = |\sin t|,$$

получим

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \Phi(m, r) = 2 \pi^{-1} \int_0^r \frac{|\sin t| dt}{t}. \quad (4)$$

Интеграл в правой части (4) при  $r \rightarrow \infty$  стремится к бесконечности со скоростью  $O(\ln r)$ . Таким образом, величины  $\eta(m)$  не имеют конечной верхней грани.

Теорема доказана.

**Случай  $m = 1$ .**

В случае  $m = 1$  будем писать  $k$  вместо  $k_1$ .

В этом случае  $\|M_n^{[1](k)}\| = A_{o,0} + \gamma_{k,n}$ , где  $A_{o,0} = A_{o,0}(k) = 2 \pi k^2 \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 t dt}{t^2 |k^2 \pi^2 - t^2|}$ , при любом фиксированном  $k$  имеет место  $\gamma_{k,n} = o(1)$  [3].

Сформулируем основной результат этого пункта.

**Теорема 2.** При  $k \rightarrow \infty$  имеет место асимптотическое равенство  $A_{o,0}(k) = 1 + O\left(\frac{\ln k}{k}\right)$ .

*Доказательство.*

Заметим, что из равенства  $M_n^{[1](k)}(1, x) = 1$  следует  $2 \pi k^2 \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 t dt}{t^2 (k^2 \pi^2 - t^2)} = 1$  [1]. Отсюда получаем  $2 \pi k^2 \int_0^{k \pi} \frac{\sin^2 t dt}{t^2 (k^2 \pi^2 - t^2)} > 1$ . Это значит, что найдется  $\lambda_0(k) \pi$ , такое, что

$$2 \pi k^2 \int_0^{\lambda_0} \frac{\sin^2 t dt}{t^2 (k^2 \pi^2 - t^2)} = 1. \quad (5)$$

Из (5) следует, что

$$2 \pi k^2 \int_{\lambda_0}^{k \pi} \frac{\sin^2 t dt}{t^2 (k^2 \pi^2 - t^2)} = 2 \pi k^2 \int_{k \pi}^{\infty} \frac{\sin^2 t dt}{t^2 |k^2 \pi^2 - t^2|}. \quad (6)$$

Из (5) и (6) приходим к выводу, что для доказательства теоремы достаточно исследовать поведение величины  $J(k) = 2 \pi k^2 \int_0^{k \pi} \frac{\sin^2 t dt}{t^2 (k^2 \pi^2 - t^2)}$ . Используя равенство  $\frac{1}{t^2 (k^2 \pi^2 - t^2)} = (\pi k)^{-2} \left( \frac{1}{t^2} + \frac{1}{k^2 \pi^2 - t^2} \right)$ , получим

$$J(k) = \frac{2}{\pi} \left( \int_0^{k\pi} \frac{\sin^2 t dt}{t^2} + \int_0^{k\pi} \frac{\sin^2 t dt}{k^2\pi^2 - t^2} \right). \quad (7)$$

Рассмотрим первое слагаемое в правой части (7).

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{k\pi} \frac{\sin^2 t dt}{t^2} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 t dt}{t^2} + O(k^{-1}) = 1 + O(k^{-1}). \quad (8)$$

При этом используется, что  $\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 t dt}{t^2} = \frac{\pi}{2}$ .

Покажем теперь, что второе слагаемое в правой части (7) имеет порядок  $k^{-1} \ln k$ . Раскладывая в сумму дробь  $(k^2\pi^2 - t^2)^{-1}$ , имеем

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{k\pi} \frac{\sin^2 t dt}{k^2\pi^2 - t^2} = \frac{1}{k\pi^2} \left( \int_0^{k\pi} \frac{\sin^2 t dt}{k\pi + t} + \int_0^{k\pi} \frac{\sin^2 t dt}{k\pi - t} \right). \quad (9)$$

Относительно первого интеграла в скобках правой части (9) имеем

$$\int_0^{k\pi} \frac{\sin^2 t dt}{k\pi + t} < (k\pi)^{-1} \int_0^{k\pi} \sin^2 t dt = O(1). \quad (10)$$

Во втором интеграле делаем замену  $\tau = k\pi - t$

$$\int_0^{k\pi} \frac{\sin^2 t dt}{k\pi - t} = \int_0^{k\pi} \frac{\sin^2 \tau dt}{\tau} = O(\ln k).$$

Имея ввиду (6), делаем вывод, что теорема доказана.

**Случай  $m = 2$ .**

**Теорема 3.** Величина  $\eta(2, k_1, k_2)$  равномерно ограничена по всем возможным наборам  $(k_1, k_2)$ .

*Доказательство.*

Представим  $\eta(2, k_1, k_2)$  в виде суммы трёх слагаемых

$$\begin{aligned} \eta(2, k_1, k_2) &= 2\pi^3 k_1^2 k_2^2 \int_0^{k_1\pi} \frac{\sin^2 t dt}{t^2(k_1^2\pi^2 - t^2)(k_2^2\pi^2 - t^2)} + \\ &+ 2\pi^3 k_1^2 k_2^2 \int_{k_1\pi}^{k_2\pi} \frac{\sin^2 t dt}{t^2(t^2 - k_1^2\pi^2)(k_2^2\pi^2 - t^2)} + 2\pi^3 k_1^2 k_2^2 \int_{\infty}^{k_2\pi} \frac{\sin^2 t dt}{t^2(t^2 - k_1^2\pi^2)(t^2 - k_2^2\pi^2)} = T_1 + T_2 + T_3. \end{aligned}$$

Рассмотрим по очереди слагаемые  $T_1, T_2, T_3$ .

$$\begin{aligned} T_1 &= 2 \frac{\pi k_1^2 k_2^2}{k_2^2 - k_1^2} \int_0^{k_1\pi} \frac{\sin^2 t}{t^2} \left( \frac{1}{k_1^2\pi^2 - t^2} - \frac{1}{k_2^2\pi^2 - t^2} \right) dt = \\ &= 2\pi^{-1} \int_0^{k_1\pi} \frac{\sin^2 t dt}{t^2} + 2\pi \frac{k_1^2 k_2^2}{k_2^2 - k_1^2} \int_0^{k_1\pi} \sin^2 t \left( \frac{1}{\pi^2 k_1^2} \cdot \frac{1}{k_1^2\pi^2 - t^2} - \frac{1}{\pi^2 k_2^2} \cdot \frac{1}{k_2^2\pi^2 - t^2} \right) dt = \\ &= T_{1,1} + T_{1,2}. \end{aligned}$$

$T_{1,1}$  равномерно по  $k_1$  ограничен, так как он от  $k_2$  не зависит. Для исследования  $T_{1,2}$  воспользуемся равенством:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi^2} \left( \frac{1}{k_1^2} \cdot \frac{1}{k_1^2\pi^2 - t^2} - \frac{1}{k_2^2} \cdot \frac{1}{k_2^2\pi^2 - t^2} \right) &= \pi^{-2} \frac{k_2^2 - k_1^2}{k_1^2 k_2^2} \cdot \frac{\pi^2(k_1^2 + k_2^2) - t^2}{(k_1^2\pi^2 - t^2)(k_2^2\pi^2 - t^2)} = \\ &= \pi^{-2} \frac{k_2^2 - k_1^2}{k_1^2 k_2^2} \left( \frac{1}{k_1^2\pi^2 - t^2} + \frac{1}{k_2^2\pi^2 - t^2} + \frac{t^2}{(k_1^2\pi^2 - t^2)(k_2^2\pi^2 - t^2)} \right). \end{aligned}$$



Таким образом,

$$T_{1,2} = 2\pi^{-1} \int_0^{k_1 \pi} \frac{\sin^2 t dt}{k_1^2 \pi^2 - t^2} + 2\pi^{-1} \int_0^{k_1 \pi} \frac{\sin^2 t dt}{k_2^2 \pi^2 - t^2} + \\ + 2\pi^{-1} \int_0^{k_1 \pi} \frac{t^2 \sin^2 t dt}{(k_1^2 \pi^2 - t^2)(k_2^2 \pi^2 - t^2)} = T_{1,2,1} + T_{1,2,2} + T_{1,2,3}.$$

Интегралы  $T_{1,2,1}$  и  $T_{1,2,2}$  – равномерно ограничены (см. п. 2),

$$T_{1,2,3} = 2\pi^{-1} \int_0^{k_1 \pi} \frac{t^2 \sin^2 t dt}{(k_1^2 \pi^2 - t^2)(k_2^2 \pi^2 - t^2)} = 2\pi^{-1} \frac{\xi^2}{(k_1 \pi + \xi)(k_2 \pi + \xi)} \int_0^{k_1 \pi} \frac{\sin^2 t dt}{(k_1 \pi - t)(k_2 \pi - t)},$$

где  $\xi \in (0, k_1 \pi)$ . Множитель перед интегралом ограничен. Действительно,

$$\frac{\xi^2}{(k_1 \pi + \xi)(k_2 \pi + \xi)} < \frac{(k_1 \pi)^2}{k_1 \pi \cdot k_2 \pi} = \frac{k_1}{k_2} < 1.$$

Относительно интеграла имеем

$$\int_0^{k_1 \pi} \frac{\sin^2 t dt}{(k_1 \pi - t)(k_2 \pi - t)} < \int_0^{k_1 \pi} \frac{\sin^2 t dt}{(k_1 \pi - t)^2} = \int_0^{k_1 \pi} \frac{\sin^2 t dt}{t^2} < \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 t dt}{t^2}.$$

Последний интеграл имеет конечное значение. Исследуем поведение  $T_2$ :

$$T_2 = 2\pi^3 k_1^2 k_2^2 \int_{k_1 \pi}^{k_2 \pi} \frac{\sin^2 t dt}{t^2 (t^2 - k_1^2 \pi^2)(k_2^2 \pi^2 - t^2)} = \\ = -2\pi^2 k_1^2 k_2^2 \int_{k_1 \pi}^{k_2 \pi} \frac{\sin^2 t dt}{t^2 (k_1^2 \pi^2 - t^2)(k_2^2 \pi^2 - t^2)}.$$

Под интегралом, таким образом, получилось то же выражение, что и в  $T_1$ . Следовательно, можно произвести те же преобразования. Получаем:

$$T_2 = -2\pi^{-1} \int_{k_1 \pi}^{k_2 \pi} \frac{\sin^2 t dt}{t^2} + 2\pi^{-1} \int_{k_1 \pi}^{k_2 \pi} \frac{\sin^2 t dt}{t^2 - k_1^2 \pi^2} - 2\pi^{-1} \int_{k_1 \pi}^{k_2 \pi} \frac{\sin^2 t dt}{k_2^2 \pi^2 - t^2} + \\ + 2\pi^{-1} \int_{k_1 \pi}^{k_2 \pi} \frac{t^2 \sin^2 t dt}{(t^2 - k_1^2 \pi^2)(k_2^2 \pi^2 - t^2)}.$$

Все слагаемые равномерно по  $k_1, k_2$  ограничены. Таким образом, равномерная ограниченность  $T_2$  доказана.

$$T_3 = 2\pi^3 k_1^2 k_2^2 \int_{k_2 \pi}^{\infty} \frac{\sin^2 t dt}{t^2 (t^2 - k_1^2 \pi^2)(t^2 - k_2^2 \pi^2)} < 2\pi k_1^2 \int_{k_2 \pi}^{\infty} \frac{\sin^2 t dt}{(t^2 - k_1^2 \pi^2)(t^2 - k_2^2 \pi^2)} = \\ = 2\pi^{-1} \int_{k_2 \pi}^{\infty} \frac{\pi^2 k_1^2}{(t + k_1 \pi)(t + k_2 \pi)} \cdot \frac{\sin^2 t dt}{(t - k_1 \pi)(t - k_2 \pi)} < 2\pi^{-1} \int_{k_2 \pi}^{\infty} \frac{\sin^2 t dt}{(t - k_1 \pi)(t - k_2 \pi)}.$$

Последнее неравенство выполняется в силу того, что

$$\frac{\pi^2 k_1^2}{(t + k_1 \pi)(t + k_2 \pi)} < 1$$

при  $t > k_2 \pi$ . Далее,

$$2\pi^{-1} \int_{k_2 \pi}^{\infty} \frac{\sin^2 t dt}{(t - k_1 \pi)(t - k_2 \pi)} = 2\pi^{-1} \int_{k_2 \pi}^{\infty} \frac{\sin^2 t dt}{(t - k_2 \pi)^2} = 2\pi^{-1} \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 t dt}{t^2}.$$

Теорема доказана.

*Список литературы*

1. Абакумов Ю. Г. Приближение периодических функций тригонометрическими операторами Баскакова. Чита: ЧитГУ, 2006. 158 с.
2. Абакумов Ю. Г. Тригонометрические операторы Баскакова – уникальный пример совокупности аппроксимирующих последовательностей // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь: ТвГУ, 2007. С. 8–13.
3. Коган Е. С. Некоторые методы получения точных и экстремальных констант в оценках приближения линейными операторами функций классов  $Lip_M\alpha$  : автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Красноярск, 2005. 16 с.

Статья поступила в редакцию 30.03.2012 г.

УДК 519.7  
ББК 22.18

*Александр Эмануилович Менчер,*  
кандидат физико-математических наук, профессор,  
Забайкальский государственный гуманитарно-педагогический университет  
им. Н. Г. Чернышевского (Чита, Россия), e-mail: aementcher@mail.ru

### Арбитражная процедура в трёх точках со степенной функцией выигрыша<sup>1</sup>

Организация переговоров с использованием арбитражных процедур является актуальной теоретико-игровой задачей. В работе рассматривается бескоалиционная игра с нулевой суммой, в которой применена схема арбитража, обобщающая известную арбитражную процедуру по последнему предложению. Найдено равновесие в игре по Нэшу в смешанных стратегиях.

*Ключевые слова:* игра, арбитражная схема, равновесие, смешанные стратегии.

*Alexandr Emanuelovich Mentcher,*  
Candidate of Physics and Mathematics, Professor,  
Zabaikalsky State Humanitarian Pedagogical University  
named after N. G. Chernyshevsky (Chita, Russia), e-mail: aementcher@mail.ru

### On the Arbitration Procedure in Three Points with Power Payoff Function

The organization of negotiations by using arbitration procedures is an actual problem in game theory. The paper considers a non-cooperative zero-sum game with an arbitration procedure that generalizes the well-known arbitration final-offer procedure. It presents the found Nash equilibrium in this game in mixed strategies.

*Keywords:* game, arbitration scheme, equilibrium, mixed strategies.

#### 1. Введение

Рассматривается игра с нулевой суммой, в которой игроки  $L$  и  $M$ , именуемые, соответственно, как работник и работодатель, ведут переговоры об установлении заработной платы. Игрок  $L$  делает предложение  $x$ , а игрок  $M$  – предложение  $y$ ;  $x$  и  $y$  – произвольные действительные числа. Если  $x \leq y$ , то конфликта нет и игроки соглашаются на выплату жалования, равного  $\frac{x+y}{2}$ . Если же  $x > y$ , игроки апеллируют к арбитру  $A$ . Обозначим решение арбитра через  $z$ . В работах [1–5] для достижения соглашения между игроками использовалась схема арбитража по последнему предложению, в которой из предложений  $x$  и  $y$  выбиралось то, которое ближе к решению арбитра  $z$ . В такой игре функция выигрыша определялась как математическое ожидание случайной величины  $H_z(x, y)$ :  $H(x, y) = EH_z(x, y)$ , где

$$H_z(x, y) = \begin{cases} \frac{x+y}{2}, & \text{если } x \leq y, \\ x, & \text{если } x > y, |x-z| < |y-z|, \\ y, & \text{если } x > y, |x-z| > |y-z|, \\ z, & \text{если } x > y, |x-z| = |y-z|. \end{cases} \quad (1)$$

В настоящей работе мы, в предположении, что  $-\infty < y \leq 0 \leq x < +\infty$ , а  $z$  – дискретная случайная величина, принимающая значения  $-1, 0, 1$  с равными вероятностями  $p = \frac{1}{3}$ , будем полагать

$$H_z(x, y) = \begin{cases} x^\alpha, & \text{если } |x-z| < |y-z|, \\ -(-y)^\alpha, & \text{если } |x-z| > |y-z|, \\ z, & \text{если } |x-z| = |y-z|. \end{cases} \quad (2)$$

<sup>1</sup>Работа выполнена в рамках Государственного задания вузу Минобрнауки РФ, №8.3641.2011.

Равновесие в игре будем искать в смешанных стратегиях. Обозначим через  $f(x)$  и  $g(y)$  смешанные стратегии игроков  $L$  и  $M$ , соответственно. Имеем:

$$f(x) \geq 0, \quad \int_0^{+\infty} f(x) dx = 1; \quad g(y) \geq 0, \quad \int_{-\infty}^0 g(y) dy = 1.$$

Благодаря симметрии, цена игры равна нулю, а оптимальные стратегии симметричны относительно оси ординат, то есть:  $g(y) = f(-y)$ . Следовательно, достаточно построить оптимальную стратегию только для одного из игроков, например,  $L$ . Функцию выигрыша игрока  $M$  при выбранной игроком  $L$  стратегии  $f(x)$  обозначим через  $H(f(x), y)$ .

## 2. Оптимальные стратегии.

**Теорема.** Если  $\alpha \in (0, 2]$ , то для игрока  $L$  оптимальной является стратегия

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq x < c, \\ \frac{\alpha c^{\frac{\alpha}{2}}}{x^{\frac{\alpha}{2}+1}}, & \text{если } c < x < c+2, \\ 0, & \text{если } c+2 < x < +\infty, \end{cases} \quad (3)$$

где  $c = \frac{2}{4^{\frac{1}{\alpha}} - 1}$ .

*Доказательство.* Будем искать оптимальную стратегию игрока  $L$  в виде

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq x < c, \\ \varphi(x), & \text{если } c < x < c+2, \\ 0, & \text{если } c+2 < x < +\infty, \end{cases} \quad (4)$$

где функция  $\varphi(x)$  положительна и непрерывно дифференцируема в интервале  $(c, c+2)$ .

Функция  $H(f(x), y)$  непрерывна на всей полуоси  $(-\infty, 0]$ . Стратегия (4) будет оптимальной, если  $H(f(x), y) = 0$  для  $y \in [-(c+2), -c]$  и  $H(f(x), y) \geq 0$  для  $y \in (-\infty, -(c+2)) \cup (-c, 0]$ .

Пусть  $y \in [-(c+2), -c]$ , тогда

$$H(f(x), y) = \frac{1}{3} \left[ \int_c^{c+2} (-(-y)^\alpha) f(x) dx + \int_c^{-y} x^\alpha f(x) dx + \right. \\ \left. + \int_{-y}^{c+2} (-(-y)^\alpha) f(x) dx + \int_c^{c+2} x^\alpha f(x) dx \right]. \quad (5)$$

Если теперь  $f(x)$  – оптимальная стратегия, то

$$0 = H(f(x), -c-0) = \frac{1}{3} \left[ -2c^\alpha + \int_c^{c+2} x^\alpha f(x) dx \right], \\ 0 = H(f(x), -(c+2)+0) = \frac{1}{3} \left[ -(c+2)^\alpha + 2 \int_c^{c+2} x^\alpha f(x) dx \right]. \quad (6)$$

Тогда  $(c+2)^\alpha = 4c^\alpha$  и  $c = \frac{2}{4^{\frac{1}{\alpha}} - 1}$ . По смыслу задачи необходимо  $0 < c \leq 2$ , откуда получаем  $0 < \alpha \leq 2$ . Отметим также, что

$$\int_c^{c+2} x^\alpha f(x) dx = 2c^\alpha = 2 \left( \frac{2}{4^{\frac{1}{\alpha}} - 1} \right)^\alpha. \quad (7)$$

Далее, для оптимальности стратегии  $f(x)$  необходимо  $H'(f(x), y) = H''(f(x), y) = 0$  в интервале  $(-(c+2), -c)$ . Имеем

$$H'(f(x), y) = \frac{1}{3} [\alpha(-y)^{\alpha-1} - 2(-y)^\alpha f(-y) +$$

$$\alpha(-y)^{\alpha-1} \int_{-y}^{c+2} f(x) dx \Big], \quad (8)$$

$$H''(f(x), y) = \frac{1}{3} \left[ -\alpha(\alpha-1)(-y)^{\alpha-2} + 3\alpha(-y)^{(\alpha-1)} f(-y) + \right. \\ \left. + 2(-y)^\alpha f'(-y) - \alpha(\alpha-1)(-y)^{\alpha-2} \int_{-y}^{c+2} f(x) dx \right]. \quad (9)$$

Если теперь  $H'(f(x), y) = H''(f(x), y) = 0$  в интервале  $(-(c+2), -c)$ , то из (8) и (9) получаем

$$(\alpha-1)(-y)^{-1} H'(f(x), y) + H''(f(x), y) = 0,$$

откуда

$$(\alpha+2)f(-y) - 2yf'(-y) = 0. \quad (10)$$

Положим в (10)  $y = -x$ , тогда  $x \in (c, c+2)$  и

$$2x\varphi'(x) + (\alpha+2)\varphi(x) = 0. \quad (11)$$

Решением последнего уравнения является функция

$$\varphi(x) = \beta x^{-\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)}. \quad (12)$$

Найдём константу  $\beta$ . Из (8) получаем

$$0 = H'(f(x), -c-0) = \frac{1}{3} \left[ 2\alpha c^{\alpha-1} - 2c^\alpha \frac{\beta}{c^{\frac{\alpha}{2}+1}} \right], \\ \beta = \alpha c^{\frac{\alpha}{2}},$$

и наконец  $\varphi(x) = \frac{\alpha c^{\frac{\alpha}{2}}}{x^{\frac{\alpha}{2}+1}}$ . Таким образом, стратегия  $f(x)$  имеет вид (3).

Проверим выполнение условий оптимальности.

Пусть  $y \in [-(c+2), -c]$ , тогда

$$H(f(x), y) = \frac{1}{3} \left[ -(-y)^\alpha + \int_c^{-y} \alpha c^{\frac{\alpha}{2}} x^{\frac{\alpha}{2}-1} dx - (-y)^\alpha \int_{-y}^{c+2} \alpha c^{\frac{\alpha}{2}} x^{-\frac{\alpha}{2}-1} dx + \right. \\ \left. + 2c^\alpha \right] = \frac{1}{3} \left[ -(-y)^\alpha + 2c^{\frac{\alpha}{2}} (-y)^{\frac{\alpha}{2}} - 2c^\alpha + (-y)^\alpha - 2c^{\frac{\alpha}{2}} (-y)^{\frac{\alpha}{2}} + 2c^\alpha \right] = 0. \quad (13)$$

Пусть  $y \in (-\infty, -(c+4)]$ , тогда

$$H(f(x), y) = \int_c^{c+2} x^\alpha f(x) dx = 2c^\alpha. \quad (14)$$

Пусть  $y \in [-(c+4), -(c+2)]$ , тогда  $-y \in [c+2, c+4]$ ,  $-2-y \in [c, c+2]$  и

$$H(f(x), y) = \frac{1}{3} \left[ \int_c^{-2-y} x^\alpha f(x) dx - (-y)^\alpha \int_{-2-y}^{c+2} f(x) dx + 2 \int_c^{c+2} x^\alpha f(x) dx \right] = \\ \frac{2}{3} \cdot c^{\frac{\alpha}{2}} \left[ (-2-y)^{\frac{\alpha}{2}} + c^{\frac{\alpha}{2}} + \frac{(-y)^\alpha}{(c+2)^{\frac{\alpha}{2}}} - \frac{(-y)^\alpha}{(-2-y)^{\frac{\alpha}{2}}} \right]. \quad (15)$$

Имеем

$$H(f(x), -(c+2)-0) = \frac{2c^{\frac{\alpha}{2}}}{3} \left[ c^{\frac{\alpha}{2}} + c^{\frac{\alpha}{2}} + (c+2)^\alpha - 2(c+2)^{\frac{\alpha}{2}} \right] = 0. \quad (16)$$

Далее, положим в (15)  $-2 - y = t$ ,  $t \in [c, c + 2]$  и рассмотрим функцию

$$\tilde{H}(t) = \frac{2}{3} \cdot c^{\frac{\alpha}{2}} \left[ t^{\frac{\alpha}{2}} + c^{\frac{\alpha}{2}} + \frac{(t+2)^\alpha}{(c+2)^{\frac{\alpha}{2}}} - \frac{(t+2)^\alpha}{t^{\frac{\alpha}{2}}} \right].$$

Функции  $g(t) = \frac{(t+2)^\alpha}{(c+2)^{\frac{\alpha}{2}}}$  и  $h(t) = t^{\frac{\alpha}{2}} - \frac{(t+2)^\alpha}{t^{\frac{\alpha}{2}}} = t^{\frac{\alpha}{2}} \left[ 1 - \left(1 + \frac{2}{t}\right)^\alpha \right]$  строго возрастают на отрезке  $[c, c + 2]$ . Окончательно заключаем, что функция  $H(f(x), y)$  как композиция строго убывающей и строго возрастающей функций строго убывает на отрезке  $[-(c+4), -(c+2)]$  от  $2c^\alpha$  до 0 и, таким образом, положительна в интервале  $(-(c+4), -(c+2))$ .

Пусть  $y \in [-c, 0]$ , тогда  $-y \in [0, c]$ ,  $2 - y \in [2, c + 2]$  и

$$\begin{aligned} H(f(x), y) &= \frac{1}{3} \left[ -2(-y)^\alpha + \int_c^{2-y} x^\alpha f(x) dx - \int_{2-y}^{c+2} (-y)^\alpha f(x) dx \right] = \\ &= \frac{1}{3} \left[ -(-y)^\alpha + 2c^{\frac{\alpha}{2}}(2-y)^{\frac{\alpha}{2}} - 2c^\alpha - 2c^{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{(-y)^\alpha}{(2-y)^{\frac{\alpha}{2}}} \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

Имеем

$$H(f(x), -c+0) = 0; \quad H(f(x), -0) = \frac{2}{3} c^{\frac{\alpha}{2}} (2^{\frac{\alpha}{2}} - c^{\frac{\alpha}{2}}) \geq 0. \quad (18)$$

Далее,

$$H'(f(x), y) = \frac{\alpha}{3} \left[ (-y)^{\alpha-1} + c^{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{-(2-y)^\alpha + 4(-y)^{\alpha-1} + (-y)^\alpha}{(2-y)^{\frac{\alpha}{2}+1}} \right]. \quad (19)$$

Пусть  $\alpha \in (0, 1]$ , тогда  $c \in (0, \frac{2}{3}] \subset (0, 1]$ . Имеем

$$\begin{aligned} -(2-y)^\alpha + 4(-y)^{\alpha-1} + (-y)^\alpha &= -(2-y)^\alpha + (-y)^{\alpha-1}(4-y) \geq \\ &\geq (4-y) - (2-y) = 2. \end{aligned}$$

Следовательно,  $H'(f(x), y) > 0$  в интервале  $(-c, 0)$  и, учитывая (18), заключаем, что  $H(f(x), y) > 0$  в этом интервале.

Пусть  $\alpha \in (1, 2]$ , тогда  $c \in (\frac{2}{3}, 2]$ . Имеем

$$\begin{aligned} H'(f(x), -c+0) &= \frac{\alpha}{6} \cdot \frac{c^{\alpha-1}(8-c)}{c+2} > 0, \\ H'(f(x), -0) &= -\frac{\alpha \cdot c^{\frac{\alpha}{2}}}{3 \cdot 2^{1-\frac{\alpha}{2}}} < 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Таким образом, в интервале  $(-c, 0)$  существует хотя бы одна точка  $y_0$ , в которой  $H'(f(x), y_0) = 0$ . Если точка  $y_0$  – единственная, то  $y_0$  – точка максимума функции  $H(f(x), y)$  и, учитывая (18), эта функция положительна в интервале  $(-c, 0)$ .

Положим в (19)  $-y = t$ ,  $t \in [0, c]$ ,  $y_0 = -t_0$ . Тогда

$$\tilde{H}'(t) = \frac{\alpha}{3} \left[ t^{\alpha-1} + c^{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{t^{\alpha-1}(t+4) - (t+2)^\alpha}{(t+2)^{\frac{\alpha}{2}+1}} \right].$$

Если теперь  $\tilde{H}'(t) = 0$ , то получим равенство

$$t^{\alpha-1}(t+2)^{\frac{\alpha}{2}+1} + c^{\frac{\alpha}{2}} \cdot t^\alpha \left( 1 - \left(1 + \frac{2}{t}\right)^\alpha \right) = -4c^{\frac{\alpha}{2}} t^{\alpha-1}. \quad (21)$$

В интервале  $(0, c)$  функция, стоящая в левой части равенства (21), строго возрастает, а функция, стоящая в правой части – строго убывает. Следовательно, точка  $t_0$ , для которой  $\tilde{H}'(t_0) = 0$ , – единственная. Это завершает доказательство теоремы.

В частности, при  $\alpha = 1$  получаем

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq x < \frac{2}{3}, \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^3}}, & \text{если } \frac{2}{3} < x < \frac{8}{3}, \\ 0, & \text{если } \frac{8}{3} < x < \infty, \end{cases} \quad (22)$$

– результат, известный из [2]. График, соответствующий функции  $H(f(x), y)$ , имеет вид, представленный на рис. 1.

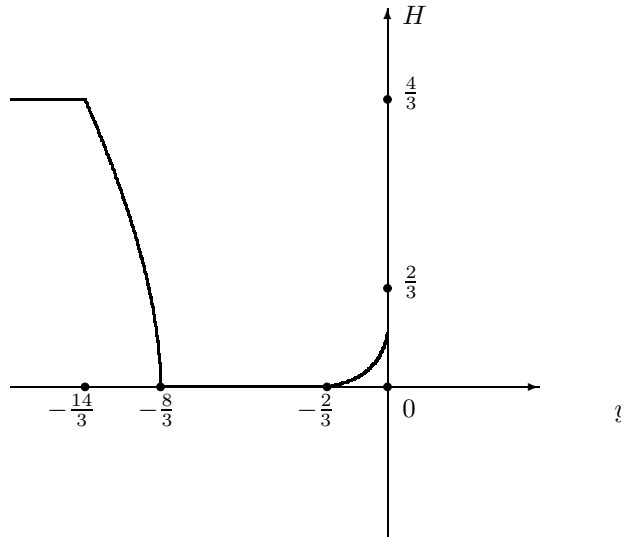


Рис. 1.

При  $\alpha = 2$  получаем

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 < x < 2, \\ \frac{4}{x^2}, & \text{если } 2 < x < 4, \\ 0, & \text{если } 4 < x < \infty. \end{cases} \quad (23)$$

График, соответствующий функции  $H(f(x), y)$ , имеет вид, представленный на рис. 2.

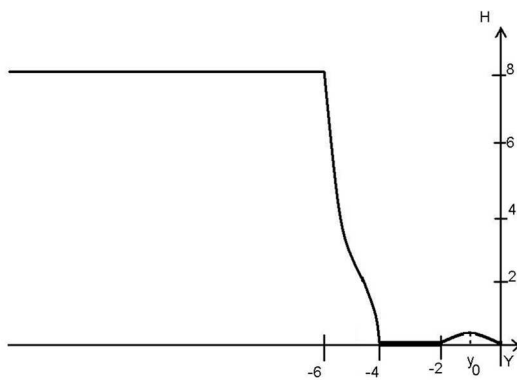


Рис. 2.

**Список литературы**

1. Мазалов В. В., Токарева Ю. С. Теоретико-игровые модели проведения конкурсов // Математическая теория игр и её приложения. 2010. Вып. 2. № 2. С. 66–78.

2. Менчер А. Э. Дискретная арбитражная процедура с неравномерным распределением вероятностей // Математическая теория игр и её приложения. 2009. Вып. 4. Т. 1. С. 78–91.
3. Farber H. An analysis of final-offer arbitration // Journal of Conflict Resolution, 1980. Vol. 35. P. 683–705.
4. Mazalov V. V., Mentcher A. E., Tokareva J. S. On a discrete arbitration procedure // Sci. Math. Japonical, 2006. Vol. 63. № 3. P. 325–330.
5. Mazalov V. V., Mentcher A. E., Tokareva J. S. On a discrete arbitration procedure in three points // Game Theory and Applications. 2005. Vol. 11. P. 87–91.

**Статья поступила в редакцию 01.03.2012 г.**



УДК 621.315.592  
ББК В379.2

**Сергей Александрович Немов,**  
доктор физико-математических наук, профессор,  
Санкт-Петербургский государственный политехнический университет  
(Санкт-Петербург, Россия), e-mail: nemov\_s@mail.ru  
**Людмила Евгеньевна Шелимова,**  
доктор химических наук,  
Институт металлургии и материаловедения им. А. А. Байкова РАН  
(Москва, Россия), e-mail: shelimova@lesr.imet.ac.ru  
**Николай Михайлович Благих,**  
аспирант,  
Санкт-Петербургский государственный политехнический университет  
(Санкт-Петербург, Россия), e-mail: nblagih@front.ru

### Оценка параметров зонного спектра и механизмов рассеяния $PbSb_2Te_4 : Cu$

На монокристаллах  $PbSb_2Te_4$ , легированных медью, исследованы кинетические коэффициенты Холла, электропроводности и термоЭДС и их анизотропия в диапазоне температур от 77 до 450 К. Анализ температурных зависимостей кинетических коэффициентов показал необходимость учёта сложного строения валентной зоны. Обнаружена сильная анизотропия термоЭДС, свидетельствующая о смешанном механизме рассеяния дырок. Сделаны оценки параметров рассеяния  $r_{ii}^{эфф}$ , массы плотности состояний дырок  $m_d$ , химического потенциала  $\mu_0$  и энергетического зазора  $\Delta E_v$  между подзонами валентной зоны.

*Ключевые слова:* электропроводность, эффекты Холла и термоЭДС, анизотропия, валентная зона, механизмы рассеяния, дырки, масса плотности состояний, химический потенциал, энергетический зазор.

**Sergei Aleksandrovich Nemov**  
Doctor of Physics and Mathematics,  
Professor, St. Petersburg State Polytechnical University  
(St. Petersburg, Russia), e-mail: nemov\_s@mail.ru  
**Lyudmila Evgenyevna Shelimova**  
Doctor of Chemistry,  
A. A. Baykov Institute of Metallurgy and Materials Science, Russian Academy of Sciences  
(Moscow, Russia), e-mail: shelimova@lesr.imet.ac.ru  
**Nikolai Mikhailovich Blagikh**  
Graduate Student,  
St. Petersburg State Polytechnical University  
(St. Petersburg, Russia), e-mail: nblagih@front.ru

### Estimating the Parameters of the Band Spectrum and Scattering Mechanisms in $PbSb_2Te_4 : Cu$

On the basis of monocrystals doped with copper  $PbSb_2Te_4$ , the paper investigates the Hall kinetic coefficients, conductivity and thermopower and their anisotropy in the temperature range from 77 to 450 K. The analysis of the temperature dependence of the kinetic coefficients shows the necessity of taking into account the complex structure of the valence band. It reveals a strong anisotropy of the thermoelectric power, indicating a mixed scattering mechanism of holes. The study presents estimations of the scattering parameters  $r_{ii}^{eff}$ , the mass density of states  $m_d^*$ , the chemical potential  $\mu_0$  and the energy gap  $\Delta E_0$  between the subbands of the valence band.

*Keywords:* electrical conductivity effect, Hall effects and thermoelectric power, anisotropy, valence band, scattering mechanisms, holes, mass density of states, chemical potential, energy gap.

Ввиду отсутствия прогресса в улучшении термоэлектрических параметров материалов, используемых в настоящее время для термоэлектрических преобразователей энергии, важное значение имеет исследование новых материалов. В этом отношении вызывают повышенный интерес начатые исследования по синтезу и изучению электрофизических свойств тетрадемитоподобных соединений, представляющих собой синтез ромбоэдрических материалов на основе  $A_2^V B_3^{VI}$  и кубических кристаллов  $A^{IV} B^{VI}$  со структурой NaCl [1, с. 5–17; 2, с. 165–171].

К числу подобных соединений относится  $PbSb_2Te_4$ . Кристаллы  $PbSb_2Te_4$  растут со значительным отклонением от стехиометрического состава, образцы имеют дырочную проводимость с высокой концентрацией носителей тока  $p \approx 3 \cdot 10^{20} \text{ см}^{-3}$  [3, с. 8–10]. Легирование  $PbSb_2Te_4$  медью приводит к снижению концентрации дырок [4, с. 1158–1162]. Отметим, что зонная структура соединения  $PbSb_2Te_4$  практически не изучена. Ранее экспериментальные данные по явлениям переноса обсуждались в рамках однозонной модели [3, с. 8–10], однако, характерная для кристаллов  $PbSb_2Te_4$  сильная зависимость от температуры коэффициента Холла не находит объяснения в однозонной модели.

В настоящей работе анализируются данные по термоЭДС совместно с данными по электропроводности и эффекту Холла серии кристаллов  $PbSb_2Te_4$  с примесью Cu. Основные экспериментальные данные приведены в таблице и на рис. 1.

Таблица

Физические параметры исследованных кристаллов  $PbSb_2Te_4$

№ п/п	Соединение	$\sigma_{11}(77K)$ , (Ом · см)	$\sigma_{33}(77K)$ , (Ом · см) <sup>-1</sup>	$p_{77} \cdot 10^{-20}$ , см <sup>-3</sup>	$R_{123}/R_{321}$ (300K)	$\frac{R_{123}(300K)}{R_{123}(77K)}$	$\frac{\alpha_{11}(300K)}{\alpha_{11}(77K)}$
1	$PbSb_2Te_4$	5380	395	3,2	2	1,6	3,5
2	$PbSb_2Te_4 : Cu$ ( $NCu = 3 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$ )	600	-	1,8	-	1,7	2,6
3	$PbSb_2Te_4 : Cu$	2900	450	1,7	1,4	1,8	2,5

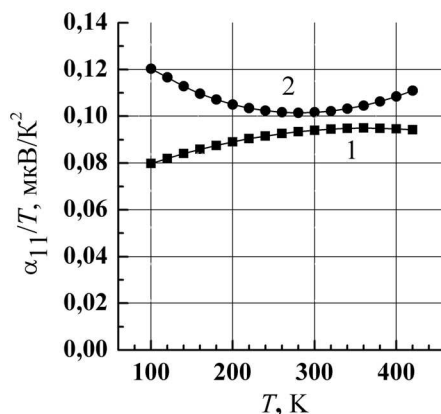


Рис. 1. Температурные зависимости компонент тензора термоЭДС ( $\alpha_{ii} \cdot e/k_0$ ) в относительных единицах в  $PbSb_2Te_4 : Cu$ .

1 – в плоскости скола кристалла  $\alpha_{11}$ , 2 – в направлении тригональной оси  $\alpha_{33}$

Из графика температурной зависимости тензора термоЭДС (рис.1), видна сильная анизотропия коэффициента термоЭДС, величина которой при комнатной температуре  $\Delta\alpha \cdot e/k_0 = (\alpha_{33} - \alpha_{11}) \cdot e/k_0 = 0,7$ . Обнаруженная анизотропия коэффициента термоЭДС свидетельствует о смешанном механизме рассеяния дырок.

Экспериментальные данные по температурным зависимостям эффектов Холла, электропроводности и термоЭДС для других исследованных кристаллов  $PbSb_2Te_4$  не приводим, поскольку они совпадают с опубликованными в [3, с. 8–10; 5, с. 1166–1168].

Температурные зависимости кинетических коэффициентов в  $PbSb_2Te_4$ , за исключением коэффициента Холла, имеют вид, характерный для однозонной модели зонного спектра. Обсуждение экспериментальных результатов начнем в рамках однозонной модели.

Как видно из таблицы, исследованные кристаллы  $PbSb_2Te_4$  имеют дырочный тип проводимости с высокой концентрацией дырок  $p \approx (1,8 - 3,2) \cdot 10^{20} \text{см}^{-3}$ , определённой из большей компоненты тензора Холла  $R_{123}$  при температуре 77 К. Столь высокие концентрации носителей тока позволяют использовать для расчётов формулы для кинетических коэффициентов, вычисленные в приближении Зоммерфельда, справедливые для вырожденной статистики.

Компоненты тензора коэффициента электропроводности в плоскости скола ( $\sigma_{11}$ ) и в направлении тригональной оси ( $\sigma_{33}$ ) уменьшаются с ростом температуры ( $\sigma \sim T^{-n}$ ) и имеют «металлический» вид, характерный для сильно легированных полупроводников. Оценки параметра  $n$  из температурных зависимостей электропроводности для кристалла № 3 ( $PbSb_2Te_4 : Cu$ ) дали следующие значения: в плоскости скола  $n = 1.1$  для  $\sigma_{11}$  и в направлении тригональной оси ( $c_3$ )  $n = 0.4$  для  $\sigma_{33}$ , соответственно. Полученные значения параметра  $n$  в температурной зависимости электропроводности свидетельствуют в пользу смешанного механизма рассеяния носителей тока. В плоскости скола значение  $n$  близко к единице, что характерно для фононного механизма рассеяния. С учётом отрицательного знака коэффициента Нернста-Эттинггаузена в плоскости скола  $Q_{123}$  [1, с. 7–10] получаем, что доминирует акустический механизм рассеяния дырок. В направлении тригональной оси, как следует из температурной зависимости  $\sigma_{33}$ , наряду с акустическим механизмом рассеяния необходимо учитывать рассеяние дырок на примесных атомах и собственных точечных дефектах.

Рассмотрим более подробно экспериментальные данные по эффектам Холла и Зеебека.

Из данных, приведённых в таблице, видно, что с ростом концентрации дырок уменьшается относительное изменение коэффициента Холла с температурой, в то время как термоЭДС растёт сильнее. Отмеченная особенность экспериментальных данных находит естественное объяснение в двузонной модели зонного спектра, предполагающей наличие дополнительного экстремума с большой эффективной массой в спектре валентной зоны.

Отметим, что коэффициент термоЭДС для вырожденной статистики электронного газа описывается выражением:

$$\alpha_{ii} = \frac{\kappa_0}{e} \cdot \frac{\pi^2}{3} \cdot \frac{\kappa_0 T}{\mu} \cdot \left( r_{ii}^{\text{эфф.}} + \frac{3}{2} \right), \quad (1)$$

где  $\kappa_0$  – постоянная Больцмана,  $e$  – величина заряда электрона,  $\mu$  – химический потенциал;  $r_{ii}^{\text{эфф.}}$  – эффективный параметр рассеяния  $r_{ii}^{\text{эфф.}} = \partial \ln \tau / \partial \ln \epsilon |_{\mu}$ ,  $\tau_{ii}$  – время релаксации,  $\epsilon$  – энергия носителей тока.

В случае участия в явлениях переноса двух сортов дырок, должны наблюдаться отклонения от температурных зависимостей, характерных для однозонной модели. Анализ формулы (1) показывает, что отношение термоЭДС к температуре ( $\alpha_{ii}/T$ ) должно не зависеть от температуры при неизменном механизме рассеяния и пренебрежении температурной зависимостью химического потенциала, т. е. зависимость  $\alpha_{ii}/T$  от  $T$  должна быть близка к константе. На рис.2 представлены экспериментальные зависимости термоЭДС, в указанных выше координатах, для компоненты термоЭДС в плоскости скола. Из рис. 2 видно, что отношение ( $\alpha_{ii}/T$ ) не является постоянным для исследованных монокристаллов в диапазоне температур 100–400 К. Вместе с тем, отметим, что изменения невелики и составляют не более 10–20 %.

Учтём температурные зависимости множителей, входящих в формулу (1). Температурная зависимость химического потенциала описывается выражением:

$$\mu(T) = \mu_0 \left[ 1 - \frac{\pi^2}{12} \left( \frac{k_0 T}{\mu_0} \right)^2 \right], \quad (2)$$

где  $\mu_0$  – химический потенциал при 0 К.

Кроме того, поскольку в исследованных кристаллах наблюдается смешанный механизм рассеяния, эффективный параметр рассеяния  $r_{ii}^{\text{эфф.}}$  также может изменяться с температурой. Максимальное различие в величинах параметра рассеяния при изменении температуры может наблюдаться при переходе от рассеяния на ионах примеси ( $r_{\text{эфф.}} = 3/2$ ) при низких температурах к акустическому механизму рассеяния ( $r_{\text{эфф.}} = -1/2$ ) при комнатной и более высоких температурах. Чтобы минимизировать влияние этого фактора для анализа выбрана компонента термоЭДС в плоскости скола  $\alpha_{11}$ , поскольку эта компонента термоЭДС определяется доминирующим акустическим механизмом рассеяния во всём исследованном диапазоне температур. Тем не менее, за счёт этого

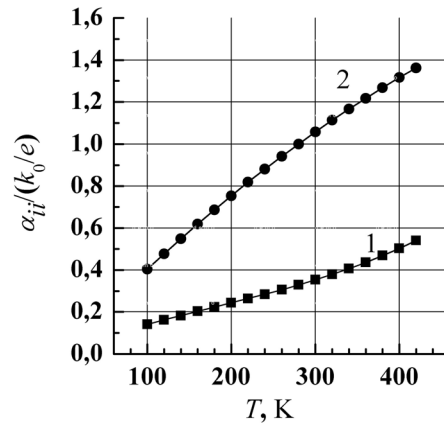


Рис. 2. Температурные зависимости отношения термоЭДС в плоскости скола к температуре  $\alpha_{11}/T$ .  
1 –  $PbSb_2Te_4$ , 2 –  $PbSb_2Te_4 : Cu$

множителя может наблюдаться незначительное уменьшение термоЭДС. Таким образом, температурная зависимость термоЭДС в однозонной модели описывается выражением:

$$\frac{\alpha_{11}}{T} = \frac{k_0}{e} \frac{\pi^2}{3} \frac{k_0}{\mu_0} \left[ r_{11}^{эфф.}(T) + \frac{3}{2} \right] \cdot \left[ 1 + \frac{\pi^2}{12} \left( \frac{k_0 T}{\mu_0} \right)^2 \right]. \quad (3)$$

Подобный характер температурной зависимости отношения термоЭДС к температуре наблюдается в образце с минимальной концентрацией дырок (см. рис.2). Таким образом, при анализе экспериментальных данных кристалла №3 можно пользоваться однозонной моделью зонной структуры. В соответствии с экспериментальными данными для оценок положим, что параметр рассеяния в плоскости скола равен  $-1/2$ . Из формулы (1), подставив экспериментальные значения термоЭДС в плоскости скола  $\alpha_{11}$ ), определим величину приведённого химического потенциала  $\mu^*$ . Найденная таким образом величина  $\mu^* = \mu/(k_0 T) \approx 23$  при 100К и  $\mu \approx 0,2$  эВ для кристалла № 3.

Найденный приведённый химический потенциал и соответствующую компоненту термоЭДС  $\alpha_{33}$  подставляем в формулу (3) и определяем величину параметра рассеяния в направлении тригональной оси 3. Полученная величина параметра рассеяния в направлении тригональной оси оказалась равной  $r_{33}^{эфф.} \approx 1.4$ , что свидетельствует о смешанном механизме рассеяния. Однако, близость  $r_{33}^{эфф.}$  к 1.5 подтверждает сделанное ранее предположение о доминирующем рассеянии дырок на кулоновском потенциале примесных атомов и собственных дефектов.

В условии сильного вырождения формула для концентрации дырок имеет вид:

$$p = \frac{8\pi}{3h^3} (2m_d)^{3/2} \mu_0^{3/2}, \quad (4)$$

где  $h$  – постоянная Планка,  $m_d$  – эффективная масса плотности состояний.

Из формулы (4) для концентрации дырок  $p$  при известном  $\mu_0$  находим величину эффективной массы плотности состояний  $m_d \approx 0,6m_0$  ( $m_0$  – масса свободного электрона).

В заключение отметим, что сильный рост коэффициента Холла с температурой наблюдается и в образце с минимальной концентрацией дырок (№ 3), можно предположить, что дополнительный экстремум валентной зоны находится в непосредственной близости к уровню химического потенциала, т. е. для оценки энергетического зазора  $\Delta E_v$  можно принять:

$$\Delta E_v = \mu_0 + k_0 T. \quad (5)$$

При температуре 100 К,  $\Delta E_v \approx 0.22$  эВ.

#### Выводы.

Легирование медью  $PbSb_2Te_4$  позволило смещать уровень химического потенциала, благодаря этому удалось проанализировать температурную зависимость кинетических коэффициентов и их анизотропию, а также сделать оценки параметров рассеяния и энергетического спектра дырок.

Оказалось, что в плоскости скола доминирует рассеяние на акустических фонах, а в направлении тригональной оси – рассеяние на кулоновском потенциале примесей и дефектов.

Зонная структура  $PbSb_2Te_4$  имеет сложное строение, эффективная масса плотности состояний дырок  $m_d \approx 0.6 m_0$ , энергетический зазор между подзонами  $\Delta E_v \approx 0.22$  эВ.

#### Список литературы

1. Благих Н. М., Немов С. А., Шелимова Л. Е. Анизотропия поперечного эффекта Нернста-Эттингсгаузена в монокристалле  $PbSb_2Te_4$ , легированном медью // Научно-технические ведомости СПбГПУ. 2011. № 3 (129). С. 7–10.
2. Житинская М. К., Немов С. А., Шелимова Л. Е. [и др.] Анизотропия термоЭДС слоистого соединения  $PbSb_2Te_4$  // Физика твердого тела. 2008. Т. 50. Вып. 1. С. 8–10.
3. Житинская М. К., Немов С. А., Свечникова Т. Е. Влияние легирования медью на кинетические явления в кристаллах  $Bi_2Te_{2.85}Se_{0.15}$  // Физика и техника полупроводников. 2007. Т. 41. Вып. 10. С. 1158–1162.
4. Немов С. А., Житинская М. К., Шелимова Л. Е. [и др.]. Об анизотропии рассеяния дырок в слоистом соединении  $PbSb_2Te_4$  по данным коэффициента Нернста-Эттингсгаузена // Физика твёрдого тела. 2008. Т. 50. Вып. 7. С. 1166–1168.
5. Шелимова Л.Е., Свечникова Т. Е., Константинов П.П. [и др.]. Анизотропия термоэлектрических свойств слоистых соединений  $PbSb_2Te_4$  и  $PbBi_4Te_7$  // Неорганические материалы. 2007. Т. 43. № 2. С. 165–171.
6. Шелимова Л. Е., Карпинский О. Г., Константинов П. П. [и др.]. Слоистые халькогениды в квазибинарных системах AIVBVI - AV2BVI3 (AIV - Ge, Sn, Pb; BVI - Te, Se; AV - Bi, Sb) – перспективные термоэлектрические материалы для термогенераторов // Перспективные материалы. 2006. № 3. С. 5–17.

Статья поступила в редакцию 18.01.2012 г.

ББК В 11  
УДК 519.833.2

*Татьяна Эдуардовна Носальская,*  
аспирант,  
Забайкальский институт железнодорожного транспорта  
(Чита, Россия), e-mail: tenosalskaya@gmail.com

### Правило большинства в задаче наилучшего выбора для трёх лиц<sup>1</sup>

В статье рассмотрена последовательная игра, связанная с задачей наилучшего выбора. Трое игроков ведут переговоры, состоящие из  $K$  этапов. На некотором шаге каждый из них получает предложение, которое он должен принять или отвергнуть. После того, как игроки приняли решение, вступает в силу правило большинства: если, по крайней мере, двое из них приняли предложение, то осуществляется соответствующее решение, иначе – происходит дисконтирование, и переговоры переходят на следующий шаг. Процесс продолжается до тех пор, пока игроки не придут к согласию, либо пока переговоры не достигнут последнего этапа. Для описанной игры найдено равновесие в классе пороговых стратегий.

*Ключевые слова:* задача наилучшего выбора, последовательные переговоры, правило большинства, дисконтирование, соглашение.

*Tatiana Eduardovna Nosalskaya,*  
graduate student  
Zabaikalsky Institute of Railway Transport  
(Chita, Russia), e-mail: tenosalskaya@gmail.com

### Majority Rule in the Problem of the Best Choice for Three Persons

The article discusses the sequential game related to the best-choice problem. Three players participate in the negotiations, which consist of  $K$  stages. At some step each of them receives an offer that he should accept or reject. After the players have made a decision, the majority rule comes into force: if at least two of them have accepted the offer, the corresponding solution is carried out, otherwise there is discounting and the negotiations move to the next step. The process continues until the players reach an agreement, or until the negotiations reach the final stage. The equilibrium in the class of threshold strategies is found for the described game.

*Keywords:* best-choice problem, sequential negotiations, majority rule, discounting, agreement.

Представленная работа продолжает серию известных моделей переговоров, таких как переговоры работника и работодателя [6], [7], игра обмена [2], многоэтапный покер [10], [11], раздел пирога и другие. Большинство исследований [4], [5] анализируют модель, где игроки представляют свои предложения, а третий независимый участник – арбитражный комитет – выбирает одно из них. Сакагучи [11] рассматривает модель переговоров работника и работодателя с арбитражным комитетом, состоящим из двух арбитров, и каждый арбитр предлагает размер заработной платы в каждый период переговоров. В работах [12], [13], [14], [5], [9] эта модель арбитража была расширена для двустороннего случая, где арбитр представляет некоторые предложения для игроков и, если их решения отличаются, приоритет решения определяется лотереей. Статья [8] описывает арбитражную задачу для трёх игроков и её обобщение для  $n$  игроков, где приоритет решения определяется голосованием. Дальнейшее развитие эта модель получает в работе [11, с. 42–45] на примере раздела пирога между тремя лицами по правилу большинства, основываясь на совместном распределении Дирихле вида  $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ . Здесь мы исследуем подобную схему с параметрами  $k_2 = k_3 = 2$ .

<sup>1</sup>Работа выполнена в рамках гранта РФФИ №12-01-90702-моб\_ст и государственного задания вузу Минобрнауки РФ, №8.3641.2011.

Пусть для переговоров отведено  $K$  шагов, а до конца осталось  $k$ . На этом этапе игроки получают предложения  $x^k, y^k, z^k$ . Предположим, что на каждом шаге это случайные величины, распределённые по закону Дирихле, т.е. совместная плотность имеет вид

$$f(x, y, z) = \frac{\Gamma(k_1 + k_2 + k_3)}{\Gamma(k_1) \cdot \Gamma(k_2) \cdot \Gamma(k_3)} \cdot x^{k_1-1} y^{k_2-1} z^{k_3-1},$$

причём  $x + y + z = 1$ .

Затем каждый из них решает, принять или отклонить предложение в ожидании более удачного предложения в будущем. После чего, согласно правилу большинства, если хотя бы двое из них приняли положительное решение, осуществляется делёж пирога  $(x, y, z)$ , в противном случае переговоры переходят на следующий этап  $k - 1$ . При этом происходит дисконтирование, и пирог становится уже размера  $\delta \leq 1$ . Процесс продолжается до тех пор, пока игроки не придут к согласию, либо пока не наступит этап  $k = 0$ , на котором все игроки получают куски малого размера  $b \ll \frac{1}{3}$ .

Обозначим  $H_k$  значение игры на этапе  $k$ . Предположим, что каждый игрок информируется только о значении его предложения. Пусть  $x, y, z$  – предложения игрокам I, II, III, соответственно. Поскольку  $x + y + z = 1$ , можно ограничить рассмотрение переменными  $x$  и  $y$ .

Исследуем симметричный случай с распределением Дирихле для параметров  $k_1 = k_2 = k_3 = 2$ . Тогда функция совместной плотности распределения имеет вид

$$f(x, y) = \frac{\Gamma(6)}{\Gamma(2) \cdot \Gamma(2) \cdot \Gamma(2)} \cdot xy(1 - x - y) = 120xy(1 - x - y),$$

где  $x, y > 0, x + y = 1$ .

Заметим, что

$$120 \int_0^1 x dx \int_0^{1-x} y(1 - x - y) dy = 1.$$

Пусть  $\mu_1(x), \mu_2(y), \mu_3(z)$  – вероятность того, что игрок I, II или III примет текущее предложение  $x, y$  или  $z$ , соответственно. Обозначим  $\bar{\mu}_i(x) = 1 - \mu_i(x), i = 1, 2, 3$ .

**Теорема.** *Оптимальные стратегии игроков на  $k$ -м шаге имеют вид*

$$\mu_i(x) = I_{\{x \geq \delta H_{k-1}\}}, \quad i = 1, 2, 3,$$

где  $I_A$  – индикатор  $A$ .

Значение игры удовлетворяет рекуррентным соотношениям

$$H_k = \frac{1}{3} - 10\delta^4 H_{k-1}^4 (1 - 3\delta H_{k-1})(3 - 4\delta H_{k-1}), \quad H_0 = b.$$

*Доказательство.* Уравнение оптимальности для выигрыша на  $k$ -м шаге имеет вид

$$\begin{aligned} H_k = 120 \int_0^1 x dx \int_0^{1-x} y(1 - x - y) dy \{ & \mu_1 \mu_2 \mu_3 x + \bar{\mu}_1 \mu_2 \mu_3 x + \\ & + \mu_1 \bar{\mu}_2 \mu_3 x + \mu_1 \mu_2 \bar{\mu}_3 x + \bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2 \bar{\mu}_3 \delta H_{k-1} + \mu_1 \bar{\mu}_2 \bar{\mu}_3 \delta H_{k-1} + \\ & + \bar{\mu}_1 \mu_2 \bar{\mu}_3 \delta H_{k-1} + \bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2 \mu_3 \delta H_{k-1} \}, \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (1)$$

причём  $H_0 = b, \quad \mu_1 = \mu_1(x), \quad \mu_2 = \mu_2(y), \quad \mu_3 = \mu_3(1 - x - y)$ .

Преобразуя выражение (1), получаем

$$\begin{aligned} H_k = 120 \int_0^1 x \cdot \mu_1(x) dx \int_0^{1-x} \{ & (x - \delta H_{k-1})(\mu_2 + \mu_3 - 2\mu_2 \mu_3) \} y(1 - x - y) dy + \\ & + 120 \int_0^1 x dx \int_0^{1-x} \{ (x - \delta H_{k-1}) \mu_2 \mu_3 + \delta H_{k-1} \} y(1 - x - y) dy. \end{aligned} \quad (2)$$

Для максимизации своего выигрыша игрок I может влиять только на значение первого интеграла в формуле (2). Введём обозначение

$$G_k(x) = x \int_0^{1-x} \{(x - \delta H_{k-1}) (\mu_2 + \mu_3 - 2\mu_2\mu_3)\} y(1-x-y) dy.$$

Оптимальная стратегия игрока I имеет вид

$$\mu_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } G_k(x) \geq 0 \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Из симметрии задачи следует, что оптимальное поведение игроков II и III должно быть одинаковым, т.е.  $\mu_2(y) = \mu_3(1-x-y)$ .

Выражение  $G_k(x)$  будет положительно, если

$$\begin{aligned} x(x - \delta H_{k-1}) \int_0^{1-x} (\mu_2 + \mu_3 - 2\mu_2\mu_3) y(1-x-y) dy &\geq 0; \\ \frac{1}{6} x(x - \delta H_{k-1}) \cdot (1-x)^3 &\geq 0; \\ x - \delta H_{k-1} &\geq 0. \end{aligned}$$

Таким образом, при  $x \geq \delta H_{k-1}$  получаем  $G_k(x) \geq 0$ , в противном случае  $G_k(x) < 0$ . Зафиксируем такое  $a$ , что  $G_k(a) = 0$ .

Находим равновесие рассматриваемой игры в классе пороговых стратегий. Пусть  $\mu_2 = I_{\{y \geq a\}}$ ,  $\mu_3 = I_{\{z \geq a\}}$ . Рассмотрим три случая:

1) При  $0 \leq x \leq 1 - 2a$  получаем

$$\begin{aligned} &\int_0^{1-x} (\mu_2 + \mu_3 - 2\mu_2\mu_3) y(1-x-y) dy = \\ &= \int_0^a y(1-x-y) dy + \int_{1-x-a}^{1-x} y(1-x-y) dy = \frac{1}{3} a^2 (3 - 3x - 2a). \end{aligned}$$

2) При  $1 - 2a < x \leq 1 - a$  значение указанного интеграла будет описываться формулой

$$\begin{aligned} &\int_0^{1-x-a} y(1-x-y) dy + \int_a^{1-x} y(1-x-y) dy = \\ &= \frac{1}{3} (1-x+2a)(1-x-a)^2. \end{aligned}$$

3) При  $1 - a < x \leq 1$  рассматриваемый интеграл равен нулю.

Найдём соответствующее выражение для второго интеграла формулы (2)

$$\begin{aligned} &\int_0^{1-x} \mu_2\mu_3 \cdot y(1-x-y) dy = \int_a^{1-a-x} y(1-x-y) dy = \\ &= \frac{1}{6} (1-x-2a)(1+2a-2a^2-2x-2ax+x^2). \end{aligned}$$

С учётом полученных выражений, можно записать

$$G_k(x) = x(x - \delta H_{k-1}) \left( \frac{1}{3} a^2 (3 - 3x - 2a) \cdot I\{x \leq 1 - 2a\} + \right.$$



$$+\frac{1}{3}(1-x+2a)(1-x-a)^2 \cdot I\{1-2a < x \leq 1-a\} + \\ +0 \cdot I\{1-a < x \leq 1\} \Big).$$

Т.к.  $G_k(a) = 0$ , то  $a = \delta H_{k-1}$ . Тогда

$$G_k(x) = x(x - \delta H_{k-1}) \left( \frac{1}{3} \delta^2 H_{k-1}^2 (3 - 3x - 2\delta H_{k-1}) \cdot I\{x \leq 1 - 2\delta H_{k-1}\} + \right. \\ \left. + \frac{1}{3} (1 - x + 2\delta H_{k-1})(1 - x - \delta H_{k-1})^2 \cdot I\{1 - \delta H_{k-1} < x \leq 1 - \delta H_{k-1}\} + \right. \\ \left. + 0 \cdot I\{1 - \delta H_{k-1} < x \leq 1\} \right).$$

Таким образом, если игроки II и III используют пороговые стратегии  $\mu_2 = I_{\{y \geq \delta H_{k-1}\}}$ ,  $\mu_3 = I_{\{z \geq \delta H_{k-1}\}}$ , то наилучший ответ игрока I также должен быть  $\mu_1 = I_{\{x \geq \delta H_{k-1}\}}$ .

$$H_k = 120 \int_0^1 \mu_1(x) \cdot G_k(x) dx + \\ + 120 \int_0^1 x dx \int_0^{1-x} \{(x - \delta H_{k-1}) \mu_2 \mu_3 + \delta H_{k-1}\} y(1-x-y) dy = \\ = 40 \delta^2 H_{k-1}^2 \int_{\delta H_{k-1}}^{1-2\delta H_{k-1}} x(x - \delta H_{k-1})(3 - 3x - 2\delta H_{k-1}) dx + \\ + 40 \int_{1-2H_{k-1}}^{1-H_{k-1}} x(x - \delta H_{k-1})(1 - x + 2\delta H_{k-1})(1 - x - \delta H_{k-1})^2 dx + \\ + 20 \int_0^{1-2H_{k-1}} x(x - \delta H_{k-1})(1 - x - 2\delta H_{k-1}) \cdot \\ \cdot (1 + 2\delta H_{k-1} - 2\delta^2 H_{k-1}^2 - 2x - 2\delta H_{k-1}x + x^2) dx + \delta H_{k-1}.$$

Получаем рекуррентную формулу

$$H_k = \delta H_{k-1} + \frac{1}{3} (1 - 3\delta H_{k-1}) (1 - 90\delta^4 H_{k-1}^4 + 120\delta^5 H_{k-1}^5).$$

**Следствие.** Если  $\delta = 1$ , то  $\lim_{k \rightarrow \infty} H_k = \frac{1}{3}$ .

Иными словами, при отсутствии дисконтирования и бесконечном горизонте переговоров арбитр может на некотором этапе предложить игрокам делёж единичного пирога поровну.

### Список литературы

1. Мазалов В. В., Менчер А. Э., Токарева Ю. С. Переговоры. Математическая теория. СПб: Лань, 2012. 304 с.
2. Brams J. S., Kilgour D. M., Davis M. D. Unravelling in games of sharing and exchange // Frontiers in Game Theory, MIT Press, Cambridge, 1993. P. 194–212.
3. Chatterjee K. Models with complete and incomplete information // IEEE Trans, SMC-11, 1981. P. 101–109.
4. Crawford V. P. On Compulsory arbitration schemes // Journal of Political Economy 11, 1973. P. 131–159.

5. Garnaev A. Y. Value of information in optimal stopping games // *Game Theory and Applications* 5, 2000. P. 55–64.
6. Gibbons R. *A Primer in Game Theory*. Prentice Hall, 1992. 278 p.
7. Leitman G. Collective bargaining a differential game // *Journal of Optimization Theory and Applications* 11, 1973. P. 405–412.
8. Mazalov V. V., Banin M.V. N-person best-choice game with voting // *Game Theory and Applications* 9, 2003. P. 45–53.
9. Mazalov V. V., Sakaguchi M., Zabelin A.A. Multistage arbitration game with random offers // *Game Theory and Applications* 8, 2002. P. 95–106.
10. Sakaguchi M. A simplified two-person multistage poker with optional stopping // *Mathematica Japonica* 28, 1983. P. 287–303.
11. Sakaguchi M. A time-sequential game related to an arbitration procedure // *Mathematica Japonica* 29, 1984. P. 491–502.
12. Sakaguchi M. Optimal stopping games for bivariate uniform distribution // *Mathematica Japonica* 41, 1995. P. 677–687.
13. Sakaguchi M. Optimal stopping games where players have weighted privilege // *Game Theory and Applications* 6, 2000. P. 116–131.
14. Sakaguchi M. Best-choice game where arbitration comes in // *Game Theory and Applications* 9, 2003. P. 141–149.

Статья поступила в редакцию 25.02.2012 г.

УДК 517.956  
ББК В143

*Наталья Валерьевна Нутчина-Пестрякова,*  
соискатель,  
Южно-Якутский институт железнодорожного транспорта  
(Нерюнгри, Россия), e-mail: pestryakovi@mail.ru

### О решении краевых задач в кусочно-однородных областях с двухслойными плёночными включениями<sup>1</sup>

Решены различные типы краевых задач для уравнения Лапласа в кусочно-однородных цилиндрах с двухслойной плёнкой, а также задачи с пересекающимися двухслойными плёнками на плоскости. Используя метод свертывания разложений Фурье, решения задач выражены через решение классических задач в однородных цилиндрах или через заданные гармонические функции на плоскости.

*Ключевые слова:* краевые задачи, метод свертывания разложений Фурье, двухслойные плёночные включения.

*Natalia Valerievna Nutchina-Pestryakova,*  
Graduate Student,  
South Yakutiya Institute of Railway Transport  
(Neryungri, Russia), e-mail: pestryakovi@mail.ru

### Solving Boundary Value Problems in Piecewise Homogeneous Regions with Double-layer Film Inclusions

The paper presents solutions of different types of boundary value problems for Laplace equation in a piecewise homogeneous cylinders with the double-layer film, as well as problems with overlapping double-layer films on the plane. Using the method of convolution of Fourier expansions, the problems solutions are expressed in terms of the solution of classical problems in homogeneous cylinders or a set of harmonic functions on the plane.

*Keywords:* boundary value problems, method of convolution of Fourier expansions, double-layer film inclusions.

Пусть на плоскости  $x, y$  задана гармоническая функция  $F(x, y)$ , имеющая особые точки в полуплоскости  $x > 0$ . Данная функция описывает установившиеся процессы теплопереноса на однородной плоскости, индуцированные заданными особыми точками (источниками, стоками и т. д.).

#### Задачи на плоскости с двухслойной плёнкой

1. Рассмотрим кусочно-однородную плоскость  $x, y$ , состоящую из двух полуплоскостей  $D_1(x < 0)$  и  $D_2(x > 0)$ ,  $y \in R$  с различной проницаемостью  $k_i$  в  $D_i$ , когда зоны  $D_i$  разделены двухслойной плёнкой  $x = 0$  типа сильно проницаемой трещины  $x = -0$  с параметром  $A$  и слабо-проницаемой завесы  $x = +0$  с параметром  $B$  [2; 3], при сохранении особых точек функции  $F(x, y)$ . Задача для потенциалов  $u_i(x, y)$  в зонах  $D_i$  имеет вид [1-3]:

$$\Delta u_i = 0, \quad i = 1, 2; \quad (1)$$

$$x = 0: \quad u_2 - u_1 = Bk_2 \partial_x u_2, \quad k_2 \partial_x u_2 - k_1 \partial_x u_1 = A \partial_x^2 u_1, \quad (2)$$

при этом функция  $u_2(x, y)$  имеет особые точки заданной гармонической функции  $F(x, y)$ , т. е. в окрестности особых точек выполняется условие

$$u_2(x, y) \sim F(x, y), \quad (3)$$

<sup>1</sup>Работа выполнена в рамках Государственного задания вузу Минобрнауки РФ, № 1.3985.2011.

где  $\partial_x^n = \partial^n / \partial x^n$ . Здесь трещина  $x = -0$  и завеса  $x = +0$  моделируются бесконечно тонкими слоями с бесконечно большой для трещины и бесконечно малой для завесы проницаемостью [2; 3]. Применяя метод свертывания разложений Фурье [2; 3], выразим решение задачи (1)–(3) через функцию  $F(x, y)$ . Следуя указанному методу, предположим сначала, что функция  $F(0, y)$  разлагается в интеграл Фурье с коэффициентами Фурье  $f_i$ :

$$F(0, y) = \int_0^{\infty} g d\lambda, \quad g(y, \lambda) = f_1 \sin \lambda y + f_2 \cos \lambda y. \quad (4)$$

Отметим, что данное предположение существенно сужает класс особых точек функции  $F(x, y)$ . Отсюда функция  $F(x, y)$  при  $x \leq 0$ , где она не имеет особых точек, представима в виде

$$F(x, y) = \int_0^{\infty} e^{\lambda x} g d\lambda, \quad x \leq 0 \quad (5)$$

(функции слева и справа являются решением задачи Дирихле в полуплоскости  $D_1(x < 0)$  вида  $\Delta u = 0, u|_{x=0} = F(0, y)$ ). Представим решение задачи (1)–(3) также в виде разложений Фурье:

$$u_1 = \int_0^{\infty} a_1 e^{\lambda x} g d\lambda, \quad x < 0; \quad u_2 = F(x, y) + \int_0^{\infty} a_2 e^{-\lambda x} g d\lambda, \quad x > 0. \quad (6)$$

Отсюда функции (6) удовлетворяют условиям (1), (3) (при условии сходимости и дифференцируемости интегралов (6)). Из условий сопряжения (2) с учётом (5) для параметров  $a_i(\lambda)$  получим систему алгебраических уравнений  $1 + a_2 - a_1 = Bk_2\lambda(1 - a_2)$ ,  $k_2(1 - a_2) - k_1a_1 = A\lambda a_1$ , решение которой имеет вид

$$a_1 = \frac{2k_2}{d}, \quad a_2 = 1 - \frac{2(A\lambda + k_1)}{d}, \quad (7)$$

где

$$d(\lambda) = ABk_2\lambda^2 + (A + Bk_1k_2)\lambda + k_1 + k_2, \quad (8)$$

при этом  $d(\lambda) > 0$  для  $0 \leq \lambda < \infty$ .

Из разложения функции  $F(x, y)$  (5) следует формула, полученная в работах [2; 3]:

$$\frac{1}{n!} \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} t^n F(x - t, y) dt = \int_0^{\infty} \frac{e^{\lambda x} g}{(\lambda + \gamma)^{n+1}} d\lambda, \quad x < 0, \quad (9)$$

где  $\gamma > 0, n = 0, 1, 2, \dots$ , функция  $g(y, \lambda)$  имеет вид (4).

Пусть квадратный трёхчлен (8) имеет различные корни  $-\gamma_i$ , т.е.  $T \neq 0$ , где

$$\gamma_i = \frac{A + Bk_1k_2 + (-1)^i \sqrt{T}}{2ABk_2}, \quad i = 1, 2; \quad T = (A - Bk_1k_2)^2 - 4ABk_2^2,$$

при этом  $Re \gamma_i > 0$ . Разлагая правильные дроби (7) на множители, получим

$$a_1 = \frac{2k_2}{\sqrt{T}} \left( \frac{1}{\lambda + \gamma_1} - \frac{1}{\lambda + \gamma_2} \right), \quad a_2 = 1 - \frac{2}{\sqrt{T}} \left( \frac{k_1 - \gamma_1 A}{\lambda + \gamma_1} - \frac{k_1 - \gamma_2 A}{\lambda + \gamma_2} \right).$$

Отсюда с учётом формулы (9) при  $n = 0$  решение (6) задачи (1)–(3) приводится к виду:

$$u_1 = \frac{2k_2}{\sqrt{T}} \int_0^{\infty} F(x - t, y) (e^{-\gamma_1 t} - e^{-\gamma_2 t}) dt, \quad x < 0, \quad (10)$$

$$u_2 = F(x, y) + F(-x, y) -$$

$$-\frac{2}{\sqrt{T}} \int_0^{\infty} F(-x - t, y) [(k_1 - \gamma_1 A)e^{-\gamma_1 t} - (k_1 - \gamma_2 A)e^{-\gamma_2 t}] dt, \quad x > 0. \quad (11)$$

В случае комплексных корней многочлена (8) функции (10), (11) действительны.

В случае двукратного корня  $\alpha$  многочлена (8), т. е. при  $T = 0$ , с учётом формулы (9) и равенств

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{ABk_2(\lambda + \alpha)^2}, \quad \frac{\lambda A + k_1}{d} = \frac{1}{ABk_2} \left[ \frac{k_1 - \alpha A}{(\lambda + \alpha)^2} + \frac{A}{\lambda + \alpha} \right]$$

решение (6), (7) задачи (1)-(3) приводится к виду

$$u_1 = \frac{2}{AB} \int_0^{\infty} F(x-t, y) e^{-\alpha t} dt, \quad (12)$$

$$u_2 = F(x, y) + F(-x, y) - \frac{2}{ABk_2} \int_0^{\infty} F(-x-t, y) e^{-\alpha t} [(k_1 - \alpha A)t + A] dt, \quad (13)$$

где

$$\alpha = \frac{A + Bk_1k_2}{2ABk_2} > 0.$$

В полученных формулах (10)–(13) заданная гармоническая функция  $F(x, y)$  может иметь произвольные особые точки при  $0 < x < \infty$ , а при  $x \rightarrow -\infty$  она должна удовлетворять условию  $|F(x, y)| < ce^{r|x|}$ , где  $r < \min(\gamma_i)$  и  $r < \alpha$  соответственно в случаях  $T \neq 0$  (10), (11) и  $T = 0$  (12), (13). При указанных условиях интегралы (10)–(13) сходятся и допускает дифференцирование дважды по  $x, y$ .

Таким образом, решение задачи (1)–(3) в соответствующих случаях строится по формулам (10)–(13) для широкого класса заданных особых точек.

**2.** Поменяем местами трещину и завесу в плёнке  $x = 0$  при сохранении особых точек функции  $F(x, y)$  в полуплоскости  $D_2(x > 0)$ , т.е. рассмотрим случай завесы  $x = -0$  с параметром  $B$  и трещины  $x = +0$  с параметром  $A$ . Для потенциалов  $u_i(x, y)$  в зонах  $D_i$  проницаемости  $k_i$  задача имеет вид (1), (3),

$$x = 0: \quad u_2 - u_1 = Bk_1 \partial_x u_1, \quad k_2 \partial_x u_2 - k_1 \partial_x u_1 = A \partial_x^2 u_2. \quad (14)$$

Представляя решение этой задачи в виде (6), из условий сопряжения (14) найдем

$$a_1 = \frac{2k_2}{d}, \quad a_2 = -1 + \frac{2k_2(Bk_1\lambda + 1)}{d}, \quad (15)$$

где

$$d(\lambda) = ABk_1\lambda^2 + (A + Bk_1k_2)\lambda + k_1 + k_2. \quad (16)$$

Пусть квадратный трёхчлен (16) имеет различные корни  $-\gamma_i$ , т.е.  $T \neq 0$ , где

$$\gamma_i = \frac{A + Bk_1k_2 + (-1)^i \sqrt{T}}{2ABk_1}, \quad i = 1, 2; \quad T = (A - Bk_1k_2)^2 - 4ABk_1^2.$$

Разлагая дроби (15) на множители, получим

$$a_1 = \frac{2k_2}{\sqrt{T}} \left( \frac{1}{\lambda + \gamma_1} - \frac{1}{\lambda + \gamma_2} \right), \quad a_2 = -1 + \frac{2k_2}{\sqrt{T}} \left( \frac{1 - Bk_1\gamma_1}{\lambda + \gamma_1} - \frac{1 - Bk_1\gamma_2}{\lambda + \gamma_2} \right).$$

Отсюда с учётом формулы (9) решение (6) задачи (1), (3), (14) приводится к виду

$$u_1 = \frac{2k_2}{\sqrt{T}} \int_0^{\infty} F(x-t, y) (e^{-\gamma_1 t} - e^{-\gamma_2 t}) dt, \quad (17)$$

$$u_2 = F(x, y) - F(-x, y) +$$

$$+ \frac{2k_2}{\sqrt{T}} \int_0^{\infty} F(-x-t, y) [(1 - Bk_1\gamma_1)e^{-\gamma_1 t} - (1 - Bk_1\gamma_2)e^{-\gamma_2 t}] dt. \quad (18)$$

В случае двукратного корня  $\alpha$  многочлена (16), т. е. при  $T = 0$ , с учётом формулы (9) решение (6), (15) задачи (1), (3), (14) примет вид

$$u_1 = \frac{2k_2}{ABk_1} \int_0^{\infty} F(x-t, y)e^{-\alpha t} dt,$$

$$u_2 = F(x, y) - F(-x, y) + \frac{2k_2}{ABk_1} \int_0^{\infty} F(-x-t, y)e^{-\alpha t} [(1 - Bk_1\alpha)t + Bk_1] dt,$$

где

$$\alpha = \frac{A + Bk_1k_2}{2ABk_1} > 0.$$

Рассуждая аналогично, в случае одиночной трещины  $x = 0$  решение задачи (1)–(3) при  $B = 0$  получим в виде

$$u_1 = \frac{2k_2}{A} \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} F(x-t, y) dt,$$

$$u_2 = F(x, y) - F(-x, y) + \frac{2k_2}{A} \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} F(-x-t, y) dt,$$

где  $\gamma = (k_1 + k_2)/A$ . В случае одиночной завесы решение задачи (1)–(3) при  $A = 0$  имеет вид

$$u_1 = \frac{2}{Bk_1} \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} F(x-t, y) dt,$$

$$u_2 = F(x, y) + F(-x, y) - \frac{2}{Bk_2} \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} F(-x-t, y) dt,$$

где  $\gamma = (k_1 + k_2)/Bk_1k_2$ .

**Краевые задачи в цилиндрах с двухслойной плёнкой.** Полученные решения  $u_i(x, y)$  имеют вид операторов, действующих на заданную гармоническую функцию  $F(x, y)$  по одной переменной  $x$  (переменная  $y$  остается свободной). В условиях сопряжения (2), (14) также участвует только одна переменная  $x$ , при этом эти условия для полученных функций  $u_i(x, y)$  выполняются тождественно. Отсюда функция  $F(x, y)$ , а значит и функции  $u_i(x, y)$  по свободной переменной  $y$  могут удовлетворять дополнительным условиям.

Рассмотрим в пространстве  $(x, y) \in R^3$  цилиндр  $D = (x \in R) \times (y \in Q \subseteq R^2)$ , состоящий из двух полуцилиндров  $D_1(x < 0)$  и  $D_2(x > 0)$  с различной проницаемостью  $k_i$  в  $D_i$  при наличии двухслойной плёнки типа трещины  $x = -0$  с параметром  $A$  и завесы  $x = +0$  с параметром  $B$ . В данном цилиндре рассмотрим задачу с однородными условиями в зоне  $D_1(x < 0)$  (что не умаляет общности) вида

$$\Delta u_1 = 0, \quad \Delta u_2 = H(x, y), \quad M[u_1]_{|S} = 0, \quad M[u_2]_S = h(x, y), \quad (19)$$

при выполнении условий сопряжения (2), где  $M$  – произвольный линейный оператор граничных условий 1-го, 2-го или 3-го рода по переменным  $y_i$ ,  $y = (y_1, y_2)$  (т. е. оператор  $M$  не содержит производных по  $x$  и коэффициенты при производных не зависят от  $x$ ),  $S$  – боковая поверхность цилиндра  $D$ . Решение данной задачи (19), (2) в соответствующих случаях параметра  $T$  строится по формулам (10)–(13), где  $F(x, y)$  – решение соответствующей классической краевой задачи в однородном цилиндре  $D(x \in R, y \in Q)$  без плёнки вида

$$\Delta F = \begin{cases} H(x, y), & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}, \quad M[F]|_S = \begin{cases} h(x, y), & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases},$$

что проверяется непосредственно.

**Задачи на плоскости с пересекающимися плёнками.** Рассмотрим, как и в п. 1, плоскость  $x, y$  с тем или иным плёночным включением  $x = 0$  при заданных особых точках потенциала. В случае дополнительного плёночного включения  $y = 0$  потенциалы примут вид композиции соответствующих операторов, полученных выше и действующих на заданную функцию  $F(x, y)$  соответственно по переменным  $x$  и  $y$ .

В качестве примера рассмотрим плоскость  $x, y$ , разделённую пересекающимися двухслойными плёнками  $x = 0$  и  $y = 0$  на четыре квадранта  $D_{11}(x < 0, y < 0)$ ,  $D_{12}(x < 0, y > 0)$ ,  $D_{21}(x > 0, y < 0)$ ,  $D_{22}(x > 0, y > 0)$  с проницаемостью  $k_{ij}$  в  $D_{ij}$ , где  $k_{2j} = k_{1j}p$ . Пусть плёнка  $x = 0$  состоит из трещины  $x = -0$  с параметром  $A_1$  и завесы  $x = +0$  с параметром  $B_1$ , а плёнка  $y = 0$  состоит из завесы  $y = -0$  с параметром  $B_2$  и трещины  $y = +0$  с параметром  $A_2$ , при этом особые точки заданной гармонической функции  $F(x, y)$  расположены в зоне  $D_{22}$ . Тогда для потенциалов  $u_{ij}$  в  $D_{ij}$  задача примет вид

$$\Delta u_{ij} = 0, \quad (x, y) \in D_{ij}, \quad (20)$$

$$x = 0: \quad u_{2j} - u_{1j} = B_1 p \partial_x u_{2j}, \quad p \partial_x u_{2j} - \partial_x u_{1j} = A_1 \partial_x^2 u_{1j}, \quad j = 1, 2, \quad (21)$$

$$y = 0: \quad u_{i2} - u_{i1} = B_2 k_{11} \partial_y u_{i1}, \quad k_{12} \partial_y u_{i2} - k_{11} \partial_y u_{i1} = A_2 \partial_y^2 u_{i2}, \quad i = 1, 2, \quad (22)$$

$$u_{22}(x, y) \sim F(x, y). \quad (23)$$

Пусть для определённости  $T_1 = (A_1 - B_1 p)^2 - 4A_1 B_1 p^2 \neq 0$ ,  $T_2 = (A_2 - B_2 k_{11} k_{12})^2 - 4A_2 B_2 k_{11}^2 \neq 0$ . Тогда решение задачи (20)–(23) строится в виде композиции операторов (10), (11) по переменной  $x$  и (17), (18) по переменной  $y$ . Действительно, представляя решение задачи (20)–(23) в виде операторов (10), (11) (тождественно удовлетворяющих условиям сопряжения (21)):

$$u_{i1}(x, y) = \frac{2p}{\sqrt{T_1}} \int_0^\infty U_i(x-t, y) (e^{-\gamma_1 t} - e^{-\gamma_2 t}) dt, \quad x < 0, \quad (24)$$

$$u_{i2}(x, y) = U_i(x, y) + U_i(-x, y) -$$

$$-\frac{2}{\sqrt{T_1}} \int_0^\infty U_i(-x-t, y) [(1 - \gamma_1 A_1) e^{-\gamma_1 t} - (1 - \gamma_2 A_1) e^{-\gamma_2 t}] dt, \quad x > 0, \quad (25)$$

для функций  $U_i(x, y)$  получим задачу

$$\Delta U_i = 0,$$

$$y = 0: \quad U_2 - U_1 = B_2 k_{11} \partial_y U_1, \quad k_{12} \partial_y U_2 - k_{11} \partial_y U_1 = A_2 \partial_y^2 U_2,$$

$$U_2(x, y) \sim F(x, y),$$

решение которой строится по формулам (17), (18):

$$U_1(x, y) = \frac{2k_{12}}{\sqrt{T_2}} \int_0^{\infty} F(x, y - \tau) (e^{-\beta_1\tau} - e^{-\beta_2\tau}) d\tau, \quad (26)$$

$$U_2(x, y) = F(x, y) - F(x, -y) +$$

$$+ \frac{2k_{12}}{\sqrt{T_2}} \int_0^{\infty} F(x, -y - \tau) [(1 - B_2k_{11}\beta_1)e^{-\beta_1\tau} - (1 - B_2k_{11}\beta_2)e^{-\beta_2\tau}] d\tau, \quad (27)$$

где

$$\gamma_i = \frac{A_1 + B_1p + (-1)^i\sqrt{T_1}}{2A_1B_1p}, \quad \beta_i = \frac{A_2 + B_2k_{11}k_{12} + (-1)^i\sqrt{T_2}}{2A_2B_2k_{11}},$$

$F(x, y)$  – заданная гармоническая функция (23). Таким образом, решение задачи (20)–(23) выражается через функцию  $F(x, y)$  по формулам (24)–(27).

Аналогично можно решать задачи с другими комбинациями пересекающихся плёночных включений.

#### Список литературы

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 735 с.
2. Холодовский С. Е. Метод свёртывания разложений Фурье. Случай обобщенных условий сопряжения типа трещины (завесы) в кусочно-неоднородных средах // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 6. С. 855–859.
3. Холодовский С. Е. Метод свёртывания разложений Фурье. Случай трещины (завесы) в неоднородном пространстве // Дифференциальные уравнения. Т. 45. № 8. 2009. С. 1204–1208.

Статья поступила в редакцию 01.02.2012 г.



УДК 537.8  
ББК В33

*Алексей Олегович Орлов,  
Институт природных ресурсов,  
экологии и криологии СО РАН (Чита, Россия), e-mail: Orlov\_A\_O@mail.ru*  
*Павел Юрьевич Лукьянов,  
кандидат технических наук,  
Институт природных ресурсов, экологии и криологии СО РАН  
(Чита, Россия), e-mail: lukyanovpu@yandex.ru*

### Определение микроволновых характеристик наноструктурированных материалов резонаторным методом при частичном заполнении резонатора<sup>1</sup>

Приведён вывод формул, позволяющих определить комплексную диэлектрическую проницаемость исследуемого наноструктурированного материала по измеренным параметрам резонанса при частичном заполнении объёмного резонатора. Методика измерений адаптирована для доступных в малых количествах химически активных и гигроскопичных наноматериалов с большими значениями угла потерь.

*Ключевые слова:* резонатор, диэлектрическая проницаемость, наноструктурированные материалы.

*Aleksey Olegovich Orlov,  
Institute of Natural Resources,  
Ecology and Cryology SB RAS (Chita, Russia),  
e-mail: Orlov\_A\_O@mail.ru*  
*Pavel Yurievich Lukyanov,  
Institute of Natural Resources,  
Ecology and Cryology SB RAS (Chita, Russia),  
e-mail: lukyanovpu@yandex.ru*

### Determining Microwave Characteristics of Nanostructured Materials by the Resonator Method with a Partially Filled Cavity

The article presents the formulas for calculating the complex dielectric permeability of the tested nanostructured material according to the measured parameters of the resonance with a partially filled cavity resonator. The measurement method is adapted for available in small quantities chemically active and hygroscopic nanomaterials with large values of  $\tan$ .

*Keywords:* cavity resonator, dielectric constant, nanostructured materials.

При исследовании свойств вновь синтезируемых наноструктурированных материалов с основой в виде матриц МСМ, SBA и т. п. (наноструктурированные силикагели, кристаллогидраты и т. д.) большой интерес представляют температурные зависимости комплексной диэлектрической проницаемости  $\epsilon$  наноматериалов в частотном диапазоне 1–10 ГГц [1]. Однако определение микроволновых характеристик этих материалов радиофизическими методами в широком температурном диапазоне сталкивается с рядом специфических особенностей, в большинстве случаев исключающих применение широко распространённых и отработанных методов и методик измерений. В частности, количество наноматериалов, синтезируемых для исследований ( $\sim 1 - 10 \text{ см}^3$ ), и высокие в них потери ЭМВ в указанном частотном диапазоне исключают применение волноводных или скатерометрических методов, а также метода просвечивания [2]. Высокая химическая активность и гигроскопичность наноматериалов обуславливает их размещение в процессе измерений в герметически закупоренных капсулах. По этим же причинам является невозможным применение широко распространённых методик резонаторного метода, требующих материал для исследований в количествах, равных полному внутреннему объёму резонатора (т.е. для этих частот – сотни и тысячи кубических сантиметров) [2].

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН №22 «Неавтономные нанофазы гидратов и льда в наноструктурированных системах».

При частичном заполнении резонатора исследуемый материал требуется в значительно меньших объёмах, кроме того, появляется возможность расширить диапазон измерений для высоких значений мнимой части диэлектрической проницаемости  $\varepsilon''$  вплоть до  $\varepsilon'' \sim 1$  [4]. Однако определение микроволновых характеристик в абсолютных единицах в этом случае усложняется, поскольку при введении исследуемого материала в резонатор структура электромагнитного поля в нём существенно искажается, что может быть описано аналитически лишь для геометрически простейших форм.

В случае такого размещения исследуемого материала в резонаторе, при котором выполняется условие равенства суммы тока проводимости и тока смещения, протекающих в исследуемом материале, полному току смещения резонатора, эквивалентная схема измерений при частичном заполнении резонатора может быть представлена в виде, приведённом на рис. 1, где  $\varepsilon'$  и  $\varepsilon''$  – действительная и мнимая части комплексной диэлектрической проницаемости исследуемого материала,  $x = \frac{d_x}{d}$  (для плоского конденсатора обозначения на рис. 1) – эффективный коэффициент заполнения резонатора,  $C_0$  и  $C$  – емкость пустого и частично заполненного конденсатора соответственно.

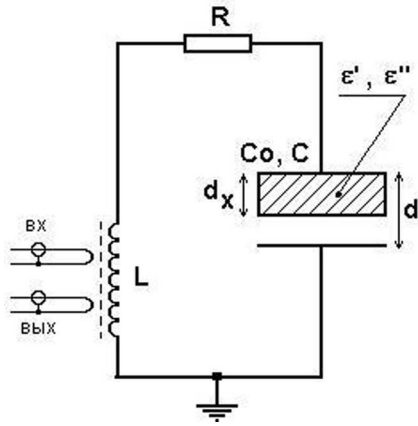


Рис. 1. Эквивалентная схема измерений при частичном заполнении резонатора

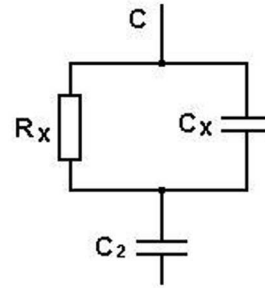


Рис. 2. Эквивалентная схема частично заполненной электрической ёмкости

Плотность тока проводимости, протекающего в измеряемом веществе,  $j_x = \sigma E_x = \sigma \frac{u_x}{d_x}$ , где  $\sigma$  – электрическая проводимость материала,  $E_x$  – напряженность электрического поля,  $u_x$  – мгновенное значение напряжения на  $R_x$  (эквивалентная схема частично заполненной электрической ёмкости  $C$  приведена на рис. 2), откуда  $i_x = S \cdot j_x = \sigma \cdot S \cdot \frac{u_x}{d_x}$  и  $R_x = \frac{u_x}{i_x} = \frac{u_x}{\sigma \cdot S \cdot \frac{u_x}{d_x}} = \frac{d \cdot x}{\sigma \cdot S}$ . Кроме

того,  $C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{d(1-x)}$  и  $C_x = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon' \cdot S}{d \cdot x}$ .

Импеданс  $Z_{C_x} = \frac{1}{j\omega C_x} = \frac{d \cdot x}{j\omega \varepsilon_0 \varepsilon' S}$ ,  $Z_{C_2} = \frac{1}{j\omega C_2} = \frac{d \cdot (1-x)}{j\omega \varepsilon_0 S}$ , и  $Z_{R_x} = R_x = \frac{d \cdot x}{\sigma \cdot S}$ . Для параллельного соединения  $Z_{C_x || R_x} = \frac{1}{\frac{1}{Z_{C_x}} + \frac{1}{Z_{R_x}}} = \frac{1}{\frac{1}{j\omega \varepsilon_0 \varepsilon' S} + \frac{1}{\sigma \cdot S}}$ , откуда

$$Z_C = Z_{C_x || R_x} + Z_{C_2} = \frac{d \cdot x}{(j\omega \varepsilon_0 \varepsilon' + \sigma) \cdot S} + \frac{d \cdot (1-x)}{j\omega \varepsilon_0 S} = \frac{d}{j\omega \varepsilon_0 S} \left[ \frac{x}{\varepsilon' + \frac{\sigma}{j\omega \varepsilon_0}} + 1 - x \right].$$

Так как  $\frac{d}{\varepsilon_0 S} = \frac{1}{C_0}$ , а также, обобщая диссипативную компоненту, как  $\frac{\sigma}{j\omega \varepsilon_0} = -j\varepsilon''$ , получаем:

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C_0} \left[ \frac{x}{\varepsilon' - j\varepsilon''} + 1 - x \right]. \quad (1)$$

Для последовательного RLC-контура выражение для импеданса:

$$Z_{RLC} = Z_R + Z_L + Z_C = R + j\omega L + \frac{1 + \frac{x}{\varepsilon' - j\varepsilon''} - x}{j\omega C_0}.$$

Преобразовывая, получаем

$$Z_{RLC} = j\omega L - j\frac{1-x}{\omega C_0} - j\frac{1}{\omega C_0} \cdot \frac{x(\varepsilon' + j\varepsilon'')}{(\varepsilon' - j\varepsilon'')(\varepsilon' + j\varepsilon'')} + R.$$

Выделяя мнимую и действительную части:

$$Z_{RLC} = j \left[ \omega L - \frac{1-x}{\omega C_0} - \frac{1}{\omega C_0} \cdot \frac{x\varepsilon'}{\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2} \right] + \frac{x}{\omega C_0} \cdot \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2} + R. \quad (2)$$

Из (2) выделим активную составляющую импеданса:

$$R_{\text{общ}} = \frac{x}{\omega \cdot C_0} \cdot \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2} + R. \quad (3)$$

Условием резонанса является равенство нулю реактивной составляющей импеданса (2), то есть

$$\omega L - \frac{1}{\omega \cdot C_0} \left[ 1 - x + \frac{x\varepsilon''}{\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2} \right] = 0,$$

из чего получаем выражение для резонансной частоты  $\omega_p$ :

$$\omega_p = \sqrt{\frac{1 - x + \frac{x\varepsilon''}{\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2}}{LC_0}}. \quad (4)$$

Так как для пустого резонатора (для пустой капсулы)  $x = 0$ , из выражения (4) следует

$$\omega_{\Pi} = \sqrt{\frac{1}{LC_0}},$$

из чего

$$LC_0 = \frac{1}{\omega_{\Pi}^2}$$

и выражение (4) может быть представлено в виде

$$\omega_p = \omega_{\Pi} \sqrt{1 - x + \frac{x\varepsilon''}{\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2}}. \quad (5)$$

Эффективный коэффициент заполнения  $x$  для используемой в данной серии измерений капсулы может быть определён при помещении капсулу вставки из диамагнитного металла с высокой проводимостью, по форме и размерам совпадающими с внутренней поверхностью капсулы.

При введении в капсулу металлической вставки (материал – медь или серебро), электромагнитное поле будет вытесняться из металла за счёт действия скин-эффекта. Можно принять для металлов, что  $\varepsilon'' \gg 1$ , и выражение (5) позволяет получить приближение

$$\omega_M = \omega_{\Pi} \sqrt{1 - x},$$

где  $\omega_M$  – резонансная частота для введённой в резонатор в капсулы с металлической вставкой.

Из последнего равенства можно получить выражение для определения эффективного коэффициента заполнения резонатора  $x$  (при данных размерах и форме капсулы)

$$x = 1 - \frac{\omega_M^2}{\omega_{\Pi}^2}. \quad (6)$$

Действующее значение силы тока  $I_p$  при резонансе в системе связано с активной составляющей импеданса (3) как

$$I_p = U_{\text{вх}} \cdot \frac{k_1}{R_{\text{общ}}},$$

где  $U_{\text{вх}}$  – действующее значение входного напряжения и  $k_1$  – входной коэффициент передачи сигнала. С другой стороны, действующее значение выходного напряжения  $U_{\text{вых}}$ :

$$U_{\text{вых}} = I_p \cdot k_2 = U_{\text{вх}} \cdot \frac{k_1 k_2}{R_{\text{общ}}},$$

где  $k_2$  – выходной коэффициент передачи сигнала. Можно записать, что

$$\frac{U_{\text{вых}}}{U_{\text{вх}}} = \frac{k_1 k_2}{R_{\text{общ}}} = \frac{k}{R_{\text{общ}}} = 10^{D/20},$$

где  $k = k_1 k_2$ ,  $D$  – измеряемый уровень проходящего сигнала на резонансной частоте в децибелах при введенном исследуемом материале.

Для пустого резонатора (пустой капсулы):  $\frac{k}{R} = 10^{D_0/20}$ , где  $D_0$  – уровень сигнала, проходящего через резонатор, в децибелах на резонансной частоте пустого резонатора.

Разделим (3) на  $R$ :

$$\frac{R_{\text{общ}}}{R} = 1 + \frac{x}{\omega_p \cdot C_0 R} \cdot \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2}. \quad (7)$$

Так как  $\frac{1}{\omega_{\Pi} \cdot C_0 R} = Q_{\Pi}$  – добротность пустого резонатора (добротность при введенной пустой капсуле), отношение (7) может быть представлено в виде:

$$\frac{R_{\text{общ}}}{R} = 1 + Q_{\Pi} \frac{\omega_{\Pi}}{\omega_p} \cdot \frac{x \cdot \varepsilon''}{\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2}. \quad (8)$$

Так как  $\frac{k}{R_{\text{общ}}} = \frac{U_{\text{вых}}}{U_{\text{вх}}} = 10^{D/20}$ ,  $\frac{k}{R} = 10^{D_0/20}$ , исключая  $R$  и  $R_{\text{общ}}$  из (8) получаем

$$1 + Q_{\Pi} \frac{\omega_{\Pi}}{\omega_p} \cdot \frac{x \varepsilon''}{\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2} = \frac{10^{D_0/20}}{10^{D/20}},$$

из чего

$$\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2} = \frac{\left[ \frac{10^{D_0/20}}{10^{D/20}} - 1 \right]}{Q_{\Pi} \cdot \frac{\omega_{\Pi}}{\omega_p} \cdot x} = B. \quad (9)$$

Так как последнее выражение не содержит никаких параметров дискретных элементов, относящихся к схеме замещения, оно может быть обобщено для всех электромагнитных осциллирующих систем, удовлетворяющих оговоренному выше условию размещения исследуемого материала в резонаторе. Кроме того, из (5) следует соотношение

$$\frac{\varepsilon'}{\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2} = 1 + \frac{\left[ \frac{\omega_p^2}{\omega_{\Pi}^2} - 1 \right]}{x} = A, \quad (10)$$

которое также может быть обобщено.

Совместно выражения (9) и (10) представляют собой систему уравнений на действительную и мнимую части комплексной диэлектрической проницаемости материала:

$$\begin{cases} \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2} = B, \\ \frac{\varepsilon'}{\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2} = A. \end{cases} \quad (11)$$

Возводя оба уравнения системы (11) в квадрат и складывая, получаем:

$$\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2 = \frac{1}{A^2 + B^2}. \quad (12)$$

Учитывая (12) из (11) получаем окончательно:

$$\varepsilon' = \frac{A}{A^2 + B^2} \quad \text{и} \quad \varepsilon'' = \frac{B}{A^2 + B^2},$$

где

$$A = 1 + \frac{\left[ \frac{\omega_p^2}{\omega_{\Pi}^2} - 1 \right]}{x}, \quad B = \frac{\left[ \frac{10^{D_0/20}}{10^{D/20}} - 1 \right]}{Q_{\Pi} \cdot \frac{\omega_{\Pi}}{\omega_p} \cdot x} \quad \text{и} \quad x = 1 - \frac{\omega_M^2}{\omega_{\Pi}^2}.$$

Полученные формулы решают задачу определения комплексной диэлектрической проницаемости материалов по результатам измерения параметров резонанса в объёмных резонаторах при их частичном заполнении.

#### *Список литературы*

1. Брандт А. А. Исследование диэлектриков на сверхвысоких частотах. М., 1963. 403 с.
2. Бордонский Г. С., Лукьянов П. Ю., Аристов Ю.И., Овощников Д.С., Уваров Н.Ф. СВЧ-свойства кристаллогидратов в нанопорах силикагеля // Ультрадисперсные порошки, наноструктуры, материалы: получение, свойства, применение. Красноярск, 2009. С. 4
3. Бордонский Г. С., Филиппова Т. Г. Отличие электромагнитных свойств льда D2O и H2O при измерениях в резонаторе // ФТТ. 2001 43. №9. С. 1575–1579.2–43.
4. Лукьянов П. Ю., Орлов А. О., Цыренжапов С. В. Определение микроволновых характеристик гетерогенных сред с наноструктурированными включениями резонаторным методом при частичном заполнении резонатора // Ученые записки Забайкальского государственного гуманитарно-педагогического университета им. Н. Г. Чернышевского. 2010. № 2. С. 68–72.

Статья поступила в редакцию 25.01.2012 г.

УДК 517.956  
ББК В143

*Алексей Олегович Потехо,*  
кандидат физико-математических наук, доцент  
Забайкальский государственный университет  
(Чита, Россия), e-mail: potehoao@rambler.ru

**К вопросу представления суммы степенного ряда на границе круга сходимости**

Введено одно из представлений суммы степенного ряда на границе круга сходимости и соответствующей ему суммы тригонометрического ряда. Показано, что введенная операция формального дифференцирования тригонометрических рядов совпадает с дифференцированием распределений. Полученные результаты могут быть перенесены на кратные тригонометрические ряды.

*Ключевые слова:* степенной ряд, круг сходимости, тригонометрический ряд, распределение.

*Aleksei Olegovich Potekho,*  
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor,  
Trans-Baikal State University (Chita, Russia), e-mail: potehoao@rambler.ru

**To the Question of Presenting the Sum of the Sedate Row on the Border of the Convergence Circle**

The article introduces one of the representations of a sum of the sedate row on the border of the convergence circle and the corresponding sum of a trigonometric series. It shows that the introduced operation of formal differentiation of trigonometric series coincides with the differentiation of distributions. The obtained results can be extended to multiple trigonometric series.

*Keywords:* sedate row, convergence circle, trigonometric row, distribution.

Классическая задача о существовании граничных значений аналитической функции  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  рассматривалась ранее для различных условий поведения функции  $f(z)$  вблизи границы. В зависимости от этих условий было доказано существование граничных значений в том или ином классе функций, классических или обобщенных [1–3]. В данной работе граничное значение аналитической функции  $f(z)$  построено в виде линейного оператора определенного вида.

Пусть  $F$  – множество рядов вида

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad (1)$$

радиус сходимости которых равен 1;  $G_\rho(D)$  – множество рядов

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n},$$

сходящихся в области  $D: \{|z| > \rho, 0 < \rho < 1\}$ . Рассмотрим оператор

$$A(f, g) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(t)g(tz) \frac{dt}{t},$$

где  $C: \{|t| = r\}$  – окружность радиуса  $r, \rho < r < 1$ . Так как

$$\begin{aligned} A(f, g) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C f(t)g(tz) \frac{dt}{t} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})g(zre^{i\theta})id\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta} \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n} r^{-n} e^{-in\theta} d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^{-n}, \end{aligned}$$

то оператор  $A(f, g)$  является линейным оператором, преобразующим элемент линейного пространства  $G_\rho(D)$  в элемент  $G_\rho(D)$ .

Пусть  $\partial K: \{|z| = 1\}$ ;  $C: \{|t| = r, \rho < r < 1\}$ ;  $E_\rho(\partial K)$  – множество функций вида

$$h(\varphi) = g(e^{-i\varphi}), \quad g(z) \in G_\rho(D).$$

Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} \alpha(f, g) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C f(t)g(te^{-i\varphi}) \frac{dt}{t} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta} \sum_{n=0}^{\infty} b_n r^{-n} e^{in(\varphi-\theta)} d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n e^{in\varphi}. \end{aligned}$$

Отсюда оператор

$$\alpha(f, g) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n e^{in\varphi}, \quad (2)$$

однозначно определяемый рядом (1), каждую функцию  $g \in E_\rho(\partial K)$  переводит в функцию из  $E_\rho(\partial K)$ .

Если ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\varphi}$$

сходится к интегрируемой функции  $f_1(\varphi)$ , то в выражении (2) можно перейти к пределу под знаком интеграла

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 1} \alpha(f, g) &= \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi i} \int_C f(t)g(te^{-i\varphi}) \frac{dt}{t} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\theta})g(re^{i(\theta-\varphi)}) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(\theta)g_1(\varphi - \theta) d\theta, \end{aligned}$$

где

$$g_1(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{in\omega},$$

т. е.

$$\lim_{r \rightarrow 1} \alpha(f, g) = \alpha^*(f, g)$$

представляет собой свёртку  $f_1 * g_1$ . Выражение  $\alpha(f, g)$  можно назвать граничным значением функции  $f \in F$  в смысле распределений или принять это выражение за сумму в смысле распределений тригонометрического ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\varphi}.$$

На множестве рядов  $F$  можно ввести операцию дифференцирования с весом  $z \frac{d}{dz}$ . Так как

$$A\left(z \frac{df}{dz}, g\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} n a_n r^n e^{in\theta} \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n} r^{-n} e^{-in\theta} d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n b_n z^{-n},$$

а

$$A(f, z \frac{dg}{dz}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta} \sum_{n=0}^{\infty} (-nb_n z^{-n} r^{-n} e^{-in\theta}) d\theta = - \sum_{n=0}^{\infty} n a_n b_n z^{-n},$$

то

$$A(z \frac{df}{dz}, g) = -A(f, z \frac{dg}{dz}).$$

Для тригонометрических рядов операции  $z d/dz$  соответствует операция  $\frac{1}{i} d/d\varphi$ . Так как

$$\alpha(\frac{1}{i} \frac{df}{d\varphi}, g) = -\alpha(f, \frac{1}{i} \frac{dg}{d\varphi}),$$

то

$$\alpha(\frac{df}{d\varphi}, g) = -\alpha(f, \frac{dg}{d\varphi}),$$

т. е. формальное дифференцирование по  $\varphi$  совпадает с дифференцированием распределений. Полученные результаты обобщаются на кратные тригонометрические ряды.

#### **Список литературы**

1. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными / пер. с англ. М.: Мир, 1986. Т. 1: Теория распределений и анализ Фурье. 450 с.

Статья поступила в редакцию 27.03.2012 г.



УДК 621.317.412  
ББК В3

*Николай Петрович Степанов,*  
доктор физико-математических наук, профессор,  
Забайкальский государственный гуманитарно-педагогический университет  
им. Н. Г. Чернышевского (Чита, Россия) e-mail: np-stepanov@mail.ru  
*Вячеслав Юрьевич Наливкин,*  
аспирант,  
Забайкальский государственный университет (Чита, Россия),  
e-mail: ls-slava@mail.ru

**Анизотропия магнитной восприимчивости твёрдых растворов  
( $\text{Bi}_{2-x}\text{Sb}_x$ ) $\text{Te}_3$  ( $0 < x < 1$ ) в диапазоне температур от 2 до 50 К**

Сверхпроводящий квантовый интерферометр Джозефсона (СКВИД магнетометр) использован для исследования температурных зависимостей магнитной восприимчивости  $\chi$  кристаллов твёрдых растворов ( $\text{Bi}_{2-x}\text{Sb}_x$ ) $\text{Te}_3$  ( $0 < x < 1$ ) в диапазоне температур от 2 до 50 К, при ориентации вектора напряжённости магнитного поля  $H$  по отношению к тригональной оси кристалла  $C_3 H \parallel C_3$  и  $H \perp C_3$ . Установлено, что магнитная восприимчивость ионного остова исследованных образцов  $\chi^G = -0,35 \cdot 10^{-6} \text{ см}^3/\text{г}$ , вкладом дефектов кристаллической решётки в магнитную восприимчивость можно пренебречь, а вклад свободных носителей заряда, во всём исследованном температурном интервале, имеет диамагнитный характер. Показано, что в рамках подхода Паули и Ландау-Пайерлса удаётся описать вклад свободных носителей заряда в результирующую магнитную восприимчивость и её анизотропию. В ходе расчёта магнитной восприимчивости, выполненного с учётом постоянства концентрации свободных носителей заряда, находящихся в состоянии сильного вырождения, обнаружено, что наблюдается изменение характера температурной зависимости анизотропных эффективных масс от химического состава кристалла. Возможно, что это связано со сложной структурой валентной зоны и её изменением при увеличении количества  $\text{Sb}_2\text{Te}_3$  в составе твердого раствора.

*Ключевые слова:* магнитная восприимчивость кристаллов, твёрдый раствор, концентрация, эффективная масса, анизотропия.

*Nikolay Petrovich Stepanov,*  
Doctor of Physics and Mathematics, Professor,  
Zabaikalsky State Humanitarian and Pedagogical University  
named after N.G. Chernyshevsky (Chita, Russia), e-mail: np-stepanov@mail.ru  
*Vyacheslav Yurievich Nalivkin,*  
Graduate Student,  
Trans-Baikal State University (Chita, Russia), e-mail: ls-slava@mail.ru

**Anisotropy of Magnetic Susceptibility of Solid Solutions  
of ( $\text{Bi}_{2-x}\text{Sb}_x$ ) $\text{Te}_3$  ( $0 < x < 1$ ) in the Temperature Range from 2 to 50 K**

The Josephson junction superconducting quantum interferometer (SQUID magnetometer) was used to study the temperature dependence of magnetic susceptibility  $\chi$  of crystals of solid solutions ( $\text{Bi}_{2-x}\text{Sb}_x$ ) $\text{Te}_3$  ( $0 < x < 1$ ) at temperatures ranging from 2 to 50 K, with the orientation of the magnetic field vector  $H$  for  $C_3$  with respect to the trigonal crystal axis  $C_3 H \parallel C_3$ , and  $\perp C_3$ . The article shows that the magnetic susceptibility of the ionic core of the studied samples  $G = -0,3510^{-6} \text{ cm}^3/\text{g}$ , the contribution of lattice defects in the magnetic susceptibility can be neglected, and the contribution of free charge carriers in the entire temperature range has a diamagnetic character. The article shows that using the approach of Pauli and Landau-Peierls it is possible to describe the contribution of free carriers to the resultant magnetic susceptibility and its anisotropy. In the calculation of magnetic susceptibility, taking into account the constancy of the concentration of free carriers in the state of strong degeneracy, we observed changes in temperature dependence of the anisotropic effective masses on the chemical composition of the crystal. Perhaps this is

due to the complex structure of the valence band and its variation with increasing number of  $Sb_2Te_3$  in the solid solution.

*Keywords:* crystal magnetic susceptibility, solid solution, concentration, effective mass, anisotropy.

### Введение

Явления переноса в твёрдых растворах  $Bi_2Te_3 - Sb_2Te_3$  исследованы достаточно подробно благодаря большой практической значимости этих материалов для термоэлектрического материаловедения. Вместе с тем, наблюдающееся с ростом температуры уменьшение электропроводности, а также аномальное поведение коэффициента Холла, который в  $Bi_2Te_3$  увеличивается с ростом температуры от 100 до 250 К на фоне уменьшения величины термической запрещённой зоны и слабого температурного изменения эффективных масс, указывает на необходимость проведения дополнительных исследований, способных дать информацию о важнейших параметрах электронной системы материала. Одним из таких исследований может явиться изучение температурной зависимости магнитной восприимчивости, величина которой изменяется от концентрации и эффективной массы свободных носителей заряда, но не зависит от интенсивности релаксационных процессов, играющих значительную роль при рассмотрении кинетических явлений. Таким образом, целью настоящей работы явилось исследование температурной зависимости магнитной восприимчивости  $\chi$  и её анизотропии в твердых растворах на основе теллуридов висмута и сурьмы, содержащих до 50 процентов  $Sb_2Te_3$ .

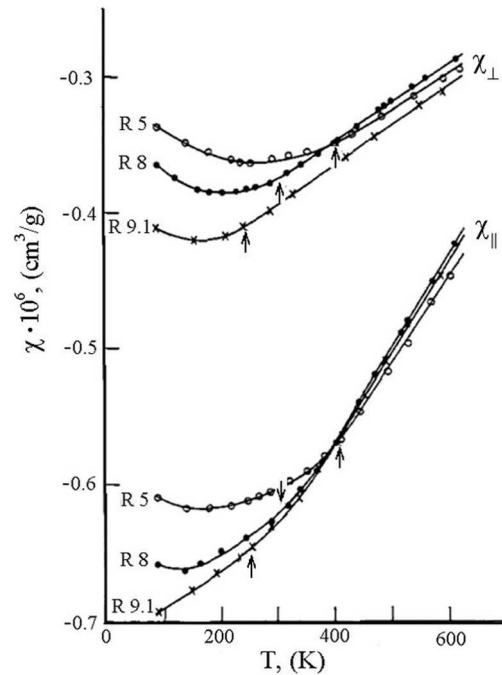
### Обзор исследований магнитной восприимчивости в кристаллах $Bi_2Te_3-Sb_2Te_3$

Результаты исследования магнитной восприимчивости  $Bi_2Te_3$ ,  $Sb_2Te_3$  и твёрдых растворов системы  $Bi_2Te_3-Sb_2Te_3$  изложены в работах [6; 7; 8]. В наиболее ранней работе [8] измерения  $\chi$  проводились на поликристаллических образцах  $Bi_2Te_3$  и  $Sb_2Te_3$ . Было установлено, что в  $Bi_2Te_3$   $\chi = -0,402 \cdot 10^{-6} \text{ см}^3/\text{г}$ , а в  $Sb_2Te_3$   $\chi = -0,398 \cdot 10^{-6} \text{ см}^3/\text{г}$  и не изменяется в интервале температур 100–550 К. При интерпретации результатов исследований было сделано предположение о том, что диамагнитная восприимчивость  $Bi_2Te_3$  обусловлена кристаллической решёткой и пропорциональна числу электронов в молекуле. Действительно, такой подход, как отмечено в работе [7], применим для обсуждения порядка величины  $\chi$ , но он не может объяснить анизотропию или температурную зависимость магнитной восприимчивости. Так, на рис. 1 представлены результаты исследования магнитной восприимчивости кристаллов  $Bi_2Te_3$ , отличающихся типом и концентрацией свободных носителей заряда, выполненного авторами работы [7]. Как видно из рисунка, наблюдается отчётливо выраженная анизотропия, а также концентрационная и температурная зависимость магнитной восприимчивости. Анизотропия заключается в зависимости  $\chi$  от ориентации вектора напряжённости магнитного поля  $H$  по отношению к тригональной оси кристалла  $C_3$ . При ориентации  $H||C_3$  определяется  $\chi_{||}$ , а в случае  $H \perp C_3$  соответственно  $\chi_{\perp}$ . В работе [6] была исследована температурная зависимость магнитной восприимчивости в диапазоне от 1,28 до 293 К шести образцов твёрдых растворов  $Bi_2Te_3-Sb_2Te_3$ , содержащих №1 – 0, №2 – 10, №3 – 22,2, №4 – 33,3, №5 – 90 и №6 – 100 процентов  $Sb_2Te_3$ . Для образцов №1, №2 и №4 были получены значения  $\chi$ , сопоставимые с данными работы [7], слабо изменяющиеся с ростом температуры. Для образца №3 обнаружилось резкое уменьшение диамагнетизма при понижении температуры и переход в парамагнитное состояние при температурах ниже 10 К. В настоящее время природа этого эффекта остается невыясненной.

### Кристаллы и образцы

Исследовались монокристаллы твёрдых растворов системы  $Bi_2Te_3-Sb_2Te_3$ , содержащие 10, 25, 50 мол. %  $Sb_2Te_3$ , выращенные методом Чохральского в институте металлургии и материаловедения им. А. А. Байкова РАН. В качестве исходных материалов использовались  $Te$ ,  $Sb$ ,  $Bi$ , содержащие 99,9999 массовых % основного вещества. Химический состав выращенных монокристаллов определялся методом атомно-адсорбционной спектрометрии. Качество монокристаллов контролировалось методом рентгеновской дифракционной топографии.

Кристалл  $Bi_2Te_3$  имеет ромбоэдрическую структуру с пространственной группой  $D_{3d}^5$  ( $R\bar{3}m$ ) и его строение можно представить в виде набора слоёв, перпендикулярных оси симметрии третьего



**Рис. 1.** Температурные зависимости магнитной восприимчивости кристаллов  $\text{Bi}_2\text{Te}_3$ , отличающихся типом и концентрацией свободных носителей заряда [1]. Возле кривых указан коэффициент Холла  $R$ . Образец с  $R = 9, 1$ ,  $n$ -типа

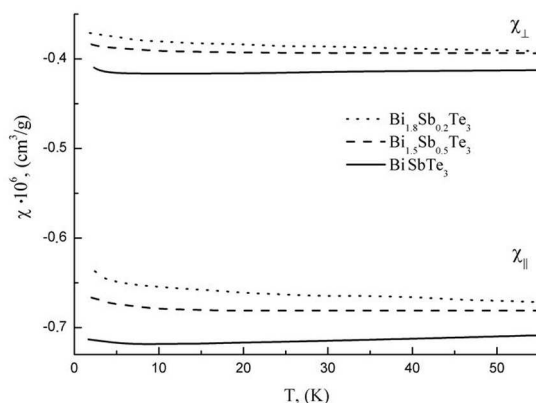
порядка  $C_3$ . Возможен скол кристалла вдоль указанных слоёв, т. е. по плоскости спайности, перпендикулярной  $C_3$ . Исследованные монокристаллы имели толщину 15–20 мм, хорошо выраженные плоскости спайности и массу 200–300 г. Образцы для магнитных измерений вырезались из слитка при помощи электроискровой резки и затем очищались травлением. Характерные размеры образцов для магнитных измерений  $2 \times 2 \times 4$  мм.

В данной работе приведены результаты исследования магнитной восприимчивости в диапазоне температур от 2 до 50 К с интервалом 3 К, которые проводились в магнитных полях до 30 кЭ на сверхпроводящем квантовом интерферометре Джозефсона (SQUID-магнетометре) при двух ориентациях вектора напряжённости магнитного поля  $H$  по отношению к  $C_3$  ( $H \parallel C_3$  и  $H \perp C_3$ ). Относительная погрешность измерений не превышает 0,2 %.

### Экспериментальные результаты

Результаты исследования температурных зависимостей магнитной восприимчивости трёх кристаллов  $(\text{Bi}_{2-x}\text{Sb}_x)\text{Te}_3$  с  $x = 0, 2$  – образец № 1,  $x = 0, 5$  – образец № 2 и  $x = 1$  – образец № 3 представлены на рис. 2, из которого видно, что все исследованные кристаллы в температурном интервале от 2 до 50 К обладают диамагнитным откликом. Необходимо отметить, что в кристалле, содержащем 25 %  $\text{Sb}_2\text{Te}_3$ , не обнаружено перехода в парамагнитное состояние, характерного для близкого по составу образца, содержащего 22,2 процента  $\text{Sb}_2\text{Te}_3$ , исследованного в работе [6]. В то же время, следует заметить, что для всех исследованных образцов наблюдается небольшое уменьшение диамагнетизма при понижении температуры от 15 до 2 К. Как следует из сравнения рис. 1 и рис. 2, наблюдаются близкие значения величин  $\chi_{\parallel}$  и  $\chi_{\perp}$  в области сопоставимых температур. Из рис. 2 видно, что для всех исследованных кристаллов наблюдается ярко выраженная анизотропия магнитной восприимчивости. Величина анизотропии изменяется с ростом температуры.

Рассмотрим зависимость магнитной восприимчивости от состава твёрдого раствора и концентрации свободных носителей заряда. Увеличение количества  $\text{Sb}_2\text{Te}_3$  приводит к росту абсолютных значений  $\chi_{\parallel}$  и  $\chi_{\perp}$  при низких температурах и изменению характера температурной зависимости  $\chi$ . В исследованных кристаллах холловская концентрация свободных носителей заряда увеличивается от образца № 1 к образцу № 3. Как видно из рис. 2, при температуре 2 К диамагнитная восприимчивость оказывается больше у образцов с более высокой концентрацией дырок, что свидетельствует о диамагнитном характере отклика свободных носителей заряда.



**Рис. 2.** Температурные зависимости магнитной восприимчивости кристаллов  $(\text{Bi}_2 - x\text{Sb}_x)\text{Te}_3$ . Концентрация свободных носителей заряда указана в таблице

В поведении температурной зависимости магнитной восприимчивости исследованных образцов наблюдается ряд особенностей. Первая связана с тем, что для всех образцов отмечается увеличение абсолютных значений магнитной восприимчивости при изменении температуры от 2 до 15 К. Вторая особенность связана с тем, что при температурах, больших 15 К, характер температурной зависимости магнитной восприимчивости изменяется от образца к образцу. Так, если для образца, содержащего 10 мол. %  $\text{Sb}_2\text{Te}_3$  наблюдается увеличение абсолютных значений  $\chi$ , то для образца, содержащего 25 мол. %  $\text{Sb}_2\text{Te}_3$ , диамагнитная восприимчивость остаётся практически постоянной, а для образца с 50 мол. %  $\text{Sb}_2\text{Te}_3$  наблюдается её уменьшение. Третья особенность заключается в том, что независимо от состава твёрдого раствора на кривых  $\chi(T)$  просматривается точка перегиба при температуре 40 К, после прохождения которой изменяется величина  $d\chi/dT$  при сохранении общей тенденции, характерной для данного образца.

### Анализ экспериментальных результатов

Известно, что полная магнитная восприимчивость  $\chi$  кристаллов твёрдых растворов  $\text{Bi}_2\text{Te}_3$ - $\text{Sb}_2\text{Te}_3$  может быть представлена как сумма вкладов ионного остова  $\chi^G$ , дефектов кристаллической решётки  $\chi^d$ , свободных носителей заряда  $\chi^{eh}$ . Вклад носителей заряда  $\chi^{eh} = \chi^P + \chi^{LP}$ , в свою очередь, состоит из парамагнитного вклада Паули  $\chi^P$  и диамагнитного вклада Ландау-Пайерлса  $\chi^{LP}$ . Как было установлено в работе [7], вкладом  $\chi^d$  в кристаллах  $\text{Bi}_2\text{Te}_3$  можно пренебречь. Об этом же свидетельствуют и результаты опытов, в ходе которых не было зафиксировано изменения величины магнитной восприимчивости кристаллов висмута, подвергавшихся дроблению на всё более мелкие фрагменты [4]. Вклады  $\chi^G$  и  $\chi^{eh}$  могут быть сопоставимы по величине, поэтому существует необходимость решения задачи по их разделению. Обычно в полупроводниках при низких температурах концентрация свободных носителей заряда существенно уменьшается и тогда экспериментальные значения магнитной восприимчивости, как было отмечено Бушем и Моозером [5], определяются только  $\chi^G$ . Однако в кристаллах  $\text{Bi}_2\text{Te}_3$  за счёт нарушения стехиометрии и примесей с малым потенциалом ионизации концентрация свободных носителей заряда даже при очень низких температурах составляет  $\sim 10^{19} \text{ см}^{-3}$ , что указывает на необходимость учёта их влияния на магнитную восприимчивость. Начиная с  $T = 2\text{К}$ , наблюдается анизотропия магнитной восприимчивости, которая также свидетельствует о влиянии свободных носителей заряда. Следовательно, необходимо каким-либо образом выделить вклад ионного остова  $\chi^G$ . В связи с этим, в начале целесообразно оценить величину  $\chi^G$  и рассмотреть подход, который использовали авторы работы [8] для анализа результатов исследования магнитной восприимчивости кристаллов  $\text{Bi}_2\text{Te}_3$  и  $\text{Sb}_2\text{Te}_3$ . Исходя из предположения о том, что в кристаллах полупроводников, обладающих определённой долей ионности химической связи, магнитная восприимчивость при низких температурах определяется, в основном, вкладом ионного остова, в работе [8] был предпринят расчёт величины молярной восприимчивости кристаллов в  $\text{Bi}_2\text{Te}_3$ , в соответствии с классическим подходом Ланжевена.

Для упрощения процедуры вычисления можно воспользоваться эмпирической зависимостью  $\chi_{mol}$  от общего количества электронов  $Z$  в молекуле, наблюдающуюся в полярных полупроводниках и представляющую собой практически прямую пропорцию между количеством электронов в молекуле и молярной восприимчивостью. Описанный подход позволил показать хорошее соответствие между количеством электронов в молекулах  $\text{Bi}_2\text{Te}_3$ ,  $\text{Sb}_2\text{Te}_3$  и их молярной восприимчивостью [8]. Так в  $\text{Bi}_2\text{Te}_3$   $Z = 322$  и молярная восприимчивость  $\chi_{mol} = -322 \cdot 10^{-6} \text{ см}^3$ , что соответствует значению удельной восприимчивости  $\chi = -0,4 \cdot 10^{-6} \text{ см}^3/\text{г}$ , хорошо согласующемуся с результатами экспериментальных исследований, выполненных на поликристаллах [8], и исследований  $\chi_{\perp}$ , выполненных на кристаллах [7]. Тем не менее, полученное таким образом значение  $\chi^G = -0,4 \cdot 10^{-6} \text{ см}^3/\text{г}$ , имеет оценочный характер, и не может быть использовано в количественных расчётах.

Как следует из рис. 2, при понижении температуры от 15 до 2 К величина диамагнитной восприимчивости всех исследованных кристаллов уменьшается. Минимальные значения магнитной восприимчивости, наблюдающиеся на рис. 2, соответствуют  $\chi_{\perp} = -0,37 \cdot 10^{-6} \text{ см}^3/\text{г}$ , что в соответствии с подходом Буша-Моозера может оказаться ближе к истинному значению  $\chi^G$ , чем  $\chi = -0,4 \cdot 10^{-6} \text{ см}^3/\text{г}$ , в том случае, если вклад свободных носителей заряда носит диамагнитный характер. То, что это так, подтверждается наблюдающейся закономерностью, в соответствии с которой увеличение концентрации свободных носителей заряда от образца №1 к образцу №3 приводит к росту диамагнетизма при  $T = 2 \text{ К}$ , который не может быть связан с изменением  $\chi^G$ , и, вероятнее всего, обусловлен увеличением концентрации дырок, обладающих диамагнитной восприимчивостью. Кроме этого, как следует из рис. 2, величина  $\chi_{\perp} = -0,679 \cdot 10^{-6} \text{ см}^3/\text{г}$ , что значительно превосходит расчётное значение  $\chi^G$ , полученное в соответствии с выражением (3), имеющим изотропный характер и не способным объяснить наблюдающейся анизотропии. Можно предположить, что и за анизотропию магнитной восприимчивости также отвечают свободные носители заряда, обладающие диамагнитным откликом и, таким образом, увеличивающие абсолютные значения  $\chi_{\perp}$  по сравнению с  $\chi^G$ . В связи с вышеизложенным, для определения  $\chi^G$  оказывается необходим расчёт вклада свободных носителей заряда  $\chi^{eh}$  в магнитную восприимчивость и его анизотропии  $\chi_{\parallel}/\chi_{\perp}$ .

Для описания вклада  $\chi^{eh}$  воспользуемся выражением, полученным в рамках подхода Паули и Ландау-Пайерлса. Известно, что независимо от степени вырождения диамагнитная составляющая магнитной восприимчивости свободных носителей заряда, описываемая в рамках подхода Ландау-Пайерлса, в  $1/3(m_0/m^*)^2$  раза отличается от парамагнитной составляющей Паули. Несложно показать, что в зависимости от величины эффективной массы свободных носителей заряда результирующая магнитная восприимчивость  $\chi^{eh}$  может быть как пара-, так и диамагнитной. Если эффективные массы носителей заряда меньше  $0,577m_0$ , то результирующая  $\chi^{eh}$  будет являться диамагнитной, и наоборот. Таким образом, величина соотношения между диа- и парамагнитными составляющими может изменяться вслед за изменением эффективных масс носителей заряда, независимо от степени их вырождения.

Расчёт значений  $\chi_{\perp}^{eh}$  и  $\chi_{\parallel}^{eh}$  должен выполняться с учётом анизотропии эффективных масс [2]. Значения эффективных масс восприимчивости  $m_{\perp}^*$  и  $m_{\parallel}^*$ , рассчитываемые в рамках шестизвончатой модели Драббла-Вольфа. Подстановка компонент тензора эффективных масс для  $p\text{-Bi}_2\text{Te}_3$   $1/\alpha_1 = m_0/m_1 = 0,43$ ;  $1/\alpha_2 = m_0/m_2 = 0,048$ ;  $1/\alpha_3 = m_0/m_3 = 0,19$  позволяет получить  $m_{\perp}^* = 0,09m_0$ ,  $m_{\parallel}^* = 0,22m_0$ . В кристаллах твёрдых растворов  $\text{Bi}_2\text{Te}_3\text{-Sb}_2\text{Te}_3$  указанные массы могут незначительно изменяться, например, вследствие изменения угла наклона эллипсоидов. Таким образом, поскольку  $m_{\perp}^*$  и  $m_{\parallel}^*$  оказываются значительно меньше  $0,577m_0$ , то  $\chi_{\perp}^{eh}$  и  $\chi_{\parallel}^{eh}$  будут обладать диамагнитным характером, что подтверждает выводы, сделанные при первоначальном анализе экспериментальных данных.

Подстановка анизотропных эффективных масс носителей заряда в выражения (6) и (7), позволяет оценить величину анизотропии  $\chi_{\parallel}^{eh}/\chi_{\perp}^{eh} \approx 6,26$  и произвести уточнение значения восприимчивости ионного остова  $\chi^G$ . Действительно, значение  $\chi_{\parallel}^{eh}/\chi_{\perp}^{eh} \approx 6,26$  оказывается намного больше величины анизотропии, наблюдающейся в ходе эксперимента, например, для кристалла №1  $\chi_{\parallel}/\chi_{\perp} \approx 1,7$ . Однако если рассмотреть отношение  $\chi_{\parallel}/\chi_{\perp} = (\chi_{\parallel}^{eh} + \chi^G)/(\chi_{\perp}^{eh} + \chi^G)$ , то тогда подстановка значений  $m_{\perp}^* = 0,09m_0$  и  $m_{\parallel}^* = 0,22m_0$  в выражения (6) и (7), а также использование значения  $\chi^G = -0,35 \cdot 10^{-6} \text{ см}^3/\text{г}$ , позволяет получить наблюдаемую анизотропию магнитной восприимчивости, равную 1,7. Это позволяет утверждать, что восприимчивость ионного остова  $\chi^G = -0,35 \cdot 10^{-6} \text{ см}^3/\text{г}$ , что по абсолютной величине несколько меньше значения  $\chi^G = -0,37 \cdot 10^{-6} \text{ см}^3/\text{г}$  образца № 1 при  $T = 2 \text{ К}$ , отличающегося минимальной концентрацией

свободных носителей заряда. Таким образом, определив величину вклада  $\chi^G$ , возможно описание наблюдаемых абсолютных значений магнитной восприимчивости и её анизотропии.

### Список литературы

1. Гольцман Б. М., Кудинов В. А., Смирнов И. А. Полупроводниковые термоэлектрические материалы на основе  $\text{Bi}_2\text{Te}_3$ . М.: Наука, 1972.
2. Заячковский М. П., Берча Д. М., Заячковская И. Ф. Влияние эффектов слоистости на магнитную восприимчивость кристаллов  $\text{BiTeJ}$  // УФН. 1978. № 23. С. 1119–1121.
3. Константинов П. П., Прокофьева Л. В., Федоров М. И. Кинетические коэффициенты  $n\text{-Bi}_2\text{Te}_{2,7}\text{Se}_{0,3}$  в двухзонной модели электронного спектра // ФТП. 2005. №39. С. 1059.
4. Коришев В. И. Магнитная восприимчивость сплавов висмут-сурьма легированных оловом и теллуrom в интервале температур от 77 до 300 К.: дис. канд. ... ф.-м. наук. Ленинград, 1972. С. 70.
5. Busch O., Mooser E. Magnetic susceptibility of firm solutions // Helv. Phys. Acta. 1953. № 26. P. 611.
6. Itterbeek A. Van, Deynse N. Van, Herinckx C. Measurements of the magnetic anisotropy of single crystals of  $\text{Bi}_2\text{Te}_3$ ,  $\text{Sb}_2\text{Te}_3$  and compounds of them between room temperature and 1.3 K // Physica. 1966. № 32. P. 2123–2128.
7. Mansfield R. The magnetic susceptibility of bismuth telluride // Proc. Phys. Soc., 74, 599 (1960). 1960. № 74. P. 599–603.
8. Matyas M. The susceptibility of selenides and tellurides of heavy elements // Czechosl. J. Phys. 1958. № 8. P. 309–314.
9. Storder M., Stolzer M., Sobota H., Riedel V. Investigation of the valence band structure of thermoelectric  $(\text{Bi}_{1-x}\text{Sb}_x)_2\text{Te}_3$  // Phys. Stat. Sol. (b). 1988. №150. P. 165–176.

Статья поступила в редакцию 22.03.2012 г.

ББК В 183.3  
УДК 519.83

*Юлия Сергеевна Токарева,  
кандидат физико-математических наук,  
Забайкальский государственный гуманитарно-педагогический университет  
им. Н. Г. Чернышевского (Чита, Россия), e-mail: jtokareva2@mail.ru*

### **Оценивание параметров арбитражной процедуры с неполной информацией<sup>1</sup>**

В данной работе исследована модель переговоров двух лиц с неполной информацией. Игроки – работодатель и профсоюз – для разрешения конфликта обращаются к арбитражному комитету. Полагая, что в игре с нулевой суммой игрокам неизвестны или частично известны параметры распределений мнений членов комитета, найдена оценка размера интервала, определяемого оптимальными стратегиями игроков. Рассмотрен случай нечетного числа членов комитета, мнения которых имеют нормальное распределение с известным математическим ожиданием и неизвестным средним квадратическим отклонением, которое в свою очередь моделируется случайной величиной. Для этого случая приведены значения оценки размера интервала между оптимальными стратегиями игроков. Данные значения могут быть использованы для определения минимального количества членов арбитражного комитета, необходимого для выполнения определенных условий.

*Ключевые слова:* игра с нулевой суммой, переговоры, неполная информация, арбитражный комитет

*Yulia Sergeevna Tokareva,  
Candidate of Physics and Mathematics,  
Zabaikalsky State Humanitarian Pedagogical University  
named after N. G. Chernyshevsky (Chita, Russia), e-mail: jtokareva2@mail.ru*

### **Estimating the Parameters of the Arbitration Procedure with Incomplete Information**

The paper considers the bargaining model of two persons with incomplete information. The players – a manager and a Labor Union representative – address the arbitration committee to resolve the conflict. Supposing that in a zero-sum game the players do not know or know partially the parameters of the distributions of the committee members' opinions, the article assesses the interval size defined by the optimum players' strategies. It considers a case with an odd number of committee members whose opinions have a normal distribution with a known mean value and an unknown standard square deviation that, in its turn, is modeled by a random variable. The article presents the size of the interval between the optimum players' strategies. These values can be used to define the minimum number of arbitration committee members to perform certain conditions.

*Keywords:* zero-sum game, negotiations, incomplete information, arbitration committee.

#### **Введение**

Теоретико-игровые модели переговоров с применением арбитражных схем часто используются при разрешении конфликтов в экономике, политике, спорте и т. д. Например, это может быть ситуация, когда работник и работодатель спорят о размере заработной платы. В случае, когда стороны не могут самостоятельно прийти к консенсусу, они обращаются к третьей независимой стороне – арбитру или нескольким арбитрам (арбитражному комитету). Считается, что арбитр справедлив к обоим игрокам и действует согласно своим этическим принципам.

Рассматривается игра с нулевой суммой. Два игрока – Профсоюз (игрок *I*) и Работодатель (игрок *II*) – ведут переговоры об увеличении заработной платы работников. Игрок *I* хочет максимизировать требуемое значение, а игрок *II* – минимизировать. Игроки одновременно называют

<sup>1</sup>Работа выполнена в рамках Государственного задания вузу Минобрнауки РФ, № 8.3641.2011.

свои предложения, характеризующиеся, соответственно, числами  $x \in R$  и  $y \in R$ . Если  $x \leq y$ , то игроки разрешают спор самостоятельно и соглашаются на значение  $\frac{x+y}{2}$ . В противном случае стороны обращаются к арбитражному комитету, состоящему из нескольких членов  $N$ .

Мнение каждого  $i$ -го члена комитета представляет собой случайную величину  $z_i$  с непрерывной функцией распределения  $F_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ). Предположим, что при выборе игрока-победителя комитет использует правило арбитражной процедуры по последнему предложению (final-offer arbitration procedure) [1; 3; 4; 6; 7]. Каждый член комитета, заслушав предложения игроков, выбирает то, которое оказывается ближе к его мнению. Выигрывает тот игрок, предложение которого оказалось ближе к мнениям большинства членов комитета.

В работе [8] рассмотрен подход к решению задачи с несколькими членами арбитражного комитета в игре с арбитром по последнему предложению, а в работе [2] – с его модификацией. В данных работах рассматривалась игра с полной информацией с нечетным числом членов комитета  $N = 2n - 1$ . В случае, когда медианы функций распределений мнений арбитров равны между собой, были получены оптимальные стратегии игроков вида

$$y^* = m - \Delta, \quad x^* = m + \Delta, \tag{1}$$

где

$$\Delta = \left[ \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-3} \sum_{i=1}^{2n-1} f_i(m) \right]^{-1},$$

$x^*$  – оптимальная стратегия игрока  $I$ ,  $y^*$  – оптимальная стратегия игрока  $II$ ,  $m$  – медиана каждого из распределений  $F_i$ ,  $f_i$  – плотности соответствующих распределений  $F_i$ .

В частности, если распределения мнений членов комитета представляют собой нормальные распределения с медианой  $m$  и различными среднеквадратическими отклонениями  $\sigma_i$  ( $i = \overline{1, N}$ ) при  $N = 2n - 1$ , то

$$\Delta = \frac{\sqrt{2\pi}}{8} \frac{1}{\binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \left(\frac{1}{\sigma_1} + \dots + \frac{1}{\sigma_N}\right)}. \tag{2}$$

Если мнения членов комитета имеют одинаковые распределения, то наилучшими предложениями игроков будут (1) при

$$\Delta = \left[ \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-3} n f(m) \right]^{-1}.$$

Отметим, что при увеличении числа членов комитета расстояние между оптимальными предложениями игроков уменьшается и при  $N \rightarrow \infty$  сходится к 0.

В работе [5] рассматривается арбитраж с частичной информацией, в котором игрокам неизвестны распределения арбитров, но известно окончательное решение членов арбитражного комитета. Игроки основываются на истории предшествующих  $k$  арбитражей. Предполагается, что мнения арбитров являются случайными величинами с распределением, зависящим от некоторого неизвестного параметра, и производится оценка этого параметра.

В данной работе рассматривается игра с нулевой суммой, в которой игрокам неизвестны или частично известны параметры распределений мнений  $N$  членов комитета с функциями распределениями  $F_1, \dots, F_N$ , и производится оценка размера интервала  $x^* - y^* = 2\Delta$ , определяемого оптимальными стратегиями игроков. Будем искать решение в данной арбитражной игре в терминах задачи о зарплате, однако этот подход может быть применен и для других задач распределения ресурсов с участием арбитра.

### Оценивание параметров

Предположим, что игрокам известно о том, что мнения арбитров имеют нормальное распределение с известным математическим ожиданием  $m$  и неизвестным среднеквадратическим отклонением  $\sigma_i$  ( $i = \overline{1, N}$ ). Рассмотрим случай нечетного количества членов арбитражного комитета, т. е.  $N = 2n - 1$ .

Пусть  $\sigma_1, \dots, \sigma_N$  - независимые одинаково распределенные случайные величины. Тогда, оценим интервал (2), определяемый оптимальными стратегиями

$$E\Delta_0 = E \left( \frac{1}{\frac{1}{\sigma_1} + \dots + \frac{1}{\sigma_N}} \right),$$



где  $E$  – математическое ожидание.

Имеет место равенство

$$E\left(\frac{1}{\eta}\right) = \int_0^{\infty} \varphi_{\eta}(\lambda) d\lambda,$$

где  $\varphi_{\eta}(\lambda) = E[\exp(-\lambda\eta)]$  преобразование Лапласа. В нашем случае

$$\eta = \eta_1 + \dots + \eta_N$$

и

$$\eta_1 = \frac{1}{\sigma_1}, \dots, \eta_N = \frac{1}{\sigma_N}$$

есть независимые одинаково распределенные случайные величины, отсюда

$$\varphi_{\eta_1+\dots+\eta_N}(\lambda) = \varphi_{\eta}^N(\lambda).$$

Следовательно,

$$E\left(\frac{1}{\frac{1}{\sigma_1} + \dots + \frac{1}{\sigma_N}}\right) = \int_0^{\infty} \varphi_{\eta}^N(\lambda) d\lambda.$$

Например, рассмотрим случай, когда  $\sigma_1, \dots, \sigma_N$  равномерно распределены на отрезке  $[0, 1]$ . Преобразование Лапласа имеет вид

$$\varphi_{\eta}(\lambda) = \int_0^1 e^{-\frac{\lambda}{u}} du,$$

тогда

$$E\Delta_0 = E\left[\frac{1}{\frac{1}{\sigma_1} + \dots + \frac{1}{\sigma_N}}\right] = \int_0^{\infty} \left(\int_0^1 e^{-\frac{\lambda}{u}} du\right)^N d\lambda.$$

Определим  $E\Delta_0$  для больших  $N$ . Заменяя аргумент  $s = \lambda/u$  получим

$$\int_0^1 e^{-\frac{\lambda}{u}} du = \int_{\lambda}^{\infty} e^{-s} \frac{\lambda}{s^2} ds.$$

Интегрируем по частям и получаем

$$\int_{\lambda}^{\infty} e^{-s} \frac{\lambda}{s^2} ds = e^{-\lambda} - \lambda \int_{\lambda}^{\infty} \frac{e^{-s}}{s} ds.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} E\Delta_0 &= \int_0^{\infty} \left(\int_0^1 e^{-\frac{\lambda}{u}} du\right)^N d\lambda = \int_0^{\infty} e^{-\lambda N} \left(1 - \lambda \int_{\lambda}^{\infty} \frac{e^{-(s-\lambda)} s}{d} ds\right)^N d\lambda \leq \\ &\int_0^{\infty} e^{-\lambda N} d\lambda = \frac{1}{N} = \frac{1}{2n-1}. \end{aligned}$$

Теперь мы можем оценить

$$E(x^* - y^*) = 2E\Delta = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \left( \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \right)^{-1} E\Delta_0.$$

Так как

$$\binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi n}},$$

то получаем оценку

$$E(x^* - y^*) \leq \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \frac{\sqrt{\pi n}}{2n-1} = \frac{\pi}{4} \frac{\sqrt{2n}}{2n-1} \leq \frac{\pi}{4} \frac{1}{\sqrt{N-1}}.$$

Таким образом, ожидаемый интервал между оптимальными предложениями оценивается как

$$\frac{\pi}{4} \frac{1}{\sqrt{N-1}} \approx 0.785/\sqrt{N-1}.$$

Допустим мы хотим определить достаточное количество членов арбитражного комитета, гарантирующее выполнение

$$E(x^* - y^*) \leq \epsilon. \quad (3)$$

Из (3) следует, что

$$N \geq 1 + \left(\frac{\pi}{4\epsilon}\right)^2.$$

В Таблице 1 приведены значения данной оценки для различных  $n$ .

Таблица 1

#### Ожидаемый интервал между оптимальными предложениями

$n$	2	3	4	5	6	7
$E(x^* - y^*)$	1,026	0,606	0,557	0,418	0,397	0,326
$n$	8	9	10	11	12	13
$E(x^* - y^*)$	0,314	0,271	0,263	0,233	0,228	0,206

Таким образом, можно оценить разброс между оптимальными предложениями конфликтующих сторон в зависимости от количества арбитров. Как видно из таблицы, при увеличении числа членов арбитражного комитета интервал между оптимальными стратегиями игроков уменьшается.

#### Заключение

Практическое значение результатов, полученных в работе, обусловлено тем, что в реальной жизни часто оказывается, что параметры распределения мнений членов арбитражного комитета неизвестны или частично известны. В этом случае, важное практическое значение имеет оценка размера интервала, определяемого оптимальными предложениями, найденная в работе. Отметим, что увеличение числа членов арбитражного комитета заставляет предложения игроков сходиться.

#### Список литературы

1. Менчер А. Э. Дискретная арбитражная процедура с неравномерным распределением вероятностей // Математическая теория игр и ее приложения. 2009. Т. 1. № 4. С. 78–92.
2. Токарева Ю. С. Модифицированная арбитражная процедура по последнему предложению с комитетом // Ученые записки Петрозаводского государственного университета. 2010. № 8. С. 89–92.
3. Chatterjee K. Comparison of arbitration procedures: Models with complete and incomplete information // IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics. 1981. Vol. 11. № 2. P. 101–109.
4. Farber H. An analysis of final-offer arbitration // Journal of conflict resolution. 1980. Vol. 24. № 4. P. 683–705.
5. Gerchak Y., Greenstein E., Weissman I. Estimating arbitrator's hidden judgement in final offer arbitration // Group Decision and Negotiation. 2004. Vol. 13. № 3. P. 291–298.
6. Gibbons R. A Primer in Game Theory. N.Y.: Prentice Hall, 1992. 273 p.
7. Kilgour D. M. Game-theoretic properties of final-offer arbitration // Group Decision and Negotiation. 1994. Vol. 285. № 3. P. 285–301.
8. Mazalov V., Tokareva J. Arbitration procedures with multiple arbitrators // European Journal of Operational Research. 2012. Vol. 217. № 1. P. 198–203 (doi: 10.1016/j.ejor.2011.09.014).

Статья поступила в редакцию 01.03.2012 г.

УДК 532.5  
ББК В253.31

**Владимир Александрович Толпаев,**  
доктор физико-математических наук, профессор,  
Северо-Кавказский научно-исследовательский проектный институт природных газов  
(Ставрополь, Россия), e-mail: v.a.tolpaev@mail.ru  
**Алексей Владимирович Колесников,**  
Северо-Кавказский научно-исследовательский проектный институт природных газов,  
(Ставрополь, Россия), e-mail: svnipigz@gazprom.ru

### Новый метод построения формул перехода для решения задач фильтрации в изотропных неоднородных пластах

Рассмотрено дивергентное уравнение на плоскости, описывающее фильтрацию жидкости в пластах с функциональной проницаемостью, зависящей от двух декартовых координат. Посредством подстановки Салехова уравнение сведено к уравнению Гельмгольца с функциональным множителем. Для определённого класса этого множителя выведены формулы, позволяющие выражать решение уравнения Гельмгольца через гармонические функции.

*Ключевые слова:* дивергентные уравнения, уравнение Гельмгольца, формулы перехода, фильтрация в неоднородных пластах.

**Vladimir Aleksandrovich Tolpaev,**  
Doctor of Physics and Mathematics, Professor,  
North-Caucasian Scientific Research Project Institute of Natural Gases,  
(Stavropol, Russia), e-mail: v.a.tolpaev@mail.ru  
**Aleksey Vladimirovich Kolesnikov,**  
North-Caucasian Scientific Research Project Institute of Natural Gases,  
(Stavropol, Russia), e-mail: svnipigz@gazprom.ru

### A New Method of Constructing Transition Formulas for the Solution of Filtration Problems in Isotropic Inhomogeneous Layers

The paper considers the divergence equation on the plane that describes the filtration of fluids in reservoirs with functional permeability, which depends on two Cartesian coordinates. Through the substitution Salekhova equation is reduced to the Helmholtz equation with a functional factor. For a certain class of this factor, some formulas are derived to express the solution of the Helmholtz equation in terms of harmonic functions.

*Keywords:* divergence equations, Helmholtz equation, transition formulas, filtration of fluids in inhomogeneous layers.

Линейная плоскопараллельная фильтрация несжимаемой жидкости в изотропных неоднородных средах с проницаемостью

$$k(x, y) = k_0 p(x, y) \quad (1)$$

в декартовой системе координат  $x, y$  описывается решениями эллиптического уравнения [4]

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ p(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ p(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] = 0. \quad (2)$$

В уравнении (2)  $\varphi(x, y) = -k_0 [P(x, y) - P_0] / \mu$  – потенциал скорости фильтрации,  $k_0 = k(0, 0)$  – значение проницаемости в зафиксированной точке (в начале координат) пористой среды,  $P(x, y)$  – приведённое давление [1],  $P_0$  – произвольная постоянная с размерностью давления,  $\mu$  – коэффициент динамической вязкости фильтрующейся жидкости. Зафиксированная проницаемость  $k_0$  на положительную непрерывную безразмерную функцию  $p(x, y)$  в начале координат накладывает условие  $p(0, 0) = 1$ .

Как известно, с помощью подстановки Салехова Г. С. [5]

$$\varphi(x, y) = \frac{\Phi(x, y)}{\sqrt{p(x, y)}} \quad (3)$$

интегрирование уравнения (2) можно свести к интегрированию уравнения Гельмгольца

$$L[\Phi(x, y)] \equiv \Delta\Phi(x, y) - M(x, y)\Phi(x, y) = 0, \quad (4)$$

где  $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$  – оператор Лапласа, а множитель  $M(x, y)$  находится по известной функции  $p(x, y)$  по формуле

$$M(x, y) = \frac{\Delta\sqrt{p(x, y)}}{\sqrt{p(x, y)}}. \quad (5)$$

Например, в **1-ом случае**, когда  $p(x, y) = U^2(x, y)$ , где  $U(x, y)$  – произвольная гармоническая функция,  $\Delta\sqrt{p(x, y)} = \Delta U(x, y) = 0$ , множитель  $M(x, y) = 0$ . Следовательно, согласно (3) и (4), решения краевых задач фильтрации в огромной серии изотропных неоднородных сред  $M(x, y) = 0$  будут сводиться к краевым задачам для уравнения Лапласа  $\Delta\Phi(x, y) = 0$ . Решению задач фильтрации в изотропных неоднородных средах серии  $M(x, y) = 0$  посвящено большое число работ [1–5].

Укажем новый, **2-ой случай**, когда решения задач теории фильтрации в широкой серии изотропных неоднородных сред выражаются через решения классического уравнения Лапласа. Пусть множитель  $M(x, y)$  является некоторой заданной функцией лишь одной переменной, например, для конкретности, пусть  $M = M(x)$ . Возможные функции  $p(x, y)$ , описывающие переменную проницаемость и соответствующие заданному коэффициенту  $M(x)$ , найдутся как частные решения уравнения (5).

Решение уравнения (4) для случая  $M = M(x)$  будем строить в виде ряда

$$\Phi(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x)U_k(x, y), \quad (6)$$

в котором  $a_k(x)$  и  $U_k(x, y)$  – некоторые пока произвольные функции. После подстановки (6) в (4) придем к выражению

$$L[\Phi(x, y)] = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ a_k(x)\Delta U_k(x, y) + 2a'_k(x)\frac{\partial U_k}{\partial x} + [a''_k(x) - M(x)a_k(x)]U_k(x, y) \right\} = 0. \quad (7)$$

Наложим теперь ряд ограничений на выбор функций  $a_k(x)$  и  $U_k(x, y)$ .

*Первое ограничение.* Пусть все функции  $U_k(x, y)$  будут гармоническими, т. е.  $\Delta U_k(x, y) = 0$ . Тогда (7) упрощается и принимает вид

$$L[\Phi(x, y)] = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ 2a'_k(x)\frac{\partial U_k}{\partial x} + [a''_k(x) - M(x)a_k(x)]U_k(x, y) \right\} = 0. \quad (8)$$

*Второе ограничение.* Пусть гармонические функции в последовательности  $U_k(x, y)$  связаны друг с другом рекуррентными соотношениями

$$\frac{\partial U_k}{\partial x} = U_{k+1}(x, y). \quad (9)$$

Обращаем внимание на то, что, как легко убедиться, производная  $\partial U_k/\partial x$  от гармонической функции  $U_k(x, y)$  снова будет гармонической функцией. При выполнении рекуррентных соотношений (9) равенство (8) примет вид:

$$L[\Phi(x, y)] = \sum_{k=0}^{\infty} \{2a'_k(x)U_{k+1}(x, y) + [a''_k(x) - M(x)a_k(x)]U_k(x, y)\} = 0. \quad (10)$$

Третье ограничение сделаем на переменные коэффициенты  $a_k(x)$ . Для того, чтобы при  $k = 0$  коэффициент перед  $U_0(x, y)$  обратился в нуль, потребуем, чтобы  $a''_0(x) - M(x)a_0(x) = 0$ . Кроме того, обратим в нуль множители перед всеми  $U_k(x, y)$ . В результате для  $a_k(x)$  получим систему рекуррентных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{cases} a''_0(x) - M(x)a_0(x) = 0 \\ \dots \\ a''_k(x) - M(x)a_k(x) + 2a'_{k-1}(x) = 0 \\ \dots \end{cases} \quad (11)$$

Таким образом, для представления решений уравнения Гельмгольца (4) через решения  $U_0(x, y)$  уравнения Лапласа  $\Delta U_0(x, y) = 0$  получено следующее выражение в виде ряда

$$\Phi(x, y) = a_0(x)U_0(x, y) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) \frac{\partial^k U_0(x, y)}{\partial x^k}, \quad (12)$$

которое получается из формул (6) и (9) с учетом очевидного равенства  $U_k(x, y) = \partial^k U_0(x, y) / \partial x^k$ . Последнее вытекает из рекуррентных формул (9).

Для применения представления (12) к решению краевых задач для уравнений (2) и (4) необходимо, чтобы функциональный ряд в области решения был равномерно и абсолютно сходящимся.

**3-й случай**, когда решения задач теории фильтрации в серии изотропных неоднородных сред выражаются через решения классического уравнения Лапласа, получается как следствие формулы (12).

Рассмотрим следующий простейший случай формулы (12), когда  $a_0(x) \neq 0$ ,  $a_1(x) = \text{const} = 1$ , а все другие коэффициенты  $a_k(x) \equiv 0$  при  $k = 2, 3, \dots$ . Формула (12) запишется в виде, который в соответствии со сложившейся традицией назовем формулой перехода

$$\Phi(x, y) = a_0(x)U_0(x, y) + \frac{\partial U_0(x, y)}{\partial x}, \quad (13)$$

а система уравнений (11) будет при этом выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} a''_0(x) - M(x)a_0(x) = 0 \\ M(x) + 2a'_0(x) = 0 \end{cases} \quad (14)$$

В получившейся системе уравнений (14) функция  $M = M(x)$  уже будет выступать не как заранее заданная, а наряду с функцией  $a_0(x)$  как неизвестная. После исключения  $M(x)$  относительно функции  $a_0(x)$  получаем дифференциальное уравнение

$$a''_0(x) + 2a_0(x)a'_0(x) = 0, \quad (15)$$

имеющее первый интеграл

$$a'_0(x) + a_0^2(x) = C_1, \quad (16)$$

где  $C_1$  – произвольная постоянная. В простейшем случае  $C_1 = 0$  находим, что

$$a_0(x) = \frac{1}{x+a}, \quad M(x) = \frac{a''_0(x)}{a_0(x)} = \frac{2}{(x+a)^2}, \quad (17)$$

где  $a$  – произвольная постоянная.

Итак, в итоге построена новая формула перехода

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{\sqrt{p(x, y)}} \left[ \frac{U_0(x, y)}{x+a} + \frac{\partial U_0(x, y)}{\partial x} \right], \quad (18)$$

позволяющая краевые задачи теории фильтрации в неоднородных средах с функцией проницаемости (1), принадлежащей классу частных решений уравнения

$$\Delta\sqrt{p(x,y)} - \frac{2\sqrt{p(x,y)}}{(x+a)^2} = 0, \quad (19)$$

сводит к краевым задачам классического в математической физике уравнения Лапласа  $\Delta U_0(x,y) = 0$ .

В заключение отметим, что по аналогии с формулой перехода (13) могут быть построены и более сложные формулы вида

$$\Phi(x,y) = a_0(x)U_0(x,y) + a_1(x)\frac{\partial U_0(x,y)}{\partial x} + a_2(x)\frac{\partial^2 U_0(x,y)}{\partial x^2} + \dots + \frac{\partial^n U_0(x,y)}{\partial x^n},$$

позволяющие значительно расширить круг применений уравнения Лапласа к задачам теории фильтрации в изотропных неоднородных средах.

#### *Список литературы*

1. Гладышев Ю. А. О методе перехода при решении задач фильтрации в пластах с переменными по простиранию мощностью и проницаемостью // Гидромеханика. Вып. 3. Сборник трудов МОПИ им. Н. К. Крупской. М.? 1974. С. 217–221.
2. Голубев Г. В., Тумашев Г. Г. Фильтрация несжимаемой жидкости в неоднородной пористой среде. Казань: Изд-во Казан. ун-та. 1972. 195 с.
3. Голубева О. В. Формулы перехода // Труды кафедры теоретической и экспериментальной физики. Калининградский государственный университет. Калининград, 1969. С. 31–34.
4. Голубева О. В. Курс механики сплошных сред. М.: Высшая школа, 1972. 368 с.
5. Салехов Г. С. К определению функции давления в неоднородных пластах нефтяных месторождений // ДАН СССР. Т. 105. № 6. 1955.

Статья поступила в редакцию 29.01.2012 г.

УДК 519.83  
ББК 22.1

*Людмила Ивановна Трухина,*  
аспирант,  
Читинский институт Байкальского государственного университета  
экономики и права  
(Чита, Россия), e-mail: lit-79@mail.ru

### *Принцип дележа для коммуникационной игры*

Кооперативные игры с частичной кооперацией покрывают более широкий класс реальных ситуаций, чем классические модели кооперативных игр, где каждое подмножество множества игроков может сформировать коалицию. В данной работе рассмотрена игра с ограниченными возможностями кооперации, представленными ненаправленным коммуникационным графом. Для игры, в которой граф является деревом, построена характеристическая функция. Предложена процедура получения дележа и доказано, что полученный в результате делёж совпадает с вектором Майерсона. Показано, что полученные результаты могут быть использованы в игре с произвольным графом.

*Ключевые слова:* вектор Майерсона, коммуникационный граф, ограниченная игра, частичная кооперация.

*Ludmila Ivanovna Trukhina,*  
Graduate Student,  
Chita Institute of Baikal State University of Economy and Law  
(Chita, Russia), e-mail: lit-79@mail.ru

### *Allocation Principle for the Communication Game*

Cooperative games with partial cooperation cover a wider class of real situations than classical models of cooperative games where every subset of a set of players can form a coalition. This paper considers the game with limited cooperation possibilities represented by an undirected communication graph. For the game in which the graph is a tree, the characteristic function is constructed. The paper offers the procedure of allocation reception and proves that the received allocation coincides with Myerson vector. The obtained results can be used in the game with any graph.

*Keywords:* Myerson vector, communication graph, restricted game, partial cooperation.

### *Введение*

Ситуация, в которой любое подмножество множества  $N$  игроков может сформировать коалицию и сотрудничать, получая определённые выплаты, может быть описана кооперативной игрой с трансферабельной полезностью (ТУ-игрой). Однако, существует много реальных ситуаций, для которых требуется модель, принимающая во внимание ограничения в сотрудничестве. В этой статье мы рассматриваем ТУ-игру с ограниченной кооперацией, представленной ненаправленным коммуникационным графом, введённую Майерсоном [3]. Вершины графа представляют игроков, а рёбра представляют связи между игроками. Игроки могут взаимодействовать напрямую только если они связаны. Понятие «связи» при этом может интерпретироваться весьма широко: её наличие может обозначать передачу информации или ресурсов между игроками, отношения сотрудничества и дружбы, связь может быть транспортной или описывать взаимное влияние и подчинённость. Вершины могут быть отдельными людьми, организациями, странами или веб-страницами. Это приводит к так называемой коммуникационной (сетевой) игре, заданной тройкой, состоящей из конечного множества игроков, характеристической функции и графа.

### *Основные определения*

Пусть  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  множество игроков. Через  $2^N$  обозначим множество всех его подмножеств.

Кооперативной игрой  $n$  лиц будем называть пару  $\langle N; v \rangle$ , где  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  — множество игроков, а  $v: 2^N \rightarrow R$  отображение, предписывающее каждой коалиции  $S \in 2^N$  некоторое численное значение такое, что  $v(\emptyset) = 0$ . Функция  $v$  называется характеристической функцией кооперативной игры [1].

Неупорядоченный граф  $g = (N, E)$  состоит из множества вершин  $N$  и множества рёбер  $E$ . Рёбра представляют неупорядоченные пары вершин, которые мы будем обозначать  $ij$ , и  $ij \in E$  означает, что вершины  $i \in N$  и  $j \in N$  связаны в графе  $g$ .

Вершины графа идентифицируются с игроками, а ребро графа  $ij$  означает, что игроки  $i$  и  $j$  могут взаимодействовать напрямую, если и только если  $ij \in g$ .

Для графа  $g$  последовательность различных вершин  $\{i_1, \dots, i_k\}$ ,  $k \geq 2$  есть путь от  $i_1$  до  $i_k$ , если для всех  $h = 1, \dots, k - 1$ ,  $i_h i_{h+1} \in g$ . Длина пути  $l$  — число рёбер в нём,  $l = k - 1$ . Расстоянием между двумя вершинами является длина минимального пути между этими вершинами.

Граф  $g$  на множестве игроков  $N$  связный, если для любых двух вершин существует путь в  $g$  от одной вершины к другой.

Коалиция  $S$  связна, если любая пара игроков в  $S$  связана путём, состоящим только из игроков данной коалиции.

Связный компонент — максимальное связное подмножество.  $N|g$  означает множество всех связных компонент в  $g$ .

### Вектор Майерсона

Пусть дана кооперативная игра  $v$  с множеством игроков  $N$  и граф  $g$ , вершинами которого являются игроки. Для каждого игрока  $i$ , данного графа  $g$  и характеристической функции  $v$  вектор Майерсона  $Y_i(v, g)$  определяется следующими аксиомами:

**A1.** Если  $S$  связный компонент, то сумма выигрышей игроков коалиции  $S$  равна ценности всей коалиции, т.е.  $\forall S \in N|g$

$$\sum_{i \in S} Y_i(v, g) = v(S).$$

**A2.**  $\forall g, \forall ij \in g$  оба игрока одинаково получают выгоду или теряют от создания связи

$$Y_i(v, g) - Y_i(v, g - ij) = Y_j(v, g) - Y_j(v, g - ij).$$

Если для любой коалиции  $S$  определить характеристическую функцию как

$$v_g(S) = \sum_{T \in S|g} v(T),$$

то вектор Майерсона может быть вычислен по формуле

$$Y_i^{MV}(v, g) = \sum_{S \subset N \setminus \{i\}} (v_g(S \cup i) - v_g(S)) \frac{s!(n-s-1)!}{n!},$$

где  $s = |S|$ ,  $n = |N|$ .

### Характеристическая функция

Рассмотрим игру, в которой граф является деревом  $T$ , состоящим из  $n$  вершин, а характеристическая функция задаётся подобно схеме, предложенной Джексоном [2, с. 32]: за каждую прямую связь — путь длиной 1 — коалиция получает  $r$ , за каждый путь длиной 2 —  $r^2$ , за путь длиной 3 —  $r^3$  и т. д. Для любой коалиции  $S$  можно записать

$$v(S) = a_1 r + a_2 r^2 + \dots + a_k r^k + \dots + a_L r^L = \sum_{k=1}^L a_k r^k,$$

где  $L$  — максимальное расстояние между двумя вершинами в данной коалиции;  $a_k$  — число путей длины  $k$  в данной коалиции.

$$v(i) = 0, \forall i \in N.$$



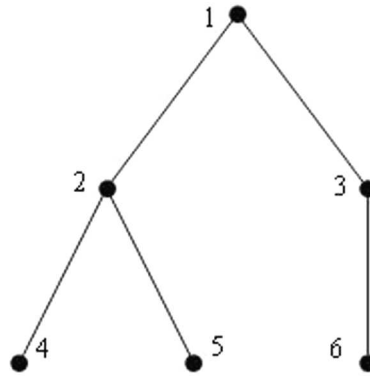


Рис. 1. Дерево

Пример 1.

Для дерева на рис. 1  $L = 4$ ,  $a_1 = 5$ ,  $a_2 = 5$ ,  $a_3 = 3$ ,  $a_4 = 2$ . Характеристическая функция для гранд-коалиции равна

$$v(N) = 5r + 5r^2 + 3r^3 + 2r^4.$$

Для коалиции  $S = \{1, 2, 4, 5\}$   $L = 2$ ,  $a_1 = 3$ ,  $a_2 = 3$  и характеристическая функция равна

$$v(S) = 3r + 3r^2.$$

### Принцип дележа

Опишем процедуру получения дележа для произвольного игрока  $i$ .

**Шаг 1.** Два напрямую связанных игрока получают  $r$ . По отдельности они не получают ничего, поэтому каждый из них вправе рассчитывать на половину, т.е. выигрыш составит  $\frac{r}{2}$ . Но если игрок участвует в нескольких таких связях, то он получит  $\frac{r}{2}$  от каждой. Значит, его выигрыш нужно умножить на количество путей длины 1, содержащих этого игрока.

**Шаг 2.** Чтобы получить  $r^2$  нужен путь из трёх игроков. Без любого из них коалиция заработает меньше, поэтому каждый из трёх должен получить  $\frac{r^2}{3}$  от всех путей длины 2, проходящих через него.

Рассуждая аналогичным образом и суммируя выигрыши каждого шага, получим делёж:

$$Y_i(v, g) = \frac{A_i(1)}{2}r + \frac{A_i(2)}{3}r^2 + \dots + \frac{A_i(L)}{L+1}r^L = \sum_{k=1}^L \frac{A_i(k)}{k+1}r^k,$$

где  $A_i(k)$  — число путей длины  $k$ , содержащих игрока  $i$ .

Пример 2.

Найдём выигрыш игрока 2 из примера 1. Перечислим все пути, содержащие игрока 2. Пути длиной 1:  $\{1, 2\}$ ,  $\{2, 4\}$ ,  $\{2, 5\}$ , т. е.  $A_2(1) = 3$ . Пути длиной 2:  $\{1, 2, 4\}$ ,  $\{1, 2, 5\}$ ,  $\{4, 2, 5\}$ ,  $\{2, 1, 3\}$ ,  $A_2(2) = 4$ . Пути длиной 3:  $\{3, 1, 2, 4\}$ ,  $\{3, 1, 2, 5\}$ ,  $\{2, 1, 3, 6\}$ ,  $A_2(3) = 3$ . Пути длиной 4:  $\{4, 2, 1, 3, 6\}$ ,  $\{5, 2, 1, 3, 6\}$ ,  $A_2(4) = 2$ . Тогда

$$Y_2 = \frac{3}{2}r + \frac{4}{3}r^2 + \frac{3}{4}r^3 + \frac{2}{5}r^4.$$

Покажем, что предложенный нами делёж удовлетворяет аксиомам A1 и A2, и, следовательно, является вектором Майерсона. Начнём с аксиомы A1.

$$\begin{aligned} \sum_{i \in S} Y_i(v, g) &= \sum_{i \in S} \left( \frac{A_i(1)}{2}r + \frac{A_i(2)}{3}r^2 + \dots + \frac{A_i(k)}{k+1}r^k + \dots + \frac{A_i(L)}{L+1}r^L \right) = \\ &= \frac{\sum_{i \in S} A_i(1)}{2}r + \frac{\sum_{i \in S} A_i(2)}{3}r^2 + \dots + \frac{\sum_{i \in S} A_i(k)}{k+1}r^k + \dots + \frac{\sum_{i \in S} A_i(L)}{L+1}r^L. \end{aligned}$$

Рассмотрим путь  $\{j, k\}$ . С одной стороны он является путём длины 1, содержащим игрока  $j$ , с другой стороны это путь длины 1, содержащий игрока  $k$ . То есть в сумме  $\sum_{i \in S} A_i(1)$  каждый путь подсчитан 2 раза. Аналогично в сумме  $\sum_{i \in S} A_i(2)$  каждый путь подсчитан 3 раза. И т. д. Тогда получим:

$$\frac{2a_1}{2}r + \frac{3a_2}{3}r^2 + \dots + \frac{(k+1)a_k}{k+1}r^k + \dots + \frac{(L+1)a_L}{L+1}r^L = a_1r + a_2r^2 + \dots + a_kr^k + \dots + a_Lr^L,$$

т. е.  $\forall S \in N |g \sum_{i \in S} Y_i(v, g) = v(S)$ .

Теперь покажем, что делёж удовлетворяет аксиоме A2.

Пусть  $L$  длина максимального пути в дереве  $T$  (рис. 2а). Тогда

$$Y_i(v, g) = \sum_{k=1}^L \frac{A_i(k)}{k+1} r^k,$$

$$Y_j(v, g) = \sum_{k=1}^L \frac{A_j(k)}{k+1} r^k.$$

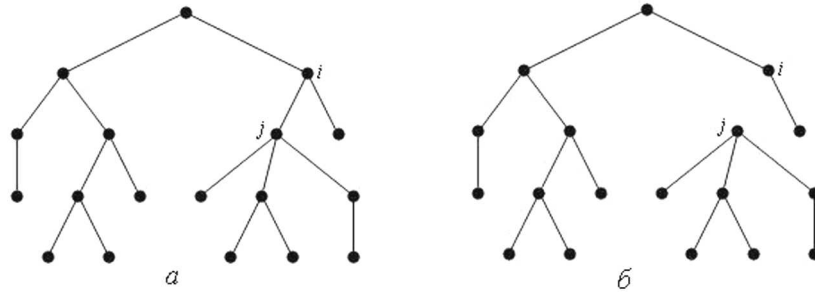


Рис. 2. а) дерево  $T$ ; б) дерево  $T - ij$

Если удалить связь между вершинами  $i$  и  $j$ , то получим дерево  $T - ij$ , состоящее из двух деревьев:  $T_1$  – дерево, содержащее игрока  $i$ ,  $T_2$  – дерево, содержащее игрока  $j$  (рис. 2б). Тогда

$$Y_i(v, g - ij) = \sum_{k=1}^{L_1} \frac{B_i(k)}{k+1} r^k,$$

где  $L_1$  – длина максимального пути в дереве  $T_1$ ,

$B_i(k)$  – число путей длины  $k$  в дереве  $T_1$ , содержащих игрока  $i$ .

$$Y_j(v, g - ij) = \sum_{k=1}^{L_2} \frac{C_j(k)}{k+1} r^k,$$

где  $L_2$  – длина максимального пути в дереве  $T_2$ ,

$C_j(k)$  – число путей длины  $k$  в дереве  $T_2$ , содержащих игрока  $j$ .

Для игрока  $i$  приращение выигрыша равно

$$\begin{aligned} Y_i(v, g) - Y_i(v, g - ij) &= \sum_{k=1}^L \frac{A_i(k)}{k+1} r^k - \sum_{k=1}^{L_1} \frac{B_i(k)}{k+1} r^k = \\ &= \sum_{k=1}^{L_1} \frac{A_i(k) - B_i(k)}{k+1} r^k + \sum_{k=L_1+1}^L \frac{A_i(k)}{k+1} r^k. \end{aligned}$$

Предположим, что  $L_1 > L_2$  и разобьём выражение на три части.

$$\sum_{k=1}^{L_2} \frac{A_i(k) - B_i(k)}{k+1} r^k + \sum_{k=L_2+1}^{L_1} \frac{A_i(k) - B_i(k)}{k+1} r^k + \sum_{k=L_1+1}^L \frac{A_i(k)}{k+1} r^k.$$

Представим  $A_i(k)$  в виде суммы

$$A_i(k) = A_i(k)_1 + A_i(k)_2,$$

где  $A_i(k)_1$  – число путей длины  $k$ , содержащих вершину  $i$  и проходящих через  $j$ ,  
 $A_i(k)_2$  – число путей длины  $k$ , содержащих вершину  $i$  и не проходящих через  $j$ .

Все пути, содержащие вершину  $i$ , но не содержащие  $j$ , принадлежат дереву  $T_1$ , следовательно  $A_i(k)_2 = B_i(k)$ . С учётом этого получим:

$$Y_i(v, g) - Y_i(v, g - ij) = \sum_{k=1}^{L_2} \frac{A_i(k)_1}{k+1} r^k + \sum_{k=L_2+1}^{L_1} \frac{A_i(k)_1}{k+1} r^k + \sum_{k=L_1+1}^L \frac{A_i(k)}{k+1} r^k.$$

Для игрока  $j$  приращение выигрыша равно

$$\begin{aligned} Y_j(v, g) - Y_j(v, g - ij) &= \sum_{k=1}^L \frac{A_j(k)}{k+1} r^k - \sum_{k=1}^{L_2} \frac{C_j(k)}{k+1} r^k = \\ &= \sum_{k=1}^{L_2} \frac{A_j(k) - C_j(k)}{k+1} r^k + \sum_{k=L_2+1}^L \frac{A_j(k)}{k+1} r^k. \end{aligned}$$

Это выражение также разобьём на три части.

$$\sum_{k=1}^{L_2} \frac{A_j(k) - C_j(k)}{k+1} r^k + \sum_{k=L_2+1}^{L_1} \frac{A_j(k)}{k+1} r^k + \sum_{k=L_1+1}^L \frac{A_j(k)}{k+1} r^k.$$

Представим  $A_j(k)$  в виде суммы

$$A_j(k) = A_j(k)_1 + A_j(k)_2,$$

где  $A_j(k)_1$  – число путей длины  $k$ , содержащих вершину  $j$  и проходящих через  $i$ ,  
 $A_j(k)_2$  – число путей длины  $k$ , содержащих вершину  $j$  и не проходящих через  $i$ .

Все пути, содержащие вершину  $j$ , но не содержащие  $i$ , принадлежат дереву  $T_2$ , следовательно  $A_j(k)_2 = C_j(k)$ . Учитывая это, получим

$$Y_j(v, g) - Y_j(v, g - ij) = \sum_{k=1}^{L_2} \frac{A_j(k)_1}{k+1} r^k + \sum_{k=L_2+1}^{L_1} \frac{A_j(k)}{k+1} r^k + \sum_{k=L_1+1}^L \frac{A_j(k)}{k+1} r^k.$$

Так как и  $A_i(k)_1$  и  $A_j(k)_1$  число путей, которые содержат пару  $i, j$ , то они равны, следовательно,  $\sum_{k=1}^{L_2} \frac{A_i(k)_1}{k+1} r^k = \sum_{k=1}^{L_2} \frac{A_j(k)_1}{k+1} r^k$ . Любые пути, содержащие игрока  $j$ , длиной больше  $L_2$  должны содержать игрока  $i$ , значит  $\sum_{k=L_2+1}^{L_1} \frac{A_i(k)_1}{k+1} r^k = \sum_{k=L_2+1}^{L_1} \frac{A_j(k)}{k+1} r^k$ . Любые пути, длиной больше  $L_1$  должны содержать и игрока  $i$  и игрока  $j$ , значит  $\sum_{k=L_1+1}^L \frac{A_i(k)}{k+1} r^k = \sum_{k=L_1+1}^L \frac{A_j(k)}{k+1} r^k$ . Отсюда следует, что

$$Y_i(v, g) - Y_i(v, g - ij) = Y_j(v, g) - Y_j(v, g - ij).$$

Для случая  $L_1 \leq L_2$ , рассуждения аналогичные.

### Общий случай

Рассмотрим игру с произвольным графом  $g$ , состоящим из  $n$  вершин. В отличие от дерева любые две вершины могут быть связаны несколькими путями разной длины. При построении характеристической функции будем учитывать только минимальные пути. А если две вершины связаны несколькими путями одинаковой длины, то учитываются все такие пути, при условии, что между ними нет другого меньшего пути. Например, для графа, изображённого на рис. 3, характеристическая функция для гранд-коалиции строится следующим образом. Пути длиной 1:  $\{1, 2\}$ ,  $\{1, 3\}$ ,  $\{2, 3\}$ ,  $\{2, 4\}$ ,  $\{3, 4\}$ , т. е.  $a_1 = 5$ . Пути длиной 2:  $\{1, 2, 4\}$ ,  $\{1, 3, 4\}$  связывают 1 и 4, так как между этими вершинами нет прямой связи, то считаем оба пути. Путь  $\{1, 2, 3\}$  не считаем, так как между

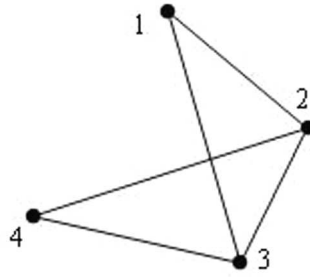


Рис. 3. Произвольный граф

1 и 3 есть прямая связь,  $\{2, 3, 4\}$  не считаем, так как 2 и 4 также связаны напрямую. Т. е.  $a_2 = 2$ . Путь  $\{1, 2, 3, 4\}$  не считаем, так как между 1 и 4 есть путь меньшей длины. Получим следующую характеристическую функцию.

$$v(N) = 5 \cdot r + 2 \cdot r^2.$$

Для любой коалиции  $S$  можно записать

$$v(S) = a_1 r + a_2 r^2 + \dots + a_k r^k + \dots + a_L r^L = \sum_{k=1}^L a_k r^k,$$

где  $L$  – максимальное расстояние между двумя вершинами в данной коалиции;  
 $a_k$  – число путей длины  $k$  в данной коалиции.

$$v(i) = 0, \forall i \in N.$$

Покажем, что и для данной игры описанный выше делёж является вектором Майерсона. Аксиома А1 доказывается также? как для дерева.

Аксиома А2.

Пусть граф  $h$  получается из графа  $g$  удалением связи  $ij$ , т.е.  $h = g - ij$ . Если после удаления ребра  $ij$  мы получим граф, состоящий из двух компонент (подграфов), то аксиома А2 доказывается аналогично. Если нет, то граф остаётся связным. Пусть длина максимального пути  $L$  не изменилась, тогда приращение выигрыша игрока  $i$  равно

$$Y_i(v, g) - Y_i(v, h) = \sum_{k=1}^L \frac{A_i(k)}{k+1} r^k - \sum_{k=1}^L \frac{B_i(k)}{k+1} r^k = \sum_{k=1}^L \frac{A_i(k) - B_i(k)}{k+1} r^k,$$

а приращение выигрыша игрока  $j$

$$Y_j(v, g) - Y_j(v, h) = \sum_{k=1}^L \frac{A_j(k)}{k+1} r^k - \sum_{k=1}^L \frac{B_j(k)}{k+1} r^k = \sum_{k=1}^L \frac{A_j(k) - B_j(k)}{k+1} r^k.$$

Если путь длины  $k$  проходил через ребро  $ij$ , то при удалении этого ребра число таких путей сократится одинаково и для  $i$  и для  $j$ . Но так как граф связный, то добавятся новые пути длиной больше  $k$ , соединяющие какие-либо две вершины (как минимум это маршруты, соединяющие вершины  $i$  и  $j$ ). Такие пути должны содержать обе вершины  $i$  и  $j$ , иначе они уже учтены в  $A_i(k)$  и  $A_j(k)$ . То есть число новых путей и у игрока  $i$  и у игрока  $j$  должно быть одинаковым. Из вышесказанного следует, что  $A_i(k) - B_i(k) = A_j(k) - B_j(k)$ . И окончательно

$$Y_i(v, g) - Y_i(v, h) = Y_j(v, g) - Y_j(v, h).$$

Если длина максимального пути уменьшилась или увеличилась, то рассуждения аналогичные.

Обе аксиомы выполняются, следовательно, предложенный делёж является вектором Майерсона и для игры с произвольным графом.

*Список литературы*

1. Мазалов В. В. Математическая теория игр и приложения: учеб. пособие. СПб.: Лань, 2010. 448 с.
2. Jackson M. O. Social and economic networks. Princeton University Press, 2008. 647 с.
3. Myerson R. B. Graphs and cooperation in games // Mathematics of Operations Research, 1977. № 2. С. 225–229.

**Статья поступила в редакцию 17.02.2012 г.**

УДК 519  
ББК В19

*Фу Цай Лю, Шу Энь Ван, Цзинь Мэй Доу,*

*кафедра автоматизации,*

*Главная Лаборатория компьютерного контроля промышленной инженерии провинции Хэбэй,*

*Яньшаньский университет (Циньхуандао, Китай), e-mail: shuenwang1968@263.net*

### **Усовершенствованный метод нечеткой идентификации на основе трансформации данных Бокса-Кокса**

Практическая проблема идентификации нечетких систем состоит в проектировании и настройке функций принадлежности. В отличие от традиционных подходов, которые используют оригинальные модели данных для построения нечеткой модели, подход, использующий технологию преобразования данных и эвристический метод, предлагается для упрощения процедуры моделирования. Для передаваемых данных, в первую очередь, начальное значение нечетких «если-то» правил с нефазивными синглтонами в последующих частях создается с помощью эвристического метода. Затем, осуществляется настройка с помощью алгоритма изучения градиентного снижения. Предлагаемый метод имеет большую точность аппроксимации и лучшую обобщаемость. Метод продемонстрирован на проблеме DISO, используя преобразования Бокса-Кокса.

*Ключевые слова:* идентификация нечетких систем, обработка данных, эвристический метод, метод градиентного снижения, преобразование Бокса-Кокса.

*Fu-Cai Liu, Shu-En Wang, Jin-Mei Dou*

*Department of Automation,*

*Key Lab of Industrial Computer Control Engineering of Hebei Province,*

*Yanshan University (Qinhuangdao, China), e-mail: shuenwang1968@263.net*

### **An Improved Fuzzy Identification Method Based on Box-Cox Data Transformation**

A practical problem in the identification of fuzzy systems from data is the design and the tuning of the membership functions. Unlike the traditional approaches that utilize original data patterns to construct the fuzzy model, an approach exploiting both data transformation techniques and heuristic method is proposed to simplify the modeling procedures. For the transferred data, firstly, the initial value of fuzzy if-then rules with nonfuzzy singletons in the consequent parts is generated by the heuristic method. Then, fine-tuning is done by gradient descent learning algorithm. The proposed method has better approximation accuracy and better generalization. The method is demonstrated on a DISO problem, using the Box-Cox transform.

*Keywords:* fuzzy systems identification; data processing; heuristic method; gradient descent method; Box-Cox transform.

### **Introduction**

Data transformation is that transforming the original data to the new data by some kind of computing. Data transformation can change the smoothness and comparability of the data, and selecting the appropriate data transformation can improve the smoothness of the sequence, then you can transform the incomparable data to comparable data [1]. Recently, data transformation technology is widely used. Paper [2] has studied in-depth for data transformation in the system theory. Starting from the mechanism of data transformation, the construction guidelines of data transformation is proposed. On the basis of the criteria, it constructs a new data transformation and the transformation is applied to the GM (1,1) model. The transformation has improved the prediction accuracy of GM (1,1), and it has a certain practicality. Paper [3] applies the matrix theory to the control process of electronic jacquard machine. It has simplified the development and maintenance of electronic jacquard machine control system, and makes it easy for the users to quickly change the weaving products. This method has solved the problems of dissatisfaction needle use of electronic jacquard machine and multiple data channels, and realized

the independent of control system and hardware system structure and loading made electronic jacquard machine. Paper [4] applies the data transformation technology to outlier detection. Firstly, it transformed nonlinear problem into a linear problem in high dimensional feature space, and then the non-linear data transformation is used for dimensionality reduction. Experiments show that this algorithm can be used not only to outlier detection of linear separable data sets, but also to outlier detection of linearly inseparable data sets, which improves the efficiency of outlier detection of high-dimensional data sets. Data transformation is also used for image enhancement processing and it can improve the understanding of remote sensing image and accuracy of information extraction and interpretation. In these data transformation methods, KL transformation[5], KT transformation, HIS transformation, Fourier transformation, wavelet transformation, multi-change detection transformation are widely used. Zeng Zhiyuan has proposed the LBV data transformation method[6] to highlight typical objects, such as vegetation, water bodies and bare surface, which provides convenience for information identification and extraction. Simultaneously, there is a logical relationship between the colors on the LBV color composite image and feature types, and accordingly we can accurately extract surface features. Application of LBV data transformation method can study the remote sensing images of coastal zone in classification, which can improve the classification accuracy of remote sensing images[7].

In this paper, the Box-Cox transformation method is proposed for fuzzy identification. Instead of following the traditional approaches which directly optimize the membership functions to meet a given sample data, this method directly transform the data to another, and the transformed data is similar to a Gaussian distribution. In this method, we can avoid the adjustment of membership function. The application of data transformation techniques and heuristic methods simplifies the process of data modeling. For the transformed data, firstly, the initial value of fuzzy if-then rules with nonfuzzy singletons (i.e., real numbers) in the consequent parts are generated by the heuristic method, then fine tuning is done by gradient descent learning algorithm. The advantage of proposed method is not only the more accurate approximation, but also the faster convergence speed. The method is demonstrated on a DISO problem, using the Box-Cox transform.

### 1. Description of the problem

Generally speaking, the identification of a fuzzy model includes the structure and parameter identifications [8]. In the structure identification, not only the system variables need to be chosen but also proper partitions of both input and output spaces are required. After identifying the structure of a fuzzy model, the parameter identification follows in order to adjust the membership functions and the parameters used in the fuzzy rules such that a more satisfactory performance can be obtained.

Depending on the types in the consequent parts, the fuzzy rules can be roughly classified into three different types, i. e., types 1–3 [2]. The following briefly reviews those three different types of fuzzy model, which are commonly used.

Type1:

$$\text{If } x_1 \text{ is } A_{i1} \text{ and } x_2 \text{ is } A_{i2} \text{ and } \dots \text{ and } x_n \text{ is } A_{in} \text{ then } y_i \text{ is } b_i \quad (1)$$

Where  $b_i$ 's are singletons. For the type1 fuzzy model, the inferred output can be calculated as follows:

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^c w_i b_i}{\sum_{i=1}^c w_i} \quad (2)$$

Where  $w_i$  is the firing degree of the antecedent part in the  $i$ th rule and  $c$  is the number of rules. Assume that the product operation is used, then

$$w_i = \prod_{j=1}^r A_{ij}(x_j) = A_{i1}(x_1) \times A_{i2}(x_2) \times \dots \times A_{ir}(x_r) \quad (3)$$

Where  $A_{ij}(x_i)$  represents the membership degree for the data  $X_j$  on fuzzy set  $A_{ij}$ .

Type 1 are applied widely because of it is simple and easy to be transferred into fuzzy rules described by linguistic information [9–10].

Since the roughly designed membership function or rule bases may not satisfy our control or identification purpose, a tuning scheme must be succeeded into adjusting the fuzzy model. Before

proceeding to the tuning job, we usually rely on a cost function to evaluate the identified fuzzy models. Define the error function for a given pattern as follows:

$$E = \frac{1}{2} (y_c - y_d)^2 \tag{4}$$

Where  $y_d$  denotes the desired output. Based on the defined error function, we can use genetic algorithms or some other approaches to adjusting the related parameters that show some degrees of effect to the system performance. Despite the initial setting problem, the gradient descent method is a strong candidate for type 1 fuzzy model.

Although a fuzzy model can be directly built from the numerical data, preprocessing the original data may be beneficial to the determination of the membership functions [9]. The paper focuses on presenting a method to improve the quality of fuzzy models based on type 1 model. Here, the statistical aspects of the transform are considered, rather than the function approximation aspects. Since fuzzy models are user oriented, the specific transform used will depend on the type of the application. The identification process will be performed on the transformed data, for a standard family of membership functions that have a good accuracy-complexity tradeoff. An inverse transformation will be used to test the final quality of the resulting fuzzy model [11].

## 2. The heuristic method and gradient descent method for the transformed models

### 2.1. Heuristic method

Let us assume that  $m$  input-output pairs  $(x_p, y_p)$ ,  $p = 1, 2, \dots, m$  are given. Our problem is to determine the value of  $b_i$  of each fuzzy if-then rule in (1) from the training data  $(x_p, y_p)$ . For this problem, we propose the following heuristic method:

$$B_i^{HM} = \sum_{p=1}^m w_i(x_p) y_p / \sum_{p=1}^m w_i(x_p), i = 1, 2, \dots, c \tag{5}$$

Where  $B_i^{HM}$  is the average of  $y_p$  weighted by  $w_i(x_p)$ .

The excellence of heuristic method is its simple. Ref. [12] has proved heuristic method apply to practical problem with noise.

### 2.2. Learning method

To fit the control or identification requirement, the roughly identified fuzzy model must be further optimized. If available computation time is enough, learning method may generate fuzzy if-then rules with better performance than heuristic method. Type 1 model's conclusion part,  $b_i$  can be modified by the following form:

$$\begin{aligned} b_i(t+1) &= b_i(t) + \beta(-\partial E / \partial b_i) = \\ &= b_i(t) - \beta_b (y_c - y_d) w_i / \sum_{i=1}^R w_i, i = 1, 2, \dots, c \end{aligned} \tag{6}$$

Where  $\beta_b$  is the learning rate,  $b_i(0) = B_i^{HM}$ .

### 2.3. Data transformation

The Box-Cox transformation is widely used to transform hydrological data to make it approximately Gaussian.

$$h(y, \lambda \equiv y^{(\lambda)}) = \begin{cases} \frac{y^\lambda - 1}{\lambda}, & \lambda \neq 0, \\ y > 0 \\ \log_e y, & \lambda = 0, \end{cases} \tag{7}$$

Since  $\lambda$  itself is unknown, it has to be estimated as  $\hat{\lambda}$ , the value that minimizes the mean square error of the fit between the transformed data and its fuzzy model. In applications, to simplify the optimization procedure, rather than finding  $\hat{\lambda}$ . The set of "preferred" values for the Box-Cox transformation is taken as -1, -1/2, 0, 1/2, 1.



### 3. Simulation examples

To verify the effectiveness of the proposed model and to compare ours with previous simulation result, 50 data derived from the following equation and depicted by Sugeno and Yasukawa (1993) are used:

$$y = \left(1 + x_1^{-2} + x_2^{-1.5}\right)^2, \quad 1 \leq x_1, \quad x_2 \leq 5 \quad (8)$$

The first step in establishing our fuzzy models is to define the premise parameters. Here we adopt Gauss- shaped membership.

$$\mu_{A_{ij}}(x_j) = \exp\left(- (x_j - c_{ij})^2 / 2\sigma_{ij}^2\right) \quad (9)$$

Where  $C_{ij}$  and  $\sigma_{ij}$  are centers and crossover slope, respectively. Usually  $c_{ij}$  can get from FCM. Here, in order to avoid recursive process to find the cluster center, the equalized universe method (EUM) are adopt [13].

The most direct way to initialize the parameters of membership functions is to equally partition the input space into grid types with chosen number of clusters and each grid representing a fuzzy if-then rule. The initial parameters of MFs are set in such a way that the centers of MFs are equally spaced along the range of the data dimension. The equalized universe method is described briefly in the following. Given MFs (or clusters), the cluster center and crossover slope of membership functions are determined as

$$C_{ij} = M_j^- + \frac{M_j^+ - M_j^-}{c - 1} (i - 1)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{M_j^+ - M_j^-}{s(c - 1)}, \quad 1 \leq j \leq 1, \quad 1 \leq i \leq c \quad (10)$$

Where  $M_j^-$  and  $M_j^+$  are the minimum and maximum values of the universe. The crossover slop of MF is chosen such that the adjacent membership functions are overlapped approximately 25 %. EUM is simple and effective if the data sets are uniformly sampled. Unfortunately, there is not a prior knowledge about the distributions of data for most cases. Another problem of such kind of partition is that the number of fuzzy rules increases exponentially as the dimensions of the input space increase.

In computer simulation, the training set was transformed with five  $\lambda$  values of the Box-Cox transform. EUM is used to decide the transferred fuzzy sets. The conclusion parameters were calculated by heuristic method and gradient descent method. Here, learning speed is  $\gamma_w = 0.1$  , and steps is 300.

### 4. Simulation results and analyses

#### 4.1. Training performance

Fig. 1 and Fig. 2 present the MSE for original data and transferred data of five models respectively. Each of models' conclusion parameters is identified by heuristic method and gradient descent method. Fig. 3 shows the fuzzy sets used and their inverse transform. Fig. 4 shows the simulation result from the transformed data using heuristic method, and Fig.5 using gradient descent method. Where  $c = 6$ ,  $\lambda = -1$ . In which solid line is actual output and dashed line is model's output.

From Fig. 1 and Fig. 2, we can conclude:

- (1) In two methods, the conformity become better with the  $c$  increase.
- (2) After transformation, the train performance of the model is improved obviously, and the conform ability for gradient descent method is better than the heuristic method.
- (3) In Box-Cox transform, transform  $\lambda = -1$  is the best. In other words, the little the effectively compress domain for the transferred data the higher of the model precision.

As we can see from Fig. 1 and Fig. 2, the value  $\lambda = -1$  turned out to be significantly larger to the affection of the model performance than the next value. Since the domains of the fuzzy sets is designed rather arbitrarily, we cannot really conclude which transformation is best. Look for the Fig. 4 and Fig. 5; the difference is very small if any. While in both case, further tuning of the fuzzy sets is possible, the potential improvement is indicated to be small.

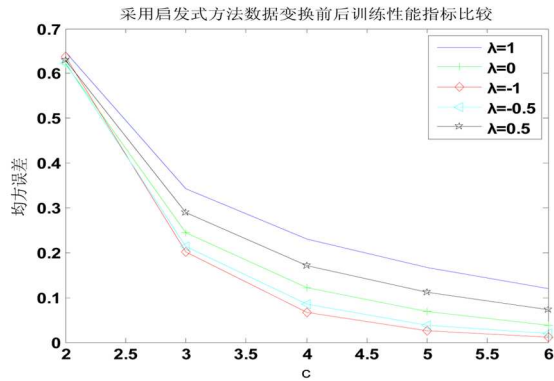


Fig. 1. The comparison of simulation results before and after the data transformation using heuristic method

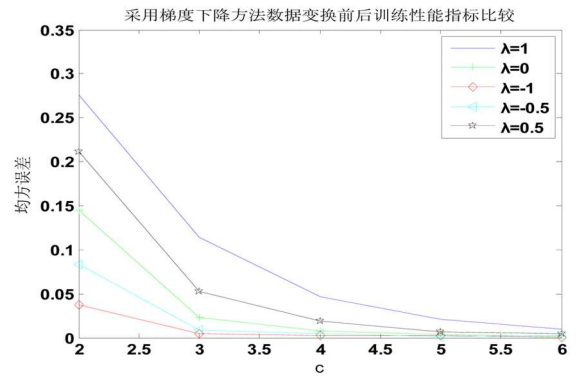
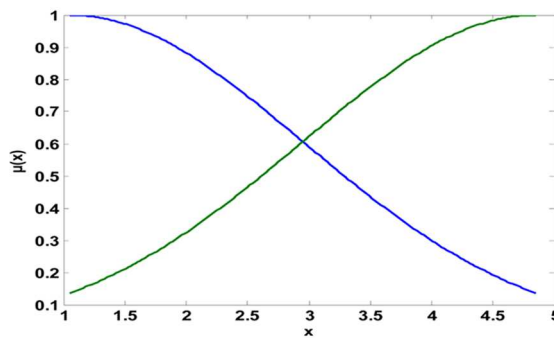
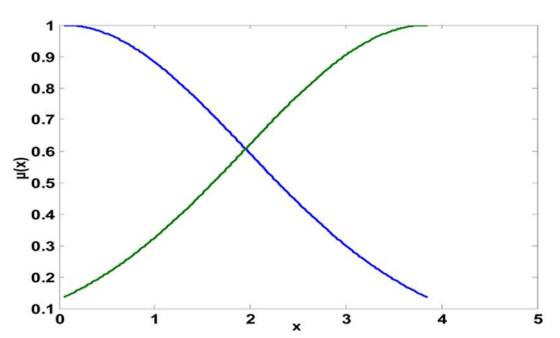


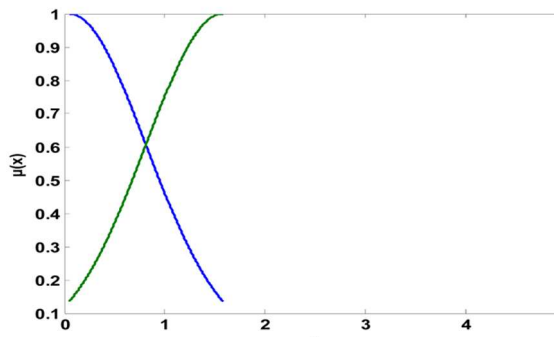
Fig. 2. The comparison of simulation results before and after the data transformation using heuristic method



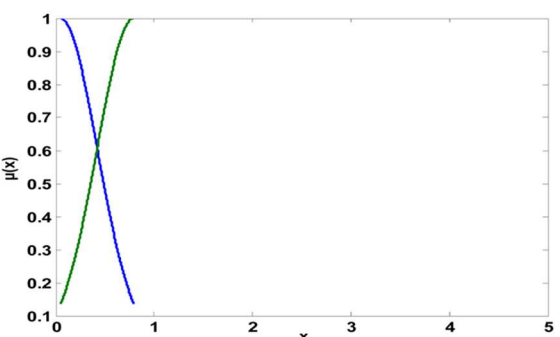
a) Original axis



b) Linear transformation  $\lambda = 1$



c) Linear transformation  $\lambda = 0$



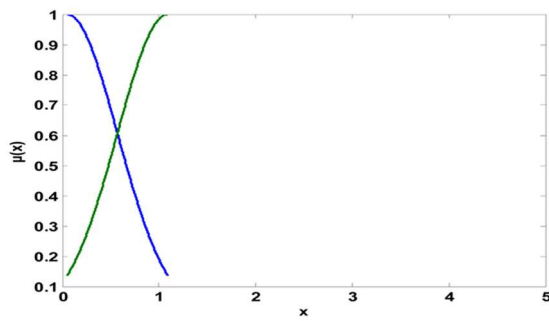
d) Log transformation axis  $\lambda = -1$

#### 4.2. Generalized ability of the test data

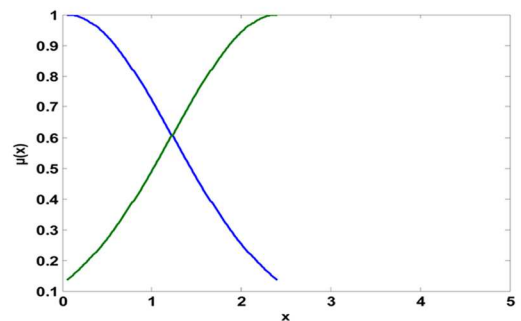
To illustrate the generalization of the proposed method, we use 50 data sampled from Eq. (8) to be our training patterns. Fig. 6 and Fig. 7 present the comparison of test results before and after the data transformation for the five models respectively. Each of models' conclusion parameters are also identified by heuristic method and gradient descent method. Fig.8 shows the test result from the transformed data using heuristic method, and Fig.9 using gradient descent method. Where  $c = 6$ ,  $\lambda = -1$ . In which solid line is actual output and dashed line is model output.

Form Fig. 6 and Fig. 7, we can conclude:

- (1)The test performance of the fuzzy model based on data transform and gradient descent method to the value is sensitive to the model based on heuristic method.
- (2)After transformation, the test performance of the model is improved obviously, and the conform ability for gradient descent method is better than the heuristic method.



e) Transform with  $\lambda = -1/2$



f) Transform with  $\lambda = 1/2$

Fig. 3. The fuzzy sets used and their inverse transform

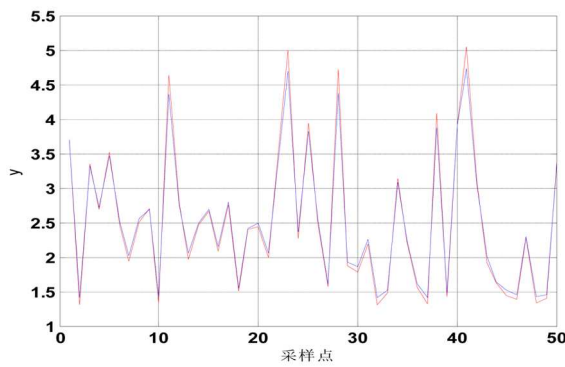


Fig. 4. Simulation results from the Transformed data using heuristic method ( $\lambda = -1$ ,  $MSE = 0.0119$ )

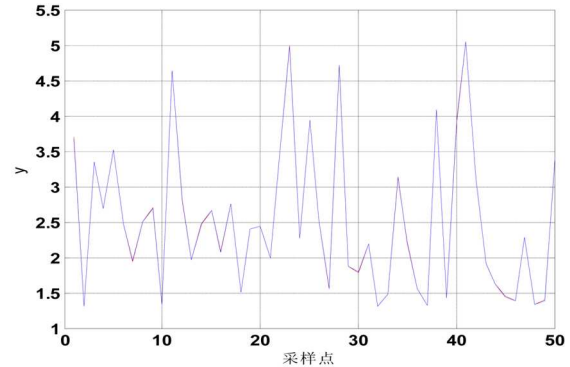


Fig. 5. Simulation results from the transformed data using gradient descent method ( $\lambda = -1$ ,  $MSE = 0.0008$ )

(3) With the increase of value, the generalized ability become worse when we use the gradient descent method.

Note that the Box-Cox transform is defined only for  $y > 0$ . The data has to be translated, or other transformation has to be used in case this condition is not met.

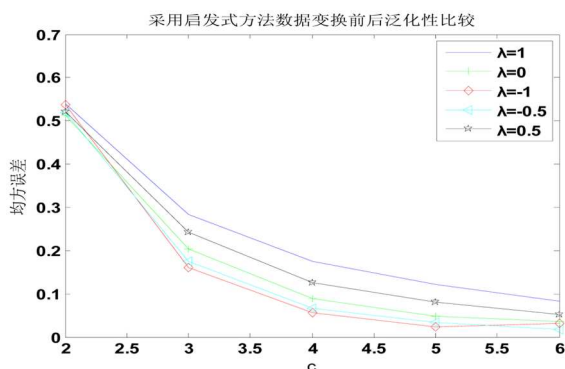


Fig. 6. The comparison of test results before and after the data transformation using heuristic method

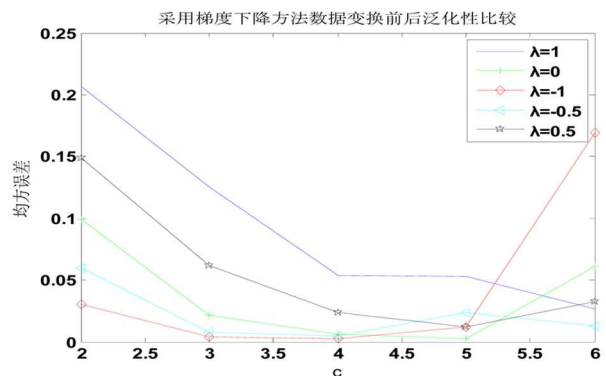
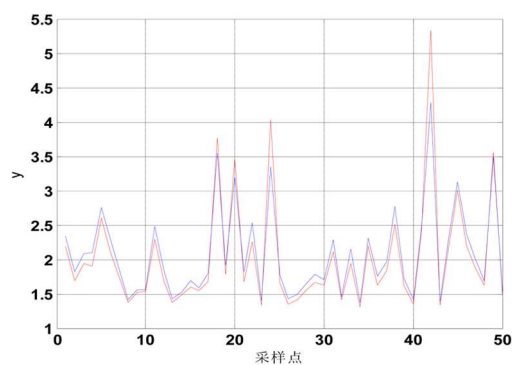


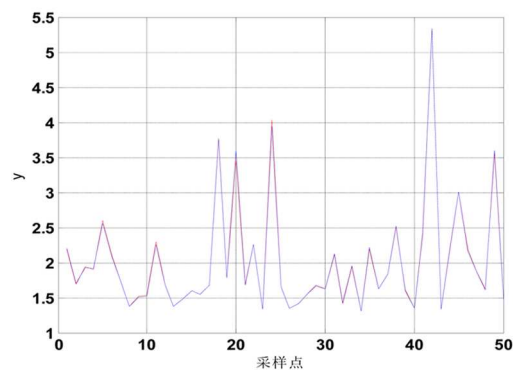
Fig. 7. The comparison of test results before and after the data transformation using gradient descent method

### 5. Conclusions

A practical problem in the modeling of fuzzy systems from data, is the design and the tuning of the membership functions. Instead of following the traditional approaches which utilize original data patterns



**Fig. 8.** The Test results from the Transformed data using heuristic method ( $\lambda = 0, c = 5, MSE = 0.0485$ )



**Fig. 9.** The test results from the Transformed data using gradient descent method ( $\lambda = 0, c = 5, MSE = 0.0025$ )

to construct the fuzzy model, this paper proposed a methods to improve the fuzzy system performance by using heuristic method and data transformation technique. The improved fuzzy modeling method based on Box-Cox transformation. The transformation method allows us to map the original data to other domains so without adjusting membership functions and the fuzzification is simply since the membership functions is fixed. For the transformed data, firstly, the initial value of fuzzy if-then rules with nonfuzzy singletons (i. e., real numbers) in the consequent parts are generated by the heuristic method, then fine tuning is done by gradient descent learning algorithm. The advantage of proposed method is not only the more accurate approximation, but also the faster convergence speed. Simulation results show the effectivity of the proposed method.

### References

1. Liu Sifeng, Dang Yaoguo, Fang Zhigeng. Grey system theory and its applications [M]. Beijing: Science Press, 2004 (in Chinese).
2. Qian Wuyong, Dang Yaoguo. New type of data transformation and its application in GM (1,1) model [J]. Systems Engineering and Electronics, 2009, 31(12). P. 2879–2908 (in Chinese).
3. Shen Wei, Hu Hongbo, Yuan Yanhong, Data transform control of electronic jacquard [J]. Journal of Textile Research, 2010, 31(6). P. 125–128 (in Chinese).
4. Xu Xuesong, Zhang Xu, Song Dongming, Zhang Hong, Liu Fengyu. Outliers detection algorithm based on nonlinear data transformation [J]. Engineering Science, 2008, 10(9). P. 74–78 (in Chinese).
5. BOYD R K. A comparison of the usefulness of canonical analysis, principal components analysis and band selection for extraction of features from TMs data for land cover analysis. Proceedings of the Seventeenth International Symposium on Remote Sensing of Environment [C], 1983. C. 1333–1342.
6. ZENG Z Y. A new method of data transformation for satellite images: I. Methodology and transformation equations for TM images [J]. Remote Sensing, 2007, 28(18). P. 4095–4124.
7. Zhang Chengwen, Ma Yi, Guo Liping. Research and Evaluation of Coastal Zone Multi-spectral Image Classification Based on LBV Transformation [J]. Geography and Geo-information Science, 2010, 26(4). P. 53–56 (in Chinese).
8. Takagi T., M. Sugeno. Fuzzy Identification of System and Its Application on Modeling and Control [C]. IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics, 1985, 15(1). P. 116–132.
9. Huang Y. P., Chen Y. R.. Preprocessing Data Patterns to Simplify the Identification of Fuzzy Models. International [J] Journal of Systems Science, 1999, 30(5). P. 479–489.
10. Huang Y. P., Chen Y. R., Chu H C. Identification a fuzzy model by using the bipartite membership functions [J]. Fussy Sets and Systems, 2001, 118(2). P. 199–214.

11. Shmilovici A., Martin J. A.. Improving Fuzzy Systems Identification with Date Transformations [J]. International Journal of Approximate Reasoning, 1999, (22) P. 93–107.
12. Ishibuchi H., Nozaki K., Tanaka H. Empirical Study on Learning in Fuzzy Systems by Rice Taste Analysis [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1994, 64(2). P. 129–144.
13. Chen M. SWang., S. W.. Fuzzy Clustering for Optimizing Fuzzy Membership Functions [J]. Fuzzy Sets and System, 1999, 103(2). P. 239–254.

**Статья поступила в редакцию 25.04.2012 г.**

УДК 534.1  
ББК В313

**Владимир Евгеньевич Холодовский,**  
кандидат физико-математических наук, доцент,  
Брянский государственный университет им. И. Г. Петровского  
(Брянск, Россия), e-mail: a-a-sidorov@yandex.ru  
**Александр Алексеевич Сидоров,**  
кандидат физико-математических наук, доцент,  
Брянский государственный университет им. И. Г. Петровского  
(Брянск, Россия), e-mail: a-a-sidorov@yandex.ru

### Поток энергии и сила реакции на излучение внутриатомного диполя

На основе уравнений Максвелла получена формула, выражающая энергию излучения подвижного диполя, и вычислена сила реакции на излучение диполя, размеры плеча которого сравнимы со среднеквадратичными смещениями атомов кристаллов.

*Ключевые слова:* уравнение Максвелла, поток вектора Умова-Пойтинга, диполь, энергия излучения, сила реакции на излучение.

**Vladimir Yevgenyevich Kholodovskii**  
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor,  
I.G. Petrovsky Bryansk State University,  
(Bryansk, Russia), e-mail: a-a-sidorov@yandex.ru  
**Alexander Alekseevich Sidorov**  
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor,  
I.G. Petrovsky Bryansk State University,  
(Bryansk, Russia), e-mail: a-a-sidorov@yandex.ru

### Energy Flow and Force Reaction to the Emission of the Intra-atomic Dipole

Based on Maxwell's equations, the article presents a formula expressing the radiation energy of the moving dipole, and the calculation of the force reaction to the dipole radiation whose shoulder size is comparable to the mean square displacement of atoms in the crystal.

*Keywords:* Maxwell's equations, flow of Umov-Poynting vector, dipole, radiation energy, strength of the reaction to radiation.

В настоящей работе получена формула, выражающая полную энергию излучения диполя за единицу времени через поверхность сферы, радиус которой существенно больше плеча диполя. На основе этой формулы найдено выражение для силы реакции внутриатомного диполя на собственное излучение. При этом под внутриатомным диполем понимается система из двух зарядов, один из которых несёт остов атома, а другой – центр заряда его внешней электронной оболочки. Следует отметить, что в современной литературе, например [1; 2], формула, выражающая энергию излучения диполя применима только для достаточно больших расстояний. В случае малых расстояний, например, при исследовании излучения внутриатомных диполей вещества такая формула не годится. В работе [3] показано, что при правильном учёте силы реакции на излучение внутриатомных диполей кубических кристаллов возможно построение динамической модели в адиабатическом приближении, дающей хорошее согласование с экспериментом. В работе [4] с учётом силы реакции внутриатомных диполей произведён расчёт тепловой энергии движения электронов и получена поправка на электронный вклад в теплоёмкость металлов, хорошо согласующаяся с экспериментальными данными.

Рассмотрим диполь, совершающий колебания вблизи своего положения равновесия. Обозначим через  $\mathbf{p}(t)$ ,  $\mathbf{p}'(t)$ ,  $\mathbf{p}''(t)$  соответственно плечо и его первую и вторую производные по времени, а через  $q$  – заряд диполя; тогда его момент будет равен  $q\mathbf{p}(t)$ . Пусть  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор точки наблюдения относительно положения равновесия диполя,  $r$  – его длина, а  $\mathbf{e} = \mathbf{r}/r$  – единичный направляющий вектор. Будем считать, что расстояние до точки наблюдения существенно больше возможных размеров плеча диполя.

Как следует из уравнений Максвелла, напряжённости электрического и магнитного полей диполя в точке наблюдения в момент времени  $t$  выражаются соответственно формулами:

$$\mathbf{E} = q \left( \frac{\mathbf{e}(\mathbf{e}\mathbf{p}'') - \mathbf{p}''}{c^2 r} + \frac{3\mathbf{e}(\mathbf{e}\mathbf{p}') - \mathbf{p}'}{cr^2} + \frac{3\mathbf{e}(\mathbf{e}\mathbf{p}) - \mathbf{p}}{r^3} \right), \quad (1)$$

$$\mathbf{H} = q \left( \frac{\mathbf{p}'' \times \mathbf{e}}{c^2 r} + \frac{\mathbf{p}' \times \mathbf{e}}{cr^2} \right), \quad (2)$$

где  $c$  – скорость света в вакууме, а  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{p}'$  и  $\mathbf{p}''$  вычисляются в момент времени  $t' = t - r/c$ . Как известно [1], поток энергии, излучаемой диполем в единицу времени через произвольную ориентированную поверхность, есть поток вектора Умова-Пойнтинга

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H}.$$

Следовательно, количество энергии, излучаемой диполем за единицу времени через сферу  $\sigma$  радиуса  $r$  в направлении внешней нормали равно:

$$W = \frac{c}{4\pi} \iint_{\sigma} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) d\sigma. \quad (3)$$

Вычисление вектора  $\mathbf{S}$  сводится к вычислению двойных векторных произведений, в которых первый множитель есть числитель одного из слагаемых формулы (1), а второй множитель – числитель одного из слагаемых формулы (2). Применяя к каждому из шести возможных произведений формулу двойного векторного произведения, приходим к равенствам:

$$(3\mathbf{e}(\mathbf{e}\mathbf{p}) - \mathbf{p}) \times (\dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{e}) = 2\mathbf{p}'(\mathbf{e}\mathbf{p}) - 3\mathbf{e}(\mathbf{e}\mathbf{p})(\mathbf{e}\mathbf{p}') + \mathbf{e}(\mathbf{p}\mathbf{p}'),$$

$$(3\mathbf{e}(\mathbf{e}\mathbf{p}') - \mathbf{p}') \times (\mathbf{p}' \times \mathbf{e}) + (3\mathbf{e}(\mathbf{e}\mathbf{p}) - \mathbf{p}) \times (\mathbf{p}'' \times \mathbf{e}) = \frac{\partial}{\partial t} (3\mathbf{e}(\mathbf{e}\mathbf{p}) - \mathbf{p}) \times (\mathbf{p}' \times \mathbf{e}),$$

$$(3\mathbf{e}(\mathbf{e}\mathbf{p}') - \mathbf{p}') \times (\mathbf{p}'' \times \mathbf{e}) + (\mathbf{e}(\mathbf{e}\mathbf{p}'') - \mathbf{p}'') \times (\mathbf{p}' \times \mathbf{e}) = 2\mathbf{p}''(\mathbf{e}\mathbf{p}') - 4\mathbf{e}(\mathbf{e}\mathbf{p}')(\mathbf{e}\mathbf{p}'') + 2\mathbf{e}(\mathbf{p}'\mathbf{p}''),$$

$$(\mathbf{e}(\mathbf{e}\mathbf{p}'') - \mathbf{p}'') \times (\mathbf{p}'' \times \mathbf{e}) = -\mathbf{e}(\mathbf{e}\mathbf{p}'')^2 + \mathbf{e}\mathbf{p}''^2.$$

Интегрируя правые части последних равенств, получим

$$\iint_{\sigma} [2\mathbf{p}'(\mathbf{e}\mathbf{p}) - 3\mathbf{e}(\mathbf{e}\mathbf{p})(\mathbf{e}\mathbf{p}') + \mathbf{e}(\mathbf{p}\mathbf{p}')] d\sigma = \frac{4\pi r^2}{3} (p^2)',$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_{\sigma} [(3\mathbf{e}(\mathbf{e}\mathbf{p}) - \mathbf{p}) \times (\mathbf{p}' \times \mathbf{e})] d\sigma = \frac{4\pi r^2}{3} (p^2)'',$$

$$\iint_{\sigma} [2\mathbf{p}''(\mathbf{e}\mathbf{p}') - 4\mathbf{e}(\mathbf{e}\mathbf{p}')(\mathbf{e}\mathbf{p}'') + 2\mathbf{e}(\mathbf{p}'\mathbf{p}'')] d\sigma = \frac{8\pi r^2}{3} (\mathbf{p}'^2)',$$

$$\iint_{\sigma} [-\mathbf{e}(\mathbf{e}\mathbf{p}'')^2 + \mathbf{e}\mathbf{p}''^2] d\sigma = \frac{8\pi r^2}{3} (\mathbf{p}''^2).$$

Таким образом, вычисление интеграла (3) приводит к формуле

$$W = q^2 \left[ \frac{2}{3c^3} (\mathbf{p}''^2) + \frac{2}{3c^2 r} (\mathbf{p}'^2)' + \frac{1}{3cr^2} (p^2)'' + \frac{1}{3r^3} (p^2)' \right]. \quad (4)$$

В научной литературе, посвященной подобным задачам, выражение для  $W$  содержит лишь первое слагаемое формулы (4). Очевидно, если радиус сферы, через которую вычисляется поток  $W$ , достаточно велик, то остальными тремя слагаемыми можно пренебречь. Если же речь идёт о внутриатомном диполе, одним полюсом которого является ионный остов атома, а другим – центр заряда его внешней электронной оболочки и при этом радиус сферы  $r$  сравним с радиусом атома, то

основной вклад в формуле (4) будет уже давать последнее слагаемое. Отметим, что в этом случае можно считать, что  $t' = t$ .

Действительно, оценим порядки слагаемых в (4), считая, что внутриатомный диполь колеблется по гармоническому закону

$$\mathbf{p} = \mathbf{v} \sin(\omega t + \varphi),$$

где  $\omega$  – частота,  $\varphi$  – начальная фаза, а  $\mathbf{v}$  – постоянный множитель, определяющий амплитуду и направление поляризации плеча диполя. Если считать, что внутриатомный диполь совершает тепловые колебания, то частота будет измеряться в терагерцах так, что  $\omega \approx 10^{12} \text{сек}^{-1}$ . Пусть радиус  $r$  сферы, через которую вычисляется поток, имеет порядок радиуса атома. Тогда  $r \approx 10^{-10} \text{м}$ , при этом плечо внутриатомного диполя, сравнимое со среднеквадратичным смещением атома, имеет порядок  $10^{-14} \text{м}$ , что существенно меньше  $r$ . Вычисляя порядки слагаемых, стоящих в скобке формулы (4), получаем

$$\frac{2}{3c^3}(\mathbf{p}'')^2 \approx \frac{2\omega^4}{3c^3}\nu^2 \approx 10^{23}\nu^2, \quad \frac{2}{3c^2r}(\mathbf{p}'^2)' \approx 10^{29}\nu^2, \quad \frac{1}{3cr^2}(p^2)'' \approx 10^{36}\nu^2, \\ \frac{1}{3r^3}(p^2)' \approx 10^{42}\nu^2.$$

Из приведенных оценок видно, что при рассматриваемых условиях подавляющий вклад в выражении (4) дает последнее слагаемое. Поэтому, при расчете излучения внутриатомного диполя можно считать, что

$$W = \frac{q^2}{3r^3}(p^2)' \quad (5)$$

Пользуясь формулой (5), вычислим силу  $\mathbf{F}_r$  реакции диполя на его излучение через поверхность сферы радиуса  $r$ . Найдем работу, совершаемую этой силой при движении плеча диполя по некоторому пути  $L$  за промежуток времени от  $t_0$  до  $t$ . Эта работа равна

$$\int_L \mathbf{F}_r(\mathbf{p})d\mathbf{p} = \int_{t_0}^t \mathbf{F}_r(\mathbf{p}(t))\mathbf{p}'(t)dt.$$

С другой стороны, энергия, теряемая диполем за счёт излучения через сферу радиуса  $r$  за тот же промежуток времени, равна

$$-\int_{t_0}^t W(t)dt = -\frac{2q^2}{3r^3} \int_{t_0}^t \mathbf{p}(t)\mathbf{p}'(t)dt.$$

Следовательно, справедливо равенство

$$\int_{t_0}^t \mathbf{F}_r(\mathbf{p}(t))\mathbf{p}'(t)dt = -\frac{2q^2}{3r^3} \int_{t_0}^t \mathbf{p}(t)\mathbf{p}'(t)dt.$$

Поскольку промежуток интегрирования выбирается произвольно, отсюда следует, что

$$\mathbf{F}_r = -\frac{2q^2}{3r^3}\mathbf{p}. \quad (6)$$

Для кристаллов величина  $r$ , вообще говоря, зависит от температуры и может быть вычислена из уравнения термодинамического равновесия [4].

### Список литературы

1. Измайлов С. В. Курс электродинамики. М.: Учпедгиз, 1962.
2. Тамм И. Е. Основы теории электричества. М.: Наука, 1976.
3. Холодовский В. Е., Мачихина И. О. Принцип длинных волн и дисперсионные соотношения для кубических решёток в модели диполь-дипольных взаимодействий // Известия Самарского научного центра РАН. 2009. Т. 11. № 5. С. 49–55.



4. Холодовский В. Е., Мачихина И. О., Кульченков Е. А. Поправка на электронный вклад в теплоёмкость металлов в модели Ван-дер-Ваальсовских взаимодействий // Вестник БГТУ. 2010. № 4. С. 115–123.

**Статья поступила в редакцию 28.01.2012 г.**

УДК 517.956  
ББК В143

*Святослав Евгеньевич Холодовский,*  
доктор физико-математических наук,  
Забайкальский государственный  
гуманитарно-педагогический университет им. Н. Г. Чернышевского  
(Чита, Россия), e-mail: hol47@yandex.ru

### О решении краевых задач в цилиндрах с многослойным пленочным включением<sup>1</sup>

Рассмотрены краевые задачи для линейных дифференциальных уравнений в кусочно-однородных цилиндрах, разделённых на два полуцилиндра многослойной плёнкой, состоящей из произвольного числа сильно и слабо проницаемых прослоек. Методом свертывания разложений Фурье решения задач выражены через решения классических задач в однородных цилиндрах без плёнки.

*Ключевые слова:* краевые задачи, дифференциальные уравнения, многослойные плёнки, трещины, завесы, метод свертывания разложений Фурье..

*Svyatoslav Yevgenyevich Kholodovskii,*  
Doctor of Physics and Mathematics,  
Zabaikalsky State Humanitarian Pedagogical University  
named after N. G. Chernyshevsky (Chita, Russia), e-mail: hol47@yandex.ru

### Solving Boundary Value Problems in Cylinders with Multilayer Film Inclusion

The article considers boundary value problems for linear differential equations in piecewise-homogeneous cylinders divided into two half-cylinders by multi-layer film consisting of an arbitrary number of strongly and weakly permeable layers. Using the method of convolution of Fourier expansions, task solutions are expressed in terms of solving classical problems in homogeneous cylinders without the film.

*Keywords:* boundary value problems, differential equations, multi-layer films, cracks, screens, method of convolution of Fourier expansions.

**1. Обобщённые условия сопряжения.** Рассмотрим в пространстве  $(x, y_1, \dots, y_m) \in R^{m+1}$  произвольную область  $D$ , разделённую гиперплоскостью  $x = 0$  на две зоны  $D_1(x < 0)$  и  $D_2(x > 0)$ . Пусть гиперплоскость  $x = 0$  является многослойной плёнкой, состоящей из взаимно параллельных, соприкасающихся сильно и слабо проницаемых прослоек – трещин и завес. Трещины и завесы будем моделировать бесконечно тонкими слоями с бесконечно большой для трещин и бесконечно малой для завес проницаемостью [6; 7]. Пусть потенциалы  $u_j(x, y)$  в соответствующей зоне  $D_j$  в окрестности гиперплоскости  $x = 0$  удовлетворяют уравнению

$$\partial_x^2 u_j + L[u_j] = 0, \quad (x, y) \in D_j, \quad j = 1, 2, \quad (1)$$

где  $y = (y_1, \dots, y_m)$ ,  $\partial_x^n = \partial^n / \partial x^n$ ,  $L$  – произвольный линейный дифференциальный оператор по переменным  $y_i$ , т. е. оператор  $L$  не содержит производных по  $x$  и коэффициенты при производных не зависят от  $x$ . Выведем по индукции условия сопряжения на данной многослойной плёнке  $x = 0$ . Для этого найдём приращения потенциала и нормальной скорости на сторонах плёнки  $x = \pm 0$ , при этом нормальную скорость в  $D_j$  рассмотрим в виде  $k_j \partial_x u_j$ , где постоянные  $k_j > 0$  характеризуют проницаемость области  $D_j$  по переменной  $x$ .

Пусть плёнка  $x = 0$  состоит из  $i$  примыкающих друг к другу трещин и завес в произвольном их сочетании. Рассмотрим обобщённые условия сопряжения на данной плёнке вида

$$x = 0: \quad u_2 - u_1 = F_i[u_1], \quad k_2 \partial_x u_2 - k_1 \partial_x u_1 = G_i[u_1], \quad (2)$$

<sup>1</sup>Работа выполнена в рамках Государственного задания вузу Минобрнауки РФ, № 1.3985.2011.

где  $F_i[u]$  и  $G_i[u]$  – линейные операторы с постоянными коэффициентами, подлежащие определению. В частности при отсутствии трещин и завес, т.е. при  $i = 0$ , полагаем  $F_0 = G_0 = 0$ , что соответствует идеальному контакту зон  $D_j$ , при этом условия (2) являются классическими условиями сопряжения.

Добавим к данной многослойной плёнке трещину или завесу  $x = +0$ , которую заменим слоем  $D_0(0 < x < l)$  проницаемости  $k_0$  при выполнении условий вида (2) при  $x = 0$  и классических условий сопряжения при  $x = l$ :

$$\begin{aligned} x = 0 : \quad u_0 - u_1 &= F_i[u_1], & k_0 \partial_x u_0 - k_1 \partial_x u_1 &= G_i[u_1], \\ x = l : \quad u_2 &= u_0, & k_2 \partial_x u_2 &= k_0 \partial_x u_0, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $u_j$  – потенциалы в  $D_j$ ,  $j = 0, 1, 2$ ,  $D_2(x > l)$ , при этом потенциал  $u_0(x, y)$  в  $D_0$  удовлетворяет уравнению (1). Отсюда приращения потенциала и нормальной скорости на  $\partial D_0$  с учётом теоремы о среднем примут соответственно вид

$$u_2|_{x=l} - u_1|_{x=0} = u_0|_{x=l} - u_0|_{x=0} + F_i[u_1]|_{x=0} = \frac{l}{k_0} k_0 \partial_x u_0|_{x=c_1} + F_i[u_1]|_{x=0}, \quad (4)$$

$$k_2 \partial_x u_2|_{x=l} - k_1 \partial_x u_1|_{x=0} = k_0 \partial_x u_0|_{x=l} - k_0 \partial_x u_0|_{x=0} + G_i[u_1]|_{x=0} = k_0 l \partial_x^2 u_0|_{x=c_2} + G_i[u_1]|_{x=0}, \quad (5)$$

где  $c_j \in (0, l)$ .

Пусть слой  $D_0$  вырождается в трещину, т. е.  $l \rightarrow 0$ ,  $k_0 \rightarrow \infty$  так, что  $k_0 l \rightarrow A$ , где  $A$  – параметр трещины [6; 7]. Переходя к указанному пределу, из (4) с учётом первого условия (3) следует  $\lim u_0|_{x=l} = \lim u_0|_{x=0} = \lim (u_1 + F_i[u_1])|_{x=0} = (u_1 + F_i[u_1])|_{x=0}$ . Отсюда по принципу максимума для уравнения (1) (что предполагаем имеет место) найдем  $\lim u_0|_{x=c_2} = (u_1 + F_i[u_1])|_{x=0}$  для  $\forall c_2 \in (0, l)$ . Действуя на последнее равенство оператором  $L$ , с учётом уравнения (1) получим  $\lim \partial_x^2 u_0|_{x=c_2} = \partial_x^2 (u_1 + F_i[u_1])|_{x=0}$ . Тогда из равенств (4), (5) в пределе получим условия сопряжения на данной плёнке при дополнительной трещине  $x = +0$  вида

$$x = 0 : \quad u_2 - u_1 = F_{i+1}[u_1], \quad k_2 \partial_x u_2 - k_1 \partial_x u_1 = G_{i+1}[u_1], \quad (6)$$

где

$$F_{i+1}[u_1] = F_i[u_1], \quad G_{i+1}[u_1] = A \partial_x^2 (u_1 + F_i[u_1]) + G_i[u_1]. \quad (7)$$

Если слой  $D_0$  вырождается в завесу с параметром  $B$ , т. е.  $l \rightarrow 0$ ,  $k_0 \rightarrow 0$  так, что  $l/k_0 \rightarrow B$  [6; 7], то из равенств (5) с учётом второго условия (3) получим  $\lim k_0 \partial_x u_0|_{x=l} = \lim k_0 \partial_x u_0|_{x=0} = \lim (k_1 \partial_x u_1 + G_i[u_1])|_{x=0} = (k_1 \partial_x u_1 + G_i[u_1])|_{x=0}$ . Отсюда  $\lim k_0 \partial_x u_0|_{x=c_1} = (k_1 \partial_x u_1 + G_i[u_1])|_{x=0}$  для  $\forall c_1 \in (0, l)$ . Тогда из равенств (4), (5) следуют условия сопряжения на данной плёнке при дополнительной завесе  $x = +0$  в виде (6), где

$$F_{i+1}[u_1] = B(k_1 \partial_x u_1 + G_i[u_1]) + F_i[u_1], \quad G_{i+1}[u_1] = G_i[u_1]. \quad (8)$$

Пусть плёнка  $x = 0$  состоит из  $n$  трещин и завес. Отсюда обобщённые условия сопряжения на данной плёнке имеют вид (6), где операторы  $F_n[u]$  и  $G_n[u]$  строятся по рекуррентным формулам (7), (8), в которых  $F_0 = G_0 = 0$ ,  $i = 0, \dots, n - 1$ .

Из равенств (7), (8) следует, что примыкающие друг к другу трещины, а также завесы, равносильны соответственно трещине или завесе с суммарным параметром. Поэтому многослойные плёнки далее рассматриваем, состоящими из чередующихся трещин и завес. Кроме того, из равенств (6)–(8) следует, что на трещине потенциал непрерывен, а нормальная скорость терпит разрыв; на завесе нормальная скорость непрерывна, а потенциал терпит разрыв. Последнее объясняется тем, что «частицы» движущейся сплошной среды (жидкости, потока тепла и т. д.), протекая по сильно проницаемой трещине, могут вытекать из неё в точках, отличных от точек втекания, и для протекания сквозь слабо проницаемую завесу на ней должна поддерживаться определённая разность потенциалов.

В частном случае одиночной трещины условия (6), (7) примут вид

$$x = 0 : \quad u_2 = u_1, \quad k_2 \partial_x u_2 - k_1 \partial_x u_1 = A \partial_x^2 u_1. \quad (9)$$

Данные условия совпадают с условиями на одиночной сильно проницаемой плёнке в задачах теплопроводности и фильтрации жидкости, полученными из других соображений [1, с. 31; 3, с. 107–108]. Для волнового уравнения условия (9) соответствуют условиям при продольном ударе по стержню и случаю колебания струны с точечной массой [2, с. 70; 5, с. 147].

В случае одиночной завесы условия (6), (8) примут вид

$$x = 0 : \quad u_2 - u_1 = B k_1 \partial_x u_1, \quad k_2 \partial_x u_2 = k_1 \partial_x u_1.$$

Данные условия соответствуют условиям на слабо проницаемых плёнках, а также условиям на контакте стержней, разделённых упругой прокладкой, при продольных колебаниях [1, с.27; 5, с.40].

## 2. Задачи с многослойной плёнкой, разделяющей цилиндр на два полуцилиндра.

Рассмотрим цилиндр  $D = (x \in R) \times (y \in Q \subseteq R^m)$ , разделённый многослойной плёнкой  $x = 0$  на два полуцилиндра  $D_1(x < 0)$  и  $D_2(x > 0)$ , когда плёнка  $x = 0$  состоит из  $n = 2r$  чередующихся трещин и завес с параметрами соответственно  $A_1, B_2, \dots, A_{2r-1}, B_{2r}$ , где  $A_1 \geq 0$  – параметр первой трещины  $x = -0$ ,  $B_{2r} \geq 0$  – параметр последней завесы  $x = +0$ , остальные параметры  $B_i, A_j > 0$ . При  $A_1 = 0$  ( $B_{2r} = 0$ ) первая трещина (последняя завеса) отсутствует.

Рассмотрим в цилиндре  $D$  класс краевых задач с неоднородными условиями в зоне  $D_2(x > 0)$  вида

$$\partial_x^2 u_1 + L[u_1] = 0, \quad (x, y) \in D_1; \quad M[u_1]_{(x,y) \in S} = 0, \quad (10)$$

$$\partial_x^2 u_2 + L[u_2] = H(x, y), \quad (x, y) \in D_2; \quad M[u_2]_{(x,y) \in S} = h(x, y), \quad (11)$$

$$x = 0 : \quad u_2 - u_1 = F_{2r}[u_1], \quad k_2 \partial_x u_2 - k_1 \partial_x u_1 = G_{2r}[u_1], \quad (12)$$

где оператор  $M$  (как и  $L$ ) является произвольным линейным дифференциальным оператором по переменным  $y_i$ ,  $S$  – боковая поверхность цилиндра  $D$  (уравнение поверхности  $S$  не содержит переменной  $x$ ),  $H$  и  $h$  – заданные функции, операторы  $F_{2r}$  и  $G_{2r}$  строятся по рекуррентным формулам (7), (8):

$$F_{2i-1}[u] = F_{2i-2}[u], \quad G_{2i-1}[u] = A_{2i-1} \partial_x^2 (u + F_{2i-2}[u]) + G_{2i-2}[u], \quad (13)$$

$$F_{2i}[u] = B_{2i} (k_1 \partial_x u + G_{2i-1}[u]) + F_{2i-1}[u], \quad G_{2i}[u] = G_{2i-1}[u], \quad (14)$$

$$F_0[u] = G_0[u] = 0, \quad i = 1, \dots, r.$$

Пусть известно решение  $f(x, y)$  соответствующей классической краевой задачи в однородном по  $x$  цилиндре  $D$  без плёнки  $x = 0$ :

$$\partial_x^2 f + L[f] = \begin{cases} H(x, y), & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}, \quad M[f]_{(x,y) \in S} = \begin{cases} h(x, y), & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}. \quad (15)$$

В частности, для оператора Лапласа ( $L = \partial_y^2$ ) на плоскости  $x, y$  ( $D = R^2$ ) функция  $f(x, y)$  является заданной гармонической функцией, особые точки (источники, стоки и т. д.) которой лежат в полуплоскости  $x > 0$ . Классические задачи Коши при  $-\infty < x < \infty$  для гиперболических и параболических уравнений также являются задачами вида (15).

Методом свертывания разложений Фурье [6; 7] выразим решение задачи (10)–(12) с плёнкой  $x = 0$  непосредственно через функцию  $f(x, y)$  (15).

Следуя указанному методу, для вывода общих формул рассмотрим частный случай оператора  $L = \partial_y^2$  при  $y \in R$ , т. е. когда область  $D$  является плоскостью  $x, y$ , разделённой многослойной

плёнкой  $x = 0$  на две полуплоскости  $D_1(x < 0)$ ,  $D_2(x > 0)$ . В данном случае задача (10)–(12) примет вид модельной задачи, допускающей применение метода Фурье:

$$\Delta u_1 = 0, \quad \Delta u_2 = H(x, y), \quad (16)$$

при условиях сопряжения (12). При этом полагаем, что известно решение  $f(x, y)$  соответствующей классической задачи на однородной плоскости  $x, y$  (без плёнки  $x = 0$ ) вида

$$\Delta f = \begin{cases} H(x, y), & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}, \quad (17)$$

и выразим решение задачи (16), (12) с плёнкой  $x = 0$  через функцию  $f(x, y)$ .

Предположим сначала, что функция  $f(0, y)$  разлагается в интеграл Фурье с коэффициентами Фурье  $f_i$ :

$$f(0, y) = \int_0^\infty g d\lambda, \quad g(y, \lambda) = f_1 \sin \lambda y + f_2 \cos \lambda y \quad (18)$$

(указанное предположение существенно сужает класс функций  $f(x, y)$ , в частности, фундаментальное решение не разлагается в интеграл Фурье). Отсюда функция  $f(x, y)$  в полуплоскости  $x < 0$ , где она удовлетворяет уравнению Лапласа (17), представима в виде интеграла Фурье:

$$f(x, y) = \int_0^\infty e^{\lambda x} g d\lambda, \quad x \leq 0. \quad (19)$$

Формула (19) выражает решение задачи Дирихле в полуплоскости  $x < 0$  с граничной функцией  $f(0, y)$ , полученное методом Фурье. Представим решение задачи (16), (12) в виде

$$u_1 = \int_0^\infty a_1 e^{\lambda x} g d\lambda, \quad x < 0; \quad u_2 = f(x, y) + \int_0^\infty a_2 e^{-\lambda x} g d\lambda, \quad x > 0, \quad (20)$$

где  $a_i(\lambda)$  – неизвестные параметры, функция  $g(y, \lambda)$  имеет вид (18). Отсюда функции  $u_i(x, y)$  удовлетворяют соответствующему уравнению (16) (при условии сходимости и дифференцируемости интегралов (20)).

Приравняем коэффициенты слева и справа при функции  $g(y, \lambda)$  под знаками интегралов (19), (20) в условиях сопряжения (12). При этом необходимо найти указанные коэффициенты в функциях  $F_{2r}[u_1]$  и  $G_{2r}[u_1]$  (12). Для нахождения этих коэффициентов поставим функции  $u_1$  при  $x = 0$  в соответствие указанный коэффициент  $a_1$  (20). Это соответствие обозначим символом  $u_1 \div a_1$ . Из первого равенства (20) следует  $\partial_x^k u_1 \div \lambda^k a_1$ , причём данное соответствие линейно, т. е. если  $u_i \div a_i$ ,  $i = 1, 2$ , то  $c_1 u_1 + c_2 u_2 \div c_1 a_1 + c_2 a_2$ , где  $c_i$  – постоянные.

**Лемма.** Если  $u_1 \div a_1$ , то для операторов  $F_j[u_1]$  и  $G_j[u_1]$  (13), (14) имеем

$$F_{2i-1}[u_1] \div \lambda a_1 p_{i-1}, \quad G_{2i-1}[u_1] \div \lambda a_1 q_i, \quad F_{2i}[u_1] \div \lambda a_1 p_i, \quad G_{2i}[u_1] \div \lambda a_1 q_i, \quad (21)$$

где функции  $p_i(\lambda)$ ,  $q_i(\lambda)$  строятся по рекуррентным формулам

$$q_i = \lambda A_{2i-1}(1 + \lambda p_{i-1}) + q_{i-1}, \quad p_i = B_{2i}(k_1 + q_i) + p_{i-1}, \quad (22)$$

$$i = 1, \dots, r, \quad p_0 = q_0 = 0.$$

**Доказательство.** Из равенств (13), (14) с учётом первого разложения (20) получим

$$F_1[u_1] \div 0, \quad G_1[u_1] \div A_1 \lambda^2 a_1 = \lambda a_1 q_1$$

$$F_2[u_1] \div B_2 \lambda a_1 (k_1 + A_1 \lambda) = \lambda a_1 p_1, \quad G_2[u_1] \div \lambda a_1 q_1,$$

где  $q_1 = A_1 \lambda$ ,  $p_1 = B_2(k_1 + q_1)$ , т. е. формулы (21), (22) справедливы при  $i = 1$ . Полагая, что формулы (21), (22) верны для некоторого  $i$ , с помощью равенств (13), (14) найдем

$$F_{2i+1}[u] \div \lambda a_1 p_i, \quad G_{2i+1}[u] \div A_{2i+1} \lambda^2 a_1 (1 + \lambda p_i) + \lambda a_1 q_i = \lambda a_1 q_{i+1},$$

$$F_{2i+2}[u] \div B_{2i+2} \lambda a_1 (k_1 + q_{i+1}) + \lambda a_1 p_i = \lambda a_1 p_{i+1}, \quad G_{2i+2}[u] \div \lambda a_1 q_{i+1},$$

где  $q_{i+1} = \lambda A_{2i+1} (1 + \lambda p_i) + q_i$ ,  $p_{i+1} = B_{2i+2} (k_1 + q_{i+1}) + p_i$ , т. е. получили формулы (21), (22) при  $i + 1$ . Лемма доказана.

Из равенств (21), (22) следует  $F_{2r}[u_1] \div \lambda a_1 p_r$ ,  $G_{2r}[u_1] \div \lambda a_1 q_r$ . Тогда из условий сопряжения (12) с учётом разложения функций  $f(x, y)$  и  $u_i(x, y)$  (19), (20) для параметров  $a_{1,2}$  получим систему алгебраических уравнений  $1 + a_2 = a_1(1 + \lambda p_r)$ ,  $k_2(1 - a_2) = a_1(k_1 + q_r)$ , решение которой имеет вид

$$a_1 = \frac{2k_2}{d}, \quad a_2 = \frac{\lambda k_2 p_r - q_r + k_2 - k_1}{d}, \quad (23)$$

где

$$d(\lambda) = \lambda k_2 p_r + q_r + k_1 + k_2, \quad (24)$$

при этом  $d > 0$  при  $0 \leq \lambda < \infty$ . Функция  $d(\lambda)$  является монотонно возрастающим многочленом (22). При  $B_{2r} > 0$ , т. е. когда последняя завеса имеет место, функции  $q_r(\lambda)$  и  $p_r(\lambda)$  (22) являются многочленами одинаковой степени  $2r - 2 + \nu$ , где  $\nu = 1$  или  $\nu = 0$  соответственно, когда первая трещина имеет место ( $A_1 > 0$ ) или отсутствует ( $A_1 = 0$ ). При  $B_{2r} = 0$ , т. е. когда последняя завеса отсутствует, степени многочленов  $q_r(\lambda)$  и  $p_r(\lambda)$  различные и соответственно равны  $2r - 2 + \nu$  и  $2r - 4 + \nu$ . Отсюда степени слагаемых  $\lambda k_2 p_r$  и  $q_r$ , входящих в (23), (24), различны для любого варианта значения  $B_{2r} \geq 0$ . При  $B_{2r} > 0$  для степеней многочленов  $\lambda k_2 p_r$  и  $q_r$  выполняется неравенство  $2r - 1 + \nu > 2r - 2 + \nu$ , при  $B_{2r} = 0$  для степеней  $\lambda k_2 p_r$  и  $q_r$  выполняется противоположное неравенство  $2r - 3 + \nu < 2r - 2 + \nu$ . Отсюда при  $B_{2r} > 0$  и  $B_{2r} = 0$  из (23), (24) параметр  $a_2$  найдем соответственно в виде

$$a_2 = 1 - \frac{2(q_r + k_1)}{d}, \quad a_2 = -1 + \frac{2k_2(\lambda p_r + 1)}{d},$$

при этом обе дроби правильные. Тогда с учётом разложения заданной функции  $f(x, y)$  (19) решение  $u_i$  (20) задачи (16), (12) получим в виде

$$u_1 = 2k_2 \int_0^{\infty} \frac{1}{d} e^{\lambda x} g d\lambda, \quad x < 0, \quad (25)$$

при этом функция  $u_2(x, y)$  при  $B_{2r} > 0$  или при  $B_{2r} = 0$  примет соответственно вид

$$u_2 = f(x, y) + f(-x, y) - 2 \int_0^{\infty} \frac{q_r + k_1}{d} e^{-\lambda x} g d\lambda, \quad x > 0, \quad (26)$$

или

$$u_2 = f(x, y) - f(-x, y) + 2k_2 \int_0^{\infty} \frac{\lambda p_r + 1}{d} e^{-\lambda x} g d\lambda, \quad x > 0, \quad (27)$$

где функции  $d(\lambda)$ ,  $g(y, \lambda)$ ,  $q_r(\lambda)$ ,  $p_r(\lambda)$  равны (24), (18), (22).

Интегралы (25)–(27) сходятся и допускают дифференцирование необходимое число раз, что следует из асимптотики подынтегральных функций при  $\lambda \rightarrow +\infty$  вида  $O(\lambda^{-a}e^{-\lambda|x|})$ , где  $a > 0$ .

Отметим, что полученное решение (25)–(27) задачи (16), (12) справедливо для достаточно узкого класса заданных функций  $f(x, y)$ , удовлетворяющих условию (18). С другой стороны, это решение имеет достаточно сложный вид, т. к. содержит двукратные квадратуры (внешнюю и внутреннюю в коэффициентах Фурье) от сильно осциллирующих тригонометрических функций.

Для того, чтобы выразить функции  $u_i$  (25)–(27) непосредственно через заданную функцию  $f(x, y)$  (17) без интегралов Фурье выведем рабочую формулу, позволяющую свертывать разложения Фурье. Из разложения функции  $f(x, y)$  (19) следует равенство

$$f(x - t, y) = \int_0^{\infty} e^{\lambda(x-t)} g d\lambda, \quad x \leq 0, \quad t > 0.$$

Умножая это равенство на  $e^{-\gamma t t^n}$  и интегрируя по  $t \in (0, \infty)$ , с учётом равенства (см. формулу 2.3.3.2 в [4, с. 322])

$$\int_0^{\infty} e^{-at} t^n dt = \frac{n!}{a^{n+1}}, \quad a > 0$$

получим формулу

$$\frac{1}{n!} \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} t^n f(x - t, y) dt = \int_0^{\infty} \frac{e^{\lambda x} g}{(\lambda + \gamma)^{n+1}} d\lambda, \quad x < 0, \quad (28)$$

где  $\gamma > 0$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Данная формула позволяет посредством разложения подынтегральных правильных дробей (25)–(27) на простейшие дроби выразить решение  $u_i$  задачи (16), (12) в однократных квадратурах непосредственно через функцию  $f(x, y)$  (17) без разложений Фурье.

Рассмотрим случай, когда многочлен  $d(\lambda)$  (24) имеет действительные корни  $-\gamma_j$  кратности  $m_j$ ,  $j = 1, \dots, p$ , т. е.

$$d = c(\lambda + \gamma_1)^{m_1} \dots (\lambda + \gamma_p)^{m_p}. \quad (29)$$

Тогда разложения дробей (25)–(27) на простейшие дроби соответственно примут вид

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{c} \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^{m_j} \frac{a_{kj}}{(\lambda + \gamma_j)^k},$$

$$\frac{q_r + k_1}{d} = \frac{1}{c} \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^{m_j} \frac{b_{kj}}{(\lambda + \gamma_j)^k}, \quad \frac{\lambda p_r + 1}{d} = \frac{1}{c} \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^{m_j} \frac{c_{kj}}{(\lambda + \gamma_j)^k}. \quad (30)$$

Отсюда с учётом формулы (28) функции  $u_i(x, y)$  (25)–(27) приводятся к виду

$$u_1 = \frac{2k_2}{c} \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^{m_j} \frac{a_{kj}}{(k-1)!} \int_0^{\infty} e^{-\gamma_j t} t^{k-1} f(x - t, y) dt, \quad x < 0, \quad (31)$$

$$u_2 = f(x, y) - (-1)^\mu [f(-x, y) -$$

$$- \frac{2}{c} \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^{m_j} \frac{d_{kj}(\mu)}{(k-1)!} \int_0^{\infty} e^{-\gamma_j t} t^{k-1} f(-x - t, y) dt], \quad x > 0, \quad (32)$$

где  $-\gamma_j$  – корни многочлена  $d$  (24), (29),  $\mu = 1$  и  $\mu = 0$  соответственно при  $B_{2r} > 0$  и  $B_{2r} = 0$ , при этом  $d_{kj}(1) = b_{kj}$ ,  $d_{kj}(0) = k_2 c_{kj}$  (30).

Формулы (31), (32) справедливы для общего случая задач (10)–(12) и (15).

**Теорема.** Если многочлен  $d(\lambda)$  (24) имеет действительные корни  $-\gamma_j$  (29) и функция  $f(x, y)$  является решением задачи (15), удовлетворяющим вместе с частными производными, входящими в уравнение (15), условию

$$|f(x, y)| = O(e^{\gamma|x|}), \quad x \rightarrow -\infty, \quad (33)$$

где  $\gamma < \min \gamma_j$ , то функции  $u_i(x, y)$  (31), (32) являются решением задачи (10)–(12).

**Доказательство.** Из неравенства  $d \geq k_1 + k_2 > 0$  при  $0 \leq \lambda < \infty$  следует, что действительные корни  $-\gamma_j$  многочлена  $d$  (24) отрицательны. Отсюда в равенствах (31), (32)  $\gamma_j > 0$ , т. е. интегралы (31), (32) при условии (33) сходятся вместе с частными производными, входящими в уравнение (1). Полученное решение (31), (32) имеет вид операторов, действующих на функцию  $f(x, y)$  по одной переменной  $x$ . В условиях сопряжения (12) также участвует одна переменная  $x$ . При этом можно показать, что условия сопряжения (12) для функций  $u_i$  (31), (32) выполняются тождественно. Аргументы функции  $f(x, y)$  в формулах (31), (32), кроме первого слагаемого в формуле (32), принадлежат области  $D_1$ , где условия задачи для функции  $f(x, y)$  однородны. При этом, если функция  $f(x, y)$  удовлетворяет однородному уравнению  $\partial_x^2 f + L[f] = 0$  при  $x < 0$ , то функция  $f(-x, y)$  удовлетворяет этому уравнению при  $x > 0$ . Отсюда условия задачи (10)–(12) для функций (31), (32) проверяются непосредственно. Теорема доказана.

Можно показать, что в случае комплексно сопряженных корней многочлена (24) функции (31), (32) действительны.

Таким образом, задача (10)–(12) сводится к решению соответствующей классической задачи (15) без плёнки и к нахождению корней многочлена  $d(\lambda)$  (24), при этом решение задачи (10)–(12) выражается в виде конечной суммы однократных квадратур вида (31), (32) через решение соответствующей классической задачи (15).

#### Список литературы

1. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твёрдых тел. М.: Наука, 1964. 487 с.
2. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970. 710 с.
3. Пилатовский В. П. Основы гидромеханики тонкого пласта. М.: Недра, 1966. 317 с.
4. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. 798 с.
5. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 735 с.
6. Холодовский С. Е. Метод свёртывания разложений Фурье. Случай обобщённых условий сопряжения типа трещины (завесы) в кусочно-неоднородных средах // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 6. С. 855–859.
7. Холодовский С. Е. Метод свёртывания разложений Фурье. Случай трещины (завесы) в неоднородном пространстве // Дифференциальные уравнения. Т. 45. № 8. 2009. С. 1204–1208.

Статья поступила в редакцию 29.01.2012 г.



УДК 517.956  
ББК В143

**Святослав Евгеньевич Холодовский,**  
доктор физико-математических наук,  
Забайкальский государственный  
гуманитарно-педагогический университет им. Н. Г. Чернышевского  
(Чита, Россия), e-mail: hol47@yandex.ru  
**Галина Михайловна Давиденко,**  
старший преподаватель,  
Забайкальский государственный университет  
(Чита, Россия), e-mail: y.g.m@mail.ru

### О решении краевых задач в кусочно-однородных цилиндрах с двумя параллельными завесами<sup>1</sup>

Рассмотрены краевые задачи для линейных дифференциальных уравнений в кусочно-однородных цилиндрах, разделённых на три зоны слабопроницаемыми плёнками. Указанные задачи моделируют процессы тепломассопереноса в композитных материалах с плёночными включениями, которые имеют широкие приложения. Методом свертывания разложений Фурье решения задач выражены через решения соответствующих классических задач в однородных цилиндрах без плёнок.

*Ключевые слова:* краевые задачи, слабопроницаемые плёнки, кусочно-однородные зоны, метод свертывания разложений Фурье.

**Svyatoslav Yevgenyevich Kholodovskii**  
Doctor of Physics and Mathematics,  
Zabaikalsky State Humanitarian Pedagogical University named after N.G. Chernyshevsky  
(Chita, Russia), e-mail: hol47@yandex.ru  
**Galina Mikhailovna Davidenko,**  
Senior Lecturer, Trans-Baikal State University  
(Chita, Russia), e-mail: y.g.m@mail.ru

### The Solution of Boundary Value Problems in Piecewise Homogeneous Cylinders with Two Parallel Screens

The article addresses boundary value problems for linear differential equations in piecewise-homogeneous cylinders divided into three zones by slow-permeable films. These tasks model the processes of heat and mass transfer in composite materials with film inclusions that are of wide application. With the help of the method of convolution of Fourier expansions, task solutions are expressed in terms of solving corresponding classical solutions to the problems in homogeneous cylinders without films.

*Keywords:* boundary value problems, slow-permeable films, piecewise-homogeneous zones, method of convolution of Fourier expansions.

Во многих отраслях хозяйственной деятельности все более широкие применения находят композитные материалы, содержащие разнородные фракции, в том числе наноразмерные плёночные включения. Поэтому представляет большой интерес решение краевых задач в кусочно-однородных областях при наличии плёнок.

Рассмотрим в пространстве  $R^m$  цилиндр  $D = (x \in R) \times (y \in Q \subseteq R^{m-1})$ , разделённый двумя слабопроницаемыми завесами  $x = 0$  и  $x = l$  с одинаковым параметром  $B$  на зоны  $D_1(x < 0)$ ,  $D_2(0 < x < l)$ ,  $D_3(x > l)$ ,  $y \in Q$ . Пусть проницаемости зон  $D_i$  по переменной  $x$  постоянны и равны  $k_i$ , при этом  $k_3 = k_1$ . В данном случае в цилиндре  $D$  проницаемости  $k_1$  имеет место включение  $D_2$  проницаемости  $k_2$ , экранированное слабопроницаемыми плёнками. Для функций  $u_i(x, y)$  в  $D_i$  рассмотрим класс краевых задач с неоднородными условиями в зоне  $D_1$ :

<sup>1</sup>Работа выполнена в рамках Государственного задания вузу Минобрнауки РФ, № 1.3985.2011.

$$\partial_x^2 u_1 + L[u_1] = H(x, y), \quad M[u_1]|_S = h(x, y), \quad (1)$$

$$\partial_x^2 u_j + L[u_j] = 0, \quad M[u_j]|_S = 0, \quad j = 2, 3, \quad (2)$$

$$x = 0: \quad u_2 - u_1 = Bk_1 \partial_x u_1, \quad k_2 \partial_x u_2 = k_1 \partial_x u_1, \quad (3)$$

$$x = l: \quad u_3 - u_2 = Bk_2 \partial_x u_2, \quad k_1 \partial_x u_3 = k_2 \partial_x u_2, \quad (4)$$

где  $L$  и  $M$  – произвольные линейные дифференциальные операторы по переменным  $y_i$ , т. е. эти операторы не содержат производных по  $x$  и коэффициенты при производных не зависят от  $x$ ,  $S$  – боковая поверхность цилиндра  $D$ ,  $H(x, y)$  и  $h(x, y)$  – заданные функции,  $y = (y_1, \dots, y_{m-1}) \in Q$ . Условия сопряжения (3), (4) на плёнках выведены в работах [1; 2]. Методом свертывания разложений Фурье [1; 2] выразим решение задачи (1)–(4) через решение  $f(x, y)$  классической задачи в однородном цилиндре  $D$  без плёнок:

$$\partial_x^2 f + L[f] = \begin{cases} H(x, y), & x < 0 \\ 0 & x \geq 0 \end{cases}, \quad M[f]|_S = \begin{cases} h(x, y), & x < 0 \\ 0 & x \geq 0 \end{cases}. \quad (5)$$

Для вывода общих формул рассмотрим модельные случаи задач (1)–(4) и (5) на плоскости  $x, y$  для оператора Лапласа, допускающие применение метода Фурье, соответственно вида

$$\Delta u_1 = H(x, y), \quad \Delta u_j = 0, \quad j = 2, 3 \quad (6)$$

с условиями сопряжения (3), (4) и

$$\Delta f = \begin{cases} H(x, y), & x < 0 \\ 0 & x \geq 0 \end{cases}. \quad (7)$$

Предположим сначала, что функция  $f(0, y)$  разлагается в интеграл Фурье:

$$f(0, y) = \int_0^\infty g \, d\lambda, \quad g(y, \lambda) = f_1 \sin \lambda y + f_2 \cos \lambda y, \quad (8)$$

где  $f_i(\lambda)$  – коэффициенты Фурье функции  $f(0, y)$ . Отсюда функция  $f(x, y)$  при  $x > 0$ , где она удовлетворяет уравнению Лапласа (7), представима в виде разложения Фурье

$$f(x, y) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} g \, d\lambda, \quad x > 0. \quad (9)$$

Представим решение задачи (6), (3), (4) в виде

$$u_1 = f(x, y) + \int_0^\infty a_1 e^{\lambda x} g \, d\lambda, \quad x < 0, \quad (10)$$

$$u_2 = \int_0^\infty [a_2 \operatorname{sh} \lambda(x-l) + b \operatorname{ch} \lambda(x-l)] g \, d\lambda, \quad 0 < x < l, \quad (11)$$

$$u_3 = \int_0^{\infty} a_3 e^{-\lambda(x-l)} g d\lambda, \quad x > l, \quad (12)$$

где функция  $g(y, \lambda)$  имеет вид (8). Отсюда функции (10)–(12) удовлетворяют соответствующему уравнению (6). Из условий сопряжения (3), (4) с учётом (9) для параметров  $a_i$ ,  $b$  получим систему алгебраических уравнений  $-a_2 s + bc - 1 - a_1 = Bk_1 \lambda(a_1 - 1)$ ,  $k_2(a_2 c - bs) = k_1(a_1 - 1)$ ,  $a_3 - b = Bk_2 \lambda a_2$ ,  $-k_1 a_3 = k_2 a_2$ , решение которой имеет вид

$$a_1 = 1 - \frac{2k_2(p\lambda s + k_2 s + k_1 c)}{d}, \quad a_2 = -\frac{2k_1^2}{d},$$

$$b = \frac{2k_1(p\lambda + k_2)}{d}, \quad a_3 = \frac{2k_1 k_2}{d}, \quad (13)$$

где

$$d(\lambda) = (p\lambda s + k_2 s + k_1 c)(p\lambda + k_2) + k_1(p\lambda c + k_2 c + k_1 s), \quad p = Bk_1 k_2, \quad (14)$$

$s = \text{sh } \lambda l$ ,  $c = \text{ch } \lambda l$ , при этом  $d(\lambda) > 0$  при  $0 \leq \lambda < \infty$ . Раскладывая дробь  $1/d$  в геометрическую прогрессию, получим

$$\frac{1}{d} = \frac{2e^{-\lambda l}}{p^2(\lambda + \gamma)^2(1 - q)} = \frac{2}{p^2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda l(2n+1)} \frac{(\lambda + \nu)^{2n}}{(\lambda + \gamma)^{2n+2}}, \quad (15)$$

где

$$q = \left( \frac{\lambda + \nu}{\lambda + \gamma} \right)^2 e^{-2\lambda l}, \quad \gamma = \frac{k_1 + k_2}{p}, \quad \nu = \frac{k_2 - k_1}{p},$$

$|q(\lambda)| < 1$  при  $0 \leq \lambda < \infty$ . Отсюда функции  $u_i$  (10)–(12) с учётом (9), (13), (15) примут вид

$$u_1 = f(x, y) + f(-x, y) -$$

$$-\frac{2k_2}{p} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \left[ e^{\lambda(x-2nl)} \frac{(\lambda + \nu)^{2n}}{(\lambda + \gamma)^{2n+1}} - e^{\lambda(x-2nl-2l)} \frac{(\lambda + \nu)^{2n+1}}{(\lambda + \gamma)^{2n+2}} \right] g d\lambda, \quad (16)$$

$$u_2 = \frac{2k_1}{p} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \left[ e^{-\lambda(x+2nl)} \frac{(\lambda + \nu)^{2n}}{(\lambda + \gamma)^{2n+1}} + e^{\lambda(x-2nl-2l)} \frac{(\lambda + \nu)^{2n+1}}{(\lambda + \gamma)^{2n+2}} \right] g d\lambda, \quad (17)$$

$$u_3 = \frac{4k_1 k_2}{p^2} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\lambda(x+2nl)} \frac{(\lambda + \nu)^{2n}}{(\lambda + \gamma)^{2n+2}} g d\lambda. \quad (18)$$

Из разложения функции  $f(x, y)$  (9) следует равенство

$$f(-x + t, y) = \int_0^{\infty} e^{\lambda(x-t)} g d\lambda, \quad x < 0, \quad t > 0.$$

Отсюда аналогично работе [3] получим формулу

$$\frac{(-1)^k}{n!} \int_0^{\infty} e^{-\delta t} t^n \partial_t^k [e^{-\nu t} f(-x + t, y)] dt = \int_0^{\infty} e^{\lambda x} \frac{(\lambda + \nu)^k g}{(\lambda + \gamma)^{n+1}} d\lambda, \quad x < 0, \quad (19)$$

где  $n = 0, 1, \dots$ ,  $k = 0, 1, \dots$ ,  $\gamma > 0$ , функция  $g(y, \lambda)$  имеет вид (8),

$$\delta = \gamma - \nu = \frac{2k_1}{p} > 0.$$

С учетом формулы (19) решение (16)–(18) задачи (6), (3), (4) непосредственно выражается через функцию  $f(x, y)$  (7) без разложений Фурье в виде

$$u_1 = f(x, y) + f(-x, y) - \frac{2k_2}{p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \int_0^{\infty} e^{-\delta t} t^{2n} \left\{ \partial_t^{2n} [e^{-\nu t} f(-x + 2nl + t, y)] + \frac{t}{2n+1} \partial_t^{2n+1} [e^{-\nu t} f(-x + 2nl + 2l + t, y)] \right\} dt, \quad (20)$$

$$u_2 = \frac{2k_1}{p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \int_0^{\infty} e^{-\delta t} t^{2n} \left\{ \partial_t^{2n} [e^{-\nu t} f(x + 2nl + t, y)] - \frac{t}{2n+1} \partial_t^{2n+1} [e^{-\nu t} f(-x + 2nl + 2l + t, y)] \right\} dt, \quad (21)$$

$$u_3 = \frac{4k_1 k_2}{p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \int_0^{\infty} e^{-\delta t} t^{2n+1} \partial_t^{2n} [e^{-\nu t} f(x + 2nl + t, y)] dt, \quad (22)$$

где постоянная  $p$  имеет вид (14). Полученные формулы (20)–(22) справедливы для общего случая задач (1)–(4) и (5). Для полученного решения имеет место следующая теорема, аналогичная теореме работы [4].

**Теорема.** Если функция  $f(x, y)$  является решением задачи (5) и для любого  $n = 0, 1, \dots$  выполняется условие

$$|\partial_x^m [e^{-\nu x} f(x, y)]| < c \alpha^m e^{\alpha x}, \quad x \rightarrow +\infty, \quad (23)$$

где  $0 < \alpha < \alpha_0$ ,  $\alpha_0(1 + \mu e^{\alpha_0 l}) = \delta$ ,  $\mu = e^{\nu l}$ , то решение задачи (1)–(4) строится по формулам (20)–(22).

**Доказательство.** Функция  $\beta(\alpha) = \alpha(1 + \mu e^{\alpha l})$  монотонно возрастает при  $0 \leq \alpha \leq \alpha_0$  от нуля до  $\delta = \alpha_0(1 + \mu e^{\alpha_0 l}) > 0$ , при этом  $\alpha \leq \alpha_0 < \alpha_0(1 + \mu e^{\alpha_0 l}) = \delta$ . Отсюда при  $0 < \alpha < \alpha_0$  следуют неравенства

$$\alpha < \delta, \quad \beta(\alpha) = \alpha(1 + \mu e^{\alpha l}) < \delta, \quad (24)$$

при этом из условия (23) при  $x > 0$  следует  $|\partial_t^{2n} [e^{-\nu t} f(x + 2nl + t, y)]| < c \alpha^{2n} e^{(\alpha+\nu)(x+2nl)+\alpha t}$ . Отсюда для первого интеграла (20) получим оценку

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2n)!} \left| \int_0^{\infty} e^{-\delta t} t^{2n} \partial_t^{2n} [e^{-\nu t} f(x + 2nl + t, y)] dt \right| \leq \\ & \leq \frac{1}{(2n)!} \int_0^{\infty} e^{-\delta t} t^{2n} |\partial_t^{2n} [e^{-\nu t} f(x + 2nl + t, y)]| dt < \\ & < \frac{c \alpha^{2n} e^{(\alpha+\nu)(x+2nl)}}{(2n)!} \int_0^{\infty} e^{-(\delta-\alpha)t} t^{2n} dt = \frac{c e^{(\alpha+\nu)x}}{\delta - \alpha} r^{2n}, \end{aligned}$$

где  $x > 0$ ,

$$r = \frac{\alpha e^{(\alpha+\nu)l}}{\delta - \alpha}.$$

В силу неравенств (24) имеем  $0 < r < 1$ . Аналогичные оценки имеют место для остальных членов рядов (20)–(22). Отсюда ряды (20)–(22) мажорируются рядами, сходящимися со скоростью геометрических прогрессий, т. е. ряды (20)–(22) сходятся и допускают дифференцирование необходимое число раз.

Полученные решения (20)–(22) имеют вид операторов, действующих на заданную функцию  $f(x, y)$  по одной переменной  $x$ , мультипеременная  $y$  остается свободной (параметром). В условиях сопряжения (3), (4) также участвует только переменная  $x$ . При этом эти условия для функций (20)–(22) выполняются тождественно. Аргументы функции  $f(x, y)$  в формулах (20)–(22), кроме первого слагаемого в формуле (20), принадлежат области  $x > 0$ , где условия задачи для функции  $f(x, y)$  однородны. Отсюда функции (20)–(22) удовлетворяют условиям задачи (1)–(4), что проверяется непосредственно. Теорема доказана.

В частном случае при  $L = \partial_y^2$ ,  $y \in R$  формулы (20)–(22) выражают гармонические функции  $u_i(x, y)$  на кусочно-однородной плоскости с двумя завесами через гармоническую на однородной плоскости функцию  $f(x, y)$  с сохранением её особых точек. При этом формулы (20)–(22) содержат однократные квадратуры от гладких функций без осцилляций, и эти формулы справедливы для широкого класса особых точек функции  $f(x, y)$  (23), включая фундаментальное решение типа источника.

Отметим, что решения (10)–(12), полученные методом Фурье, содержат двукратные квадратуры (внешнюю и внутреннюю в коэффициентах Фурье (8)) от сильно осциллирующих функций, и, кроме того, эти решения справедливы для достаточно узкого класса функций  $f(x, y)$  в смысле их поведения на бесконечности.

#### Список литературы

1. Холодовский С. Е. Метод свёртывания разложений Фурье в решении краевых задач с пересекающимися линиями сопряжения // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2007. Т. 47. № 9. С. 1550–1556.
2. Холодовский С. Е. Метод свёртывания разложений Фурье. Случай обобщенных условий сопряжения типа трещины (завесы) в кусочно-неоднородных средах // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 6. С. 855–859.
3. Холодовский С. Е. О решении краевых задач в полупространстве, ограниченном многослойной плёнкой // Ученые записки Забайкальского государственного гуманитарно-педагогического университета. Серия «Физика, математика, техника, технология». № 3 (38). Чита. 2011. С. 160–164.
4. Холодовский С. Е. О решении краевых задач в цилиндрах с двумя параллельными трещинами // Математический анализ и его приложения. Вып. 10 / Забайкальский государственный гуманитарно-педагогический университет. Чита. 2011. С. 56–62.

Статья поступила в редакцию 29.01.2012 г.

УДК 517.956  
ББК В143

*Наталья Николаевна Шадрина,  
Забайкальский государственный университет  
(Чита, Россия), e-mail: shadrinann8@yandex.ru*

**О решении третьих краевых задач в кусочно-однородной полуплоскости с трещиной (завесой)<sup>1</sup>**

Рассмотрены третьи краевые задачи в кусочно-однородной полуплоскости с двумя линиями разрыва проницаемости, одна из которых параллельна, а другая перпендикулярна границе полуплоскости. Первая линия является идеальным контактом сред, а вторая является сильно проницаемой трещиной или слабо проницаемой завесой. Применяя метод свертывания разложений Фурье, решения задач выражены через решение классической задачи Дирихле в однородной полуплоскости (без трещины и завесы).

*Ключевые слова:* краевые задачи, кусочно-однородная полуплоскость, трещина, завеса, метод свертывания разложений Фурье.

*Natalia Nikolaevna Shadrina,  
Trans-Baikal State University  
(Chita, Russia), e-mail: shadrinann8@yandex.ru*

**Solving Third Boundary Value Problems in Piecewise-homogeneous Half-plane with a Crack (Screen)**

The article considers the third boundary value problems in the piecewise-homogeneous half-plane with two lines of permeability discontinuity, one of which is parallel and another one is perpendicular to the boundary of the half-plane. The first line is an ideal contact medium, and the second line is a highly permeable fracture or a weakly permeable screen. Applying the method of convolution of Fourier expansions, the problems solutions are expressed in terms of the classical solution of the Dirichlet problem in the homogeneous half-plane (without a crack or a screen).

*Keywords:* boundary value problems, piecewise-homogeneous half-plane, fracture, screen, method of convolution of Fourier expansions.

**1. Случай трещины.** Рассмотрим кусочно-однородную полуплоскость  $D(y < l, x \in R)$ , состоящую из четырёх зон  $D_{11}(x < 0, y < 0)$ ,  $D_{21}(x > 0, y < 0)$ ,  $D_{12}(x < 0, 0 < y < l)$ ,  $D_{22}(x > 0, 0 < y < l)$  с различной проницаемостью  $k_{ij}$  в  $D_{ij}$ , когда зоны  $D_{1j}$  и  $D_{2j}$  разделены сильно проницаемой трещиной  $x = 0$ , а контакт зон  $D_{i1}$  и  $D_{i2}$  идеальный. В данной полуплоскости для потенциалов  $u_{ij}$  в  $D_{ij}$  рассмотрим третью краевую задачу с однородным граничным условием в  $D_{12}$  вида [1; 2]:

$$\Delta u_{ij} = 0, \quad \partial_y u_{12} + hu_{12}|_{y=l} = 0, \quad \partial_y u_{22} + hu_{22}|_{y=l} = f(x), \quad (1)$$

$$x = 0: \quad u_{2j} = u_{1j}, \quad r\partial_x u_{2j} - \partial_x u_{1j} = A\partial_x^2 u_{1j}, \quad j = 1, 2, \quad (2)$$

$$y = 0: \quad u_{i2} = u_{i1}, \quad k_{12}\partial_y u_{i2} = k_{11}\partial_y u_{i1}, \quad i = 1, 2, \quad (3)$$

где  $k_{2j} = k_{1j}r$ ,  $A$  – параметр трещины [3, 4],  $h = const > 0$ . Наряду с задачей (1)–(3) рассмотрим классическую задачу Дирихле в однородной полуплоскости  $D(y < l)$  (без трещины) с граничной функцией (1):

$$\Delta F = 0, \quad (x, y) \in D; \quad F|_{y=l} = \varphi(x) = \begin{cases} f(x), & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}, \quad (4)$$

<sup>1</sup>Работа выполнена в рамках Государственного задания вузу Минобрнауки РФ, № 1.3985.2011.

решение которой строится по формуле Пуассона [1; 2] и далее считается известной функцией  $F(x, y)$ . Методом свёртывания разложений Фурье [3' 4] выразим решение задачи (1)–(3) через функцию  $F(x, y)$ .

Предположим, что граничная функция  $\varphi(x)$  (4) разлагается в интеграл Фурье:

$$\varphi(x) = \int_0^{\infty} g(x, \lambda) d\lambda, \quad g(x, \lambda) = f_1 \sin \lambda x + f_2 \cos \lambda x, \quad (5)$$

где  $f_i(\lambda)$  - коэффициенты Фурье функции  $\varphi(x)$ . Отсюда, решая задачу Дирихле (4) методом Фурье, представим функцию  $F(x, y)$  в виде интеграла Фурье:

$$F(x, y) = \int_0^{\infty} e^{\lambda(y-l)} g d\lambda, \quad y \leq l. \quad (6)$$

Представим искомые функции  $u_{ij}(x, y)$  в виде функций, тождественно удовлетворяющих обобщенным условиям сопряжения на трещине (2) [5]:

$$u_{2j}(x, y) = U_j(x, y) - U_j(-x, y) + \frac{2r}{A} \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} U_j(-x - t, y) dt, \quad x > 0, \quad (7)$$

$$u_{1j}(x, y) = \frac{2r}{A} \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} U_j(x - t, y) dt, \quad x < 0, \quad (8)$$

где

$$\gamma = \frac{r+1}{A}.$$

Отсюда для функций  $U_j(x, y)$  получим задачу в кусочно-однородной полуплоскости  $D(y < l)$ , состоящей из двух зон  $G_1(y < 0)$  и  $G_2(0 < y < l)$ ,  $x \in R$ , вида

$$\Delta U_j = 0, \quad (x, y) \in G_j; \quad \partial_y U_2 + h U_2|_{y=l} = \varphi(x) = \begin{cases} f(x), & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}, \quad (9)$$

$$y = 0: \quad U_2 = U_1, \quad k_{12} \partial_y U_2 = k_{11} \partial_y U_1. \quad (10)$$

Представим решение этой задачи в виде

$$U_1(x, y) = \int_0^{\infty} a_1 e^{\lambda y} g d\lambda, \quad U_2 = \int_0^{\infty} (a_2 \operatorname{sh} \lambda y + b \operatorname{ch} \lambda y) g d\lambda, \quad (11)$$

при этом функции (11) удовлетворяют уравнению (9). Из граничного условия (9) и условий сопряжения (10) с учётом разложения (5) для параметров  $a_i, b$  получим систему алгебраических уравнений  $\lambda(a_2 c + b s) + h(a_2 s + b c) = 1, b = a_1, k_{12} a_2 = k_{11} a_1$ , решение которой имеет вид

$$a_1 = b = \frac{k_{12}}{d}, \quad a_2 = \frac{k_{11}}{d},$$

где

$$d = k_{11}(\lambda c + h s) + k_{12}(\lambda s + h c), \quad (12)$$

$s = \operatorname{sh} \lambda l, c = \operatorname{ch} \lambda l$ , при этом  $d > 0$  при  $0 \leq \lambda < \infty$ . Из равенства (12) следует

$$\frac{1}{d} = \frac{2e^{-\lambda l}}{(\lambda + h)(k_{11} + k_{12})(1 - q)} = \frac{2}{k_{11} + k_{12}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda l(2n+1)} \nu^n \frac{(\lambda - h)^n}{(\lambda + h)^{n+1}},$$

где

$$q = \frac{\lambda - h}{\lambda + h} e^{-2l\lambda} \nu, \quad \nu = \frac{k_{12} - k_{11}}{k_{12} + k_{11}},$$

здесь дробь  $(1 - q)^{-1}$  разложена в геометрическую прогрессию ( $|q| < 1$  при  $0 \leq \lambda < \infty$ ). Тогда функции  $U_i(x, y)$  (11) примут вид

$$U_1 = (1 + \nu) \sum_{n=0}^{\infty} \nu^n \int_0^{\infty} e^{\lambda(y-2nl-l)} \frac{(\lambda - h)^n}{(\lambda + h)^{n+1}} g d\lambda, \quad (13)$$

$$U_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \nu^n \int_0^{\infty} [e^{\lambda(y-2nl-l)} + \nu e^{-\lambda(y+2nl+l)}] \frac{(\lambda - h)^n}{(\lambda + h)^{n+1}} g d\lambda. \quad (14)$$

Приведём полученные функции к виду, не содержащему разложений Фурье. Из разложения функции  $F(x, y)$  (6) следует равенство

$$F(x, y + l - t) = \int_0^{\infty} e^{\lambda(y-t)} g d\lambda, \quad y < 0, \quad t > 0.$$

Отсюда аналогично работам [3; 4] получим формулу

$$\frac{(-1)^k}{n!} \int_0^{\infty} e^{-2ht} t^n \partial_t^k [e^{ht} F(x, y + l - t)] dt = \int_0^{\infty} e^{\lambda y} \frac{(\lambda - h)^k}{(\lambda + h)^{n+1}} g d\lambda, \quad y < 0,$$

где  $n = 0, 1, \dots$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , функция  $g(x, \lambda)$  имеет вид (5).

С учётом этой формулы решение (13), (14) задачи (9), (10) непосредственно выражается через функцию  $F(x, y)$  (4) без разложений Фурье в виде

$$U_1(x, y) = (1 + \nu) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\nu)^n}{n!} \int_0^{\infty} e^{-2ht} t^n \partial_t^n [e^{ht} F(x, y - 2nl - t)] dt, \quad (15)$$

$$U_2(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\nu)^n}{n!} \int_0^{\infty} e^{-2ht} t^n \partial_t^n \{e^{ht} [F(x, y - 2nl - t) + \nu F(x, -y - 2nl - t)]\} dt. \quad (16)$$

Таким образом, решение исходной задачи (1)–(3) строится по формулам (7), (8), (15), (16).

**2. Случай завесы.** Пусть зоны  $D_{1j}$  и  $D_{2j}$  разделены слабо проницаемой завесой  $x = 0$ . Для потенциалов  $u_{ij}$  в  $D_{ij}$  рассматриваемая задача примет вид (1),(3),

$$x = 0 : \quad u_{2j} - u_{1j} = B \partial_x u_{1j}, \quad r \partial_x u_{2j} = \partial_x u_{1j}, \quad j = 1, 2, \quad (17)$$

где  $B$  – параметр завесы [3; 4].

Представим решение этой задачи в виде функций, тождественно удовлетворяющих условиям сопряжения на завесе (17) [5]:

$$u_{2j}(x, y) = U_j(x, y) + U_j(-x, y) - \frac{2}{Br} \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} U_j(-x - t, y) dt, \quad x > 0, \quad (18)$$

$$u_{1j}(x, y) = \frac{2}{B} \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} U_j(x - t, y) dt, \quad x < 0, \quad (19)$$



где

$$\gamma = \frac{r+1}{Br}.$$

Отсюда для функций  $U_j(x, y)$  получим задачу (9), (10), решение которой строится по формулам (15), (16).

Таким образом, решение задачи (1), (3), (17) строится по формулам (18), (19), (15), (16).

### Список литературы

1. Арсенин В. Я. Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1974. 431 с.
2. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.
3. Холодовский С. Е. Метод свёртывания разложений Фурье. Случай обобщённых условий сопряжения типа трещины (завесы) в кусочно-неоднородных средах // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 6. С. 855–859.
4. Холодовский С. Е. Метод свёртывания разложений Фурье. Случай трещины (завесы) в неоднородном пространстве // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 8. С. 1204–1208.
5. Холодовский С. Е., Шадрин Н. Н. О решении краевых задач с обобщёнными условиями сопряжения типа трещины (завесы) // Известия вузов. Математика. 2011. № 6. С. 100–106.

Статья поступила в редакцию 03.01.2012 г.

## ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Редакция принимает **не опубликованные** ранее материалы объемом до 1 п. л. (40 000 знаков с пробелами), выполненные в жанрах:

Жанр	Минимальный объем
статья <i>теоретического и эмпирического характера, содержащая основные научные результаты, полученные автором</i>	0,5 п. л. (20 000 знаков)
научные доклады	0,3 п. л. (12 000 знаков)
научные обзоры рецензии	0,2 п. л. (8 000 знаков)

### В редакцию НЕОБХОДИМО ПРЕДСТАВИТЬ:

1. Печатный и электронный вариант статьи на CD и других носителях. В имени файла и на электронном носителе указывается фамилия автора и название статьи. Печатный вариант статьи обязателен (белая бумага, формат А 4). Распечатка рукописи должна быть полностью идентична электронному варианту.
2. Договор на оказание услуг – в 2 экземплярах.
3. Рецензия на статью – внешний отзыв, заверенный печатью.
4. Отзыв научного руководителя с указанием новизны и достоверности исследования, *если автор статьи – аспирант, соискатель учёной степени кандидата наук.*
5. Личная карточка автора – сведения об авторе /авторах.

### СТРУКТУРА СТАТЬИ, ПРЕДСТАВЛЯЕМОЙ В РЕДКОЛЛЕГИЮ ЖУРНАЛА

**Отрасль науки (рубрика журнала)**

**Код:** УДК и ББК

**Инициалы, фамилия автора** приводятся на русском и английском языках. Количество соавторов в статье может быть не более 4.

**Город**

**Страна**

**Название статьи** приводится на русском и английском языке строчными буквами (не заглавными).

**Аннотация** (объём – 100–250 слов) – на русском и английском языке. Текст аннотации должен включать основные результаты статьи. Аннотация не должна содержать каких-либо ссылок.

**Ключевые слова или словосочетания** (5–7) отделяются друг от друга запятой. Приводятся на русском и английском языке.

**Основной текст статьи** с внутритекстовыми ссылками на цитируемые источники.

**Список литературы** даётся в алфавитном порядке, со сквозной нумерацией. Если в список входит литература на иностранных языках, она следует за литературой на русском языке.

### ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЬИ

**Общие требования:** формат А 4, ориентация книжная.

Параметры страницы: верхнее и нижнее – 2; левое и правое – 2,5. Шрифт Times New Roman, кегль 14, интервал полуторный. Отступ первой строки – 1,25. Текст без переносов, выравнивание по ширине.

При использовании дополнительных шрифтов при наборе статьи представить их в редакцию.

Статья должна быть со сквозной нумерацией. *На последней странице указывается, что «статья публикуется впервые», ставится дата и подпись.*

Рабочие языки: русский и английский.

**Список литературы** оформляется согласно ГОСТу Р. 7.0.5 - 2008. Для каждого источника обязательно указывается изд-во, общее количество страниц или номера страниц интересующего материала источника.

В тексте **ссылки** приводятся в квадратных скобках с указанием порядкового номера и страницы: [1, с. 25]. Несколько источников отделяются друг от друга точкой с запятой [1; 3; 4].

**Комментарии и пояснения** даются в виде концевых сносок (в конце текста). Маркер сноски – арабская цифра, нумерация сплошная.

#### **Особенности набора слов, цифр, формул, единиц измерения:**

Слова на латинице набираются курсивом.

Единицы измерения отбиваются от символов и цифр, к которым они относятся.

Делать чёткое различие О (буквы) и 0 (ноль), 1 (единицу) и I (римскую единицу или букву «и») и т.д. Необходимо различать дефис (-) и тире (–).

Не следует заменять букву «ё» на «е».

**Таблицы** оформляются в формате Word, должны быть озаглавлены и иметь сквозную нумерацию в пределах статьи, обозначаемую арабскими цифрами (например, таблица 1), в тексте ссылки нужно писать сокращенно (табл. 1). Содержание таблиц не должно дублировать текст. Слова в таблицах должны быть написаны полностью, верно должны быть расставлены переносы. В ячейке таблицы в конце предложения точка не ставится.

**Черно-белые рисунки** (графики, диаграммы – формат Excell, схемы, карты, фотографии) со сквозной нумерацией (арабскими цифрами) и везде обозначаются сокращенно (например: рис. 1). Представляются в формате jpg (разрешение не менее 300 т/д) отдельными файлами с указанием его порядкового номера, фамилии автора/ авторов и названия статьи. Размер рисунка 170x240 мм. Все детали рисунка при его уменьшении должны хорошо различаться. Все подрисовочные подписи прилагаются отдельным списком в конце статьи.

Объём рисунков не должен превышать 1/4 объёма статьи.

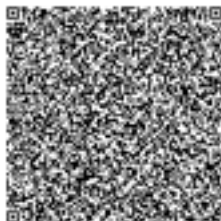
#### **ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ К СТАТЬЯМ ПО НАПРАВЛЕНИЮ «ФИЗИКА, МАТЕМАТИКА, ТЕХНИКА, ТЕХНОЛОГИЯ»**

Электронный вариант статьи предоставляется на CD и других носителях или по электронной почте. Предоставляемые файлы должны обладать расширением **.tex** и **.pdf**. Издательство использует систему вёрстки miktex для Windows версии не ниже 2.7. Перечень используемых подпакетов в файле-образце.

С сайта необходимо скачать образец оформления статьи (с готовыми настройками).

**Материалы, не соответствующие предъявленным требованиям, к рассмотрению не принимаются.**

**Материалы публикуются в авторской редакции. За точность содержания цитат и ссылок ответственность несут авторы.**



Пакет документов, необходимый для опубликования материалов, **отсылается по адресу:** 672007, г. Чита, ул. Бабушкина, 129, Забайкальский государственный гуманитарно-педагогический университет им. Н.Г. Чернышевского, для «Объединенной редакционной коллегии научных журналов ЗабГГПУ».

Редактор И. А. Романов  
Переводчик Е. В. Наказная  
Верстка: Г. А. Зенкова

Managing editor I. A. Romanov  
Translator E. V. Nakaznaya  
Make-up: G. A. Zenkova

Формат 60×84 1/8. Бумага офсетная.  
Гарнитура «Times». Сдано в печать 15.09.12.  
Усл. печ. 9,4.  
Усл. изд. л. 20,3.  
Тираж 1000 экз.  
Заказ № 11112  
Забайкальский государственный  
гуманитарно-педагогический университет  
им. Н. Г. Чернышевского  
672007, г. Чита, ул. Бабушкина, 129

Format 60×84 1/8. Offset paper  
Headset "Times". Signed to print 15.09.12.  
Con. quires 9,4  
Con. pub. quires 20,3  
Circulation 1000 copies  
Order # 11112  
Zabaikalsky State Humanitarian  
Pedagogical University  
named after N. G. Chernyshevsky,  
672007, Chita, 129 Babushkin St.