

УДК 519.83
ББК 22.1

Людмила Ивановна Трухина,
аспирант,
Читинский институт Байкальского государственного университета
экономики и права
(Чита, Россия), e-mail: lit-79@mail.ru

Принцип дележса для коммуникационной игры

Кооперативные игры с частичной кооперацией покрывают более широкий класс реальных ситуаций, чем классические модели кооперативных игр, где каждое подмножество множества игроков может сформировать коалицию. В данной работе рассмотрена игра с ограниченными возможностями кооперации, представленными ненаправленным коммуникационным графом. Для игры, в которой граф является деревом, построена характеристическая функция. Предложена процедура получения дележа и доказано, что полученный в результате делёж совпадает с вектором Майерсона. Показано, что полученные результаты могут быть использованы в игре с произвольным графом.

Ключевые слова: вектор Майерсона, коммуникационный граф, ограниченная игра, частичная кооперация.

Luydmila Ivanovna Trukhina,
Graduate Student,
Chita Institute of Baikal State University of Economy and Law
(Chita, Russia), e-mail: lit-79@mail.ru

Allocation Principle for the Communication Game

Cooperative games with partial cooperation cover a wider class of real situations than classical models of cooperative games where every subset of a set of players can form a coalition. This paper considers the game with limited cooperation possibilities represented by an undirected communication graph. For the game in which the graph is a tree, the characteristic function is constructed. The paper offers the procedure of allocation reception and proves that the received allocation coincides with Myerson vector. The obtained results can be used in the game with any graph.

Keywords: Myerson vector, communication graph, restricted game, partial cooperation.

Введение

Ситуация, в которой любое подмножество множества N игроков может сформировать коалицию и сотрудничать, получая определённые выплаты, может быть описана кооперативной игрой с трансферальной полезностью (TU-игрой). Однако, существует много реальных ситуаций, для которых требуется модель, принимающая во внимание ограничения в сотрудничестве. В этой статье мы рассматриваем TU-игру с ограниченной кооперацией, представленной ненаправленным коммуникационным графом, введённую Майерсоном [3]. Вершины графа представляют игроков, а рёбра представляют связи между игроками. Игроки могут взаимодействовать напрямую только если они связаны. Понятие «связи» при этом может интерпретироваться весьма широко: её наличие может обозначать передачу информации или ресурсов между игроками, отношения сотрудничества и дружбы, связь может быть транспортной или описывать взаимное влияние и подчинённость. Вершины могут быть отдельными людьми, организациями, странами или веб-страницами. Это приводит к так называемой коммуникационной (сетевой) игре, заданной тройкой, состоящей из конечного множества игроков, характеристической функции и графа.

Основные определения

Пусть $N = \{1, 2, \dots, n\}$ множество игроков. Через 2^N обозначим множество всех его подмножеств.

Кооперативной игрой n лиц будем называть пару $\langle N; v \rangle$, где $N = \{1, 2, \dots, n\}$ — множество игроков, а $v: 2^N \rightarrow R$ отображение, предписывающее каждой коалиции $S \in 2^N$ некоторое численное значение такое, что $v(\emptyset) = 0$. Функция v называется характеристической функцией кооперативной игры [1].

Ненаправленный граф $g = (N, E)$ состоит из множества вершин N и множества рёбер E . Рёбра представляют неупорядоченные пары вершин, которые мы будем обозначать ij , и $ij \in E$ означает, что вершины $i \in N$ и $j \in N$ связаны в графе g .

Вершины графа идентифицируются с игроками, а ребро графа ij означает, что игроки i и j могут взаимодействовать напрямую, если и только если $ij \in g$.

Для графа g последовательность различных вершин $\{i_1, \dots, i_k\}$, $k \geq 2$ есть путь от i_1 до i_k , если для всех $h = 1, \dots, k-1$, $i_h i_{h+1} \in g$. Длина пути l — число рёбер в нём, $l = k - 1$. Расстоянием между двумя вершинами является длина минимального пути между этими вершинами.

Граф g на множестве игроков N связный, если для любых двух вершин существует путь в g от одной вершины к другой.

Коалиция S связна, если любая пара игроков в S связана путём, состоящим только из игроков данной коалиции.

Связный компонент — максимальное связное подмножество. $N|g$ означает множество всех связных компонентов в g .

Вектор Майерсона

Пусть дана кооперативная игра v с множеством игроков N и граф g , вершинами которого являются игроки. Для каждого игрока i , данного графа g и характеристической функции v вектор Майерсона $Y_i(v, g)$ определяется следующими аксиомами:

A1. Если S связный компонент, то сумма выигрышей игроков коалиции S равна ценности всей коалиции, т.е $\forall S \in N|g$

$$\sum_{i \in S} Y_i(v, g) = v(S).$$

A2. $\forall g, \forall ij \in g$ оба игрока одинаково получают выгоду или теряют от создания связи

$$Y_i(v, g) - Y_i(v, g - ij) = Y_j(v, g) - Y_j(v, g - ij).$$

Если для любой коалиции S определить характеристическую функцию как

$$v_g(S) = \sum_{T \in S|g} v(T),$$

то вектор Майерсона может быть вычислен по формуле

$$Y_i^{MV}(v, g) = \sum_{S \subset N \setminus \{i\}} (v_g(S \cup i) - v_g(S)) \frac{s!(n-s-1)!}{n!},$$

где $s = |S|$, $n = |N|$.

Характеристическая функция

Рассмотрим игру, в которой граф является деревом T , состоящим из n вершин, а характеристическая функция задаётся подобно схеме, предложенной Джексоном [2, с. 32]: за каждую прямую связь — путь длиной 1 — коалиция получает r , за каждый путь длиной 2 — r^2 , за путь длиной 3 — r^3 и т. д. Для любой коалиции S можно записать

$$v(S) = a_1 r + a_2 r^2 + \dots + a_k r^k + \dots + a_L r^L = \sum_{k=1}^L a_k r^k,$$

где L — максимальное расстояние между двумя вершинами в данной коалиции;
 a_k — число путей длины k в данной коалиции.

$$v(i) = 0, \forall i \in N.$$

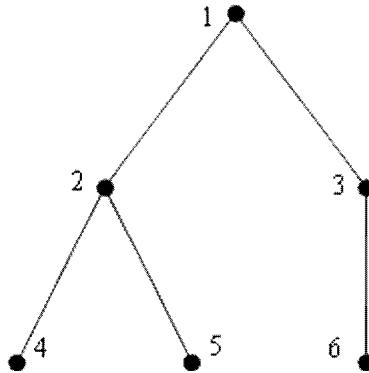


Рис. 1. Дерево

Пример 1.

Для дерева на рис. 1 $L = 4$, $a_1 = 5$, $a_2 = 5$, $a_3 = 3$, $a_4 = 2$. Характеристическая функция для гранд-коалиции равна

$$v(N) = 5r + 5r^2 + 3r^3 + 2r^4.$$

Для коалиции $S = \{1, 2, 4, 5\}$ $L = 2$, $a_1 = 3$, $a_2 = 3$ и характеристическая функция равна

$$v(S) = 3r + 3r^2.$$

Принцип дележа

Опишем процедуру получения дележа для произвольного игрока i .

Шаг 1. Два напрямую связанных игрока получают r . По отдельности они не получат ничего, поэтому каждый из них вправе рассчитывать на половину, т.е. выигрыш составит $\frac{r}{2}$. Но если игрок участвует в нескольких таких связях, то он получит $\frac{r}{2}$ от каждой. Значит, его выигрыш нужно умножить на количество путей длины 1, содержащих этого игрока.

Шаг 2. Чтобы получить r^2 нужен путь из трёх игроков. Без любого из них коалиция заработает меньше, поэтому каждый из трёх должен получить $\frac{r^2}{3}$ от всех путей длины 2, проходящих через него.

Рассуждая аналогичным образом и суммируя выигрыши каждого шага, получим делёж:

$$Y_i(v, g) = \frac{A_i(1)}{2}r + \frac{A_i(2)}{3}r^2 + \cdots + \frac{A_i(L)}{L+1}r^L = \sum_{k=1}^L \frac{A_i(k)}{k+1}r^k,$$

где $A_i(k)$ — число путей длины k , содержащих игрока i .

Пример 2.

Найдём выигрыши игрока 2 из примера 1. Перечислим все пути, содержащие игрока 2. Пути длиной 1: $\{1, 2\}$, $\{2, 4\}$, $\{2, 5\}$, т.е. $A_2(1) = 3$. Пути длиной 2: $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 2, 5\}$, $\{4, 2, 5\}$, $\{2, 1, 3\}$, $A_2(2) = 4$. Пути длиной 3: $\{3, 1, 2, 4\}$, $\{3, 1, 2, 5\}$, $\{2, 1, 3, 6\}$, $A_2(3) = 3$. Пути длиной 4: $\{4, 2, 1, 3, 6\}$, $\{5, 2, 1, 3, 6\}$, $A_2(4) = 2$. Тогда

$$Y_2 = \frac{3}{2}r + \frac{4}{3}r^2 + \frac{3}{4}r^3 + \frac{2}{5}r^4.$$

Покажем, что предложенный нами делёж удовлетворяет аксиомам А1 и А2, и, следовательно, является вектором Майерсона. Начнём с аксиомы А1.

$$\begin{aligned} \sum_{i \in S} Y_i(v, g) &= \sum_{i \in S} \left(\frac{A_i(1)}{2}r + \frac{A_i(2)}{3}r^2 + \cdots + \frac{A_i(k)}{k+1}r^k + \cdots + \frac{A_i(L)}{L+1}r^L \right) = \\ &= \frac{\sum_{i \in S} A_i(1)}{2}r + \frac{\sum_{i \in S} A_i(2)}{3}r^2 + \cdots + \frac{\sum_{i \in S} A_i(k)}{k+1}r^k + \cdots + \frac{\sum_{i \in S} A_i(L)}{L+1}r^L. \end{aligned}$$

Рассмотрим путь $\{j, k\}$. С одной стороны он является путём длины 1, содержащим игрока j , с другой стороны это путь длины 1, содержащий игрока k . То есть в сумме $\sum_{i \in S} A_i(1)$ каждый путь подсчитан 2 раза. Аналогично в сумме $\sum_{i \in S} A_i(2)$ каждый путь подсчитан 3 раза. И т. д. Тогда получим:

$$\frac{2a_1}{2}r + \frac{3a_2}{3}r^2 + \cdots + \frac{(k+1)a_k}{k+1}r^k + \cdots + \frac{(L+1)a_L}{L+1}r^L = \\ a_1r + a_2r^2 + \cdots + a_kr^k + \cdots + a_Lr^L,$$

т. е. $\forall S \in N | g \sum_{i \in S} Y_i(v, g) = v(S)$.

Теперь покажем, что делёж удовлетворяет аксиоме А2.

Пусть L длина максимального пути в дереве T (рис. 2a). Тогда

$$Y_i(v, g) = \sum_{k=1}^L \frac{A_i(k)}{k+1} r^k,$$

$$Y_j(v, g) = \sum_{k=1}^L \frac{A_j(k)}{k+1} r^k.$$

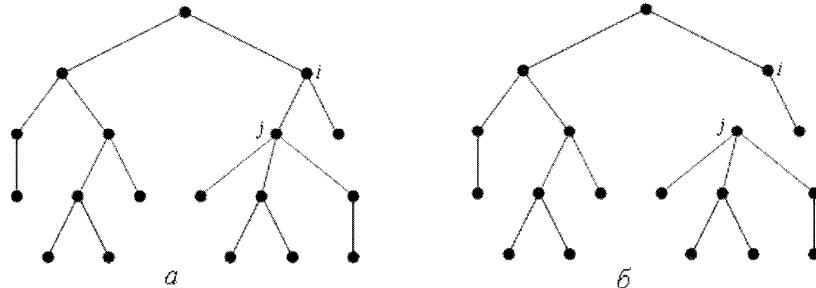


Рис. 2. а) дерево T ; б) дерево $T - ij$

Если удалить связь между вершинами i и j , то получим дерево $T - ij$, состоящее из двух деревьев: T_1 – дерево, содержащее игрока i , T_2 – дерево, содержащее игрока j (рис. 2б). Тогда

$$Y_i(v, g - ij) = \sum_{k=1}^{L_1} \frac{B_i(k)}{k+1} r^k,$$

где L_1 – длина максимального пути в дереве T_1 ,

$B_i(k)$ – число путей длины k в дереве T_1 , содержащих игрока i .

$$Y_j(v, g - ij) = \sum_{k=1}^{L_2} \frac{C_j(k)}{k+1} r^k,$$

где L_2 – длина максимального пути в дереве T_2 ,

$C_j(k)$ – число путей длины k в дереве T_2 , содержащих игрока j .

Для игрока i приращение выигрыша равно

$$Y_i(v, g) - Y_i(v, g - ij) = \sum_{k=1}^L \frac{A_i(k)}{k+1} r^k - \sum_{k=1}^{L_1} \frac{B_i(k)}{k+1} r^k = \\ = \sum_{k=1}^{L_1} \frac{A_i(k) - B_i(k)}{k+1} r^k + \sum_{k=L_1+1}^L \frac{A_i(k)}{k+1} r^k.$$

Предположим, что $L_1 > L_2$ и разобъём выражение на три части.

$$\sum_{k=1}^{L_2} \frac{A_i(k) - B_i(k)}{k+1} r^k + \sum_{k=L_2+1}^{L_1} \frac{A_i(k) - B_i(k)}{k+1} r^k + \sum_{k=L_1+1}^L \frac{A_i(k)}{k+1} r^k.$$

Представим $A_i(k)$ в виде суммы

$$A_i(k) = A_i(k)_1 + A_i(k)_2,$$

где $A_i(k)_1$ – число путей длины k , содержащих вершину i и проходящих через j ,
 $A_i(k)_2$ – число путей длины k , содержащих вершину i и не проходящих через j .

Все пути, содержащие вершину i , но не содержащие j , принадлежат дереву T_1 , следовательно $A_i(k)_2 = B_i(k)$. С учётом этого получим:

$$Y_i(v, g) - Y_i(v, g - ij) = \sum_{k=1}^{L_2} \frac{A_i(k)_1}{k+1} r^k + \sum_{k=L_2+1}^{L_1} \frac{A_i(k)_1}{k+1} r^k + \sum_{k=L_1+1}^L \frac{A_i(k)}{k+1} r^k.$$

Для игрока j приращение выигрыша равно

$$\begin{aligned} Y_j(v, g) - Y_j(v, g - ij) &= \sum_{k=1}^L \frac{A_j(k)}{k+1} r^k - \sum_{k=1}^{L_2} \frac{C_j(k)}{k+1} r^k = \\ &= \sum_{k=1}^{L_2} \frac{A_j(k) - C_j(k)}{k+1} r^k + \sum_{k=L_2+1}^L \frac{A_j(k)}{k+1} r^k. \end{aligned}$$

Это выражение также разобьём на три части.

$$\sum_{k=1}^{L_2} \frac{A_j(k) - C_j(k)}{k+1} r^k + \sum_{k=L_2+1}^{L_1} \frac{A_j(k)}{k+1} r^k + \sum_{k=L_1+1}^L \frac{A_j(k)}{k+1} r^k.$$

Представим $A_j(k)$ в виде суммы

$$A_j(k) = A_j(k)_1 + A_j(k)_2,$$

где $A_j(k)_1$ – число путей длины k , содержащих вершину j и проходящих через i ,
 $A_j(k)_2$ – число путей длины k , содержащих вершину j и не проходящих через i .

Все пути, содержащие вершину j , но не содержащие i , принадлежат дереву T_2 , следовательно $A_j(k)_2 = C_j(k)$. Учитывая это, получим

$$Y_j(v, g) - Y_j(v, g - i, j) = \sum_{k=1}^{L_2} \frac{A_j(k)_1}{k+1} r^k + \sum_{k=L_2+1}^{L_1} \frac{A_j(k)}{k+1} r^k + \sum_{k=L_1+1}^L \frac{A_j(k)}{k+1} r^k.$$

Так как и $A_i(k)_1$ и $A_j(k)_1$ – число путей, которые содержат пару i, j , то они равны, следовательно, $\sum_{k=1}^{L_2} \frac{A_i(k)_1}{k+1} r^k = \sum_{k=1}^{L_2} \frac{A_j(k)_1}{k+1} r^k$. Любые пути, содержащие игрока j , длиной больше L_2 должны содержать игрока i , значит $\sum_{k=L_2+1}^{L_1} \frac{A_i(k)_1}{k+1} r^k = \sum_{k=L_2+1}^{L_1} \frac{A_j(k)}{k+1} r^k$. Любые пути, длиной больше L_1 должны содержать и игрока i и игрока j , значит $\sum_{k=L_1+1}^L \frac{A_i(k)}{k+1} r^k = \sum_{k=L_1+1}^L \frac{A_j(k)}{k+1} r^k$. Отсюда следует, что

$$Y_i(v, g) - Y_i(v, g - ij) = Y_j(v, g) - Y_j(v, g - ij).$$

Для случая $L_1 \leq L_2$, рассуждения аналогичные.

Общий случай

Рассмотрим игру с произвольным графом g , состоящим из n вершин. В отличие от дерева любые две вершины могут быть связаны несколькими путями разной длины. При построении характеристической функции будем учитывать только минимальные пути. А если две вершины связаны несколькими путями одинаковой длины, то учитываются все такие пути, при условии, что между ними нет другого меньшего пути. Например, для графа, изображённого на рис. 3, характеристическая функция для гранд-коалиции строится следующим образом. Пути длиной 1: $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}$, т. е. $a_1 = 5$. Пути длиной 2: $\{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}$ связывают 1 и 4, так как между этими вершинами нет прямой связи, то считаем оба пути. Путь $\{1, 2, 3\}$ не считаем, так как между

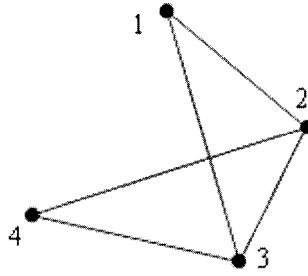


Рис. 3. Произвольный граф

1 и 3 есть прямая связь, {2, 3, 4} не считаем, так как 2 и 4 также связаны напрямую. Т. е. $a_2 = 2$. Путь {1, 2, 3, 4} не считаем, так как между 1 и 4 есть путь меньшей длины. Получим следующую характеристическую функцию.

$$v(N) = 5 \cdot r + 2 \cdot r^2.$$

Для любой коалиции S можно записать

$$v(S) = a_1r + a_2r^2 + \cdots + a_kr^k + \cdots + a_Lr^L = \sum_{k=1}^L a_kr^k,$$

где L – максимальное расстояние между двумя вершинами в данной коалиции; a_k – число путей длины k в данной коалиции.

$$v(i) = 0, \forall i \in N.$$

Покажем, что и для данной игры описанный выше делёж является вектором Майерсона. Аксиома A1 доказывается также? как для дерева.

Аксиома A2.

Пусть граф h получается из графа g удалением связи ij , т.е. $h = g - ij$. Если после удаления ребра ij мы получим граф, состоящий из двух компонент (подграфов), то аксиома A2 доказывается аналогично. Если нет, то граф остаётся связным. Пусть длина максимального пути L не изменилась, тогда приращение выигрыша игрока i равно

$$Y_i(v, g) - Y_i(v, h) = \sum_{k=1}^L \frac{A_i(k)}{k+1} r^k - \sum_{k=1}^L \frac{B_i(k)}{k+1} r^k = \sum_{k=1}^L \frac{A_i(k) - B_i(k)}{k+1} r^k,$$

а приращение выигрыша игрока j

$$Y_j(v, g) - Y_j(v, h) = \sum_{k=1}^L \frac{A_j(k)}{k+1} r^k - \sum_{k=1}^L \frac{B_j(k)}{k+1} r^k = \sum_{k=1}^L \frac{A_j(k) - B_j(k)}{k+1} r^k.$$

Если путь длины k проходил через ребро ij , то при удалении этого ребра число таких путей сократится одинаково и для i и для j . Но так как граф связный, то добавятся новые пути длиной больше k , соединяющие какие-либо две вершины (как минимум это маршруты, соединяющие вершины i и j). Такие пути должны содержать обе вершины i и j , иначе они уже учтены в $A_i(k)$ и $A_j(k)$. То есть число новых путей и у игрока i и у игрока j должно быть одинаковым. Из вышесказанного следует, что $A_i(k) - B_i(k) = A_j(k) - B_j(k)$. И окончательно

$$Y_i(v, g) - Y_i(v, h) = Y_j(v, g) - Y_j(v, h).$$

Если длина максимального пути уменьшилась или увеличилась, то рассуждения аналогичные.

Обе аксиомы выполняются, следовательно, предложенный делёж является вектором Майерсона и для игры с произвольным графом.

Список литературы

1. Мазалов В. В. Математическая теория игр и приложения: учеб. пособие. СПб.: Лань, 2010. 448 с.
2. Jackson M. O. Social and economic networks. Princeton University Press, 2008. 647 с.
3. Myerson R. B. Graphs and cooperation in games // Mathematics of Operations Research, 1977. № 2. С. 225–229.

Статья поступила в редакцию 17.02.2012 г.