ББК В 183.3
УДК 519.83

Юлия Сергеевна Токарева,
кандидат физико-математических наук,
Забайкальский государственный гуманитарно-педагогический университет
им. Н. Г. Чернышевского (Чита, Россия), e-mail: jtokareva2@mail.ru

Оценивание параметров арбитражной процедуры с неполной информацией[1]

В данной работе исследована модель переговоров двух лиц с неполной информацией. Игроки – работодатель и профсоюз – для разрешения конфликта обращаются к арбитражному комитету. Полагая, что в игре с нулевой суммой игрокам неизвестны или частично известны параметры распределений мнений членов комитета, найдена оценка размера интервала, определяемого оптимальными стратегиями игроков. Рассмотрен случай нечетного числа членов комитета, мнения которых имеют нормальное распределение с известным математическим ожиданием и неизвестным средним квадратическим отклонением, которое в свою очередь моделируется случайной величиной. Для этого случая приведены значения оценки размера интервала между оптимальными стратегиями игроков. Данные значения могут быть использованы для определения минимального количества членов арбитражного комитета, необходимого для выполнения определенных условий.

Ключевые слова: игра с нулевой суммой, переговоры, неполная информация, арбитражный комитет

Yulia Sergeevna Tokareva,
Candidate of Physics and Mathematics,
Zabaikalsky State Humanitarian Pedagogical University
named after N. G. Chernyshevsky (Chita, Russia),e-mail: jtokareva2@mail.ru

Estimating the Parameters of the Arbitration Procedure with Incomplete Information

The paper considers the bargaining model of two persons with incomplete information. The players – a manager and a Labor Union representative – address the arbitration committee to resolve the conflict. Supposing that in a zero-sum game the players do not know or know partially the parameters of the distributions of the committee members' opinions, the article assesses the interval size defined by the optimum players' strategies. It considers a case with an odd number of committee members whose opinions have a normal distribution with a known mean value and an unknown standard square deviation that, in its turn, is modeled by a random variable. The article presents the size of the interval between the optimum players' strategies. These values can be used to define the minimum number of arbitration committee members to perform certain conditions.

Keywords: zero-sum game, negotiations, incomplete information, arbitration committee.

Введение

Теоретико-игровые модели переговоров с применением арбитражных схем часто используются при разрешении конфликтов в экономике, политике, спорте и т. д. Например, это может быть ситуация, когда работник и работодатель спорят о размере заработной платы. В случае, когда стороны не могут самостоятельно придти к консенсунсу, они обращаются к третьей независимой стороне – арбитру или нескольким арбитрам (арбитражному комитету). Считается, что арбитр справедлив к обоим игрокам и действует согласно своим этическим принципам.

Рассматривается игра с нулевой суммой. Два игрока – Профсоюз (игрок I) и Работодатель (игрок II) – ведут переговоры об увеличении заработной платы работников. Игрок I хочет максимизировать требуемое значение, а игрок II – минимизировать. Игроки одновременно называют

[1]Работа выполнена в рамках Государственного задания вузу Минобрнауки РФ, № 8.3641.2011.

свои предложения, характеризующиеся, соответственно, числами $x \in R$ и $y \in R$. Если $x \leq y$, то игроки разрешают спор самостоятельно и соглашаются на значение $\frac{x+y}{2}$. В противном случае стороны обращаются к арбитражному комитету, состоящему из нескольких членов N.

Мнение каждого i-го члена комитета представляет собой случайную величину z_i с непрерывной функцией распределения F_i $(i = 1, ..., N)$. Предположим, что при выборе игрока-победителя комитет использует правило арбитражной процедуры по последнему предложению (final-offer arbitration procedure) [1; 3; 4; 6; 7]. Каждый член комитета, заслушав предложения игроков, выбирает то, которое оказывается ближе к его мнению. Выигрывает тот игрок, предложение которого оказалось ближе к мнениям большинства членов комитета.

В работе [8] рассмотрен подход к решению задачи с несколькими членами арбитражного комитета в игре с арбитром по последнему предложению, а в работе [2] – с его модификацией. В данных работах рассматривалась игра с полной информацией с нечетным числом членов комитета $N = 2n-1$. В случае, когда медианы функций распределений мнений арбитров равны между собой, были получены оптимальные стратегии игроков вида

$$y^* = m - \Delta, \; x^* = m + \Delta, \tag{1}$$

где

$$\Delta = \left[\binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-3} \sum_{i=1}^{2n-1} f_i(m) \right]^{-1},$$

x^* – оптимальная стратегия игрока I, y^* – оптимальная стратегия игрока II, m – медиана каждого из распределений F_i, f_i– плотности соответствующих распределений F_i.

В частности, если распределения мнений членов комитета представляют собой нормальные распределения с медианой m и различными среднеквадратическими отклонениями σ_i $(i = \overline{1, N})$ при $N = 2n - 1$, то

$$\Delta = \frac{\sqrt{2\pi}}{8} \frac{1}{\binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \left(\frac{1}{\sigma_1} + ... + \frac{1}{\sigma_N}\right)}. \tag{2}$$

Если мнения членов комитета имеют одинаковые распределения, то наилучшими предложениями игроков будут (1) при

$$\Delta = \left[\binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-3} nf(m) \right]^{-1}.$$

Отметим, что при увеличении числа членов комитета расстояние между оптимальными предложениями игроков уменьшается и при $N \to \infty$ сходится к 0.

В работе [5] рассматривается арбитраж с частичной информацией, в котором игрокам неизвестны распределения арбитров, но известно окончательное решение членов арбитражного комитета. Игроки основываются на истории предшествующих k арбитражей. Предполагается, что мнения арбитров являются случайными величинами с распределением, зависящим от некоторого неизвестного параметра, и производится оценка этого параметра.

В данной работе рассматривается игра с нулевой суммой, в которой игрокам неизвестны или частично известны параметры распределений мнений N членов комитета с функциями распределениями $F_1, ..., F_N$, и производится оценка размера интервала $x^* - y^* = 2\Delta$, определяемого оптимальными стратегиями игроков. Будем искать решение в данной арбитражной игре в терминах задачи о зарплате, однако этот подход может быть применен и для других задач распределения ресурсов с участием арбитра.

Оценивание параметров

Предположим, что игрокам известно о том, что мнения арбитров имеют нормальное распределение с известным математическим ожиданием m и неизвестным среднеквадратическим отклонением σ_i $(i = \overline{1, N})$. Рассмотрим случай нечетного количества членов арбитражного комитета, т. е. $N = 2n - 1$.

Пусть $\sigma_1, ..., \sigma_N$ - независимые одинаково распределенные случайные величины. Тогда, оценим интервал (2), определяемый оптимальными стратегиями

$$E\Delta_0 = E\left(\frac{1}{\frac{1}{\sigma_1} + ... + \frac{1}{\sigma_N}}\right),$$

где E – математическое ожидание.

Имеет место равенство

$$E\left(\frac{1}{\eta}\right) = \int_0^\infty \varphi_\eta(\lambda)d\lambda,$$

где $\varphi_\eta(\lambda) = E[\exp(-\lambda\eta)]$ преобразование Лапласа. В нашем случае

$$\eta = \eta_1 + ... + \eta_N$$

и

$$\eta_1 = \frac{1}{\sigma_1}, ..., \eta_N = \frac{1}{\sigma_N}$$

есть независимые одинаково распределенные случайные величины, отсюда

$$\varphi_{\eta_1+...+\eta_N}(\lambda) = \varphi_\eta^N(\lambda).$$

Следовательно,

$$E\left(\frac{1}{\frac{1}{\sigma_1} + ... + \frac{1}{\sigma_N}}\right) = \int_0^\infty \varphi_\eta^N(\lambda)d\lambda.$$

Например, рассмотрим случай, когда $\sigma_1, ..., \sigma_N$ равномерно распределены на отрезке $[0, 1]$. Преобразование Лапласа имеет вид

$$\varphi_\eta(\lambda) = \int_0^1 e^{-\frac{\lambda}{u}}du,$$

тогда

$$E\Delta_0 = E[\frac{1}{\frac{1}{\sigma_1} + ... + \frac{1}{\sigma_N}}] = \int_0^\infty \left(\int_0^1 e^{-\frac{\lambda}{u}}du\right)^N d\lambda.$$

Определим $E\Delta_0$ для больших N. Заменяя аргумент $s = \lambda/u$ получим

$$\int_0^1 e^{-\frac{\lambda}{u}}du = \int_\lambda^\infty e^{-s}\frac{\lambda}{s^2}ds.$$

Интегрируем по частям и получаем

$$\int_\lambda^\infty e^{-s}\frac{\lambda}{s^2}ds = e^{-\lambda} - \lambda\int_\lambda^\infty \frac{e^{-s}}{s}ds.$$

Отсюда

$$E\Delta_0 = \int_0^\infty \left(\int_0^1 e^{-\frac{\lambda}{u}}du\right)^N d\lambda = \int_0^\infty e^{-\lambda N}\left(1 - \lambda\int_\lambda^\infty \frac{e^{-(s-\lambda)}s}{d}s\right)^N d\lambda \leq$$

$$\int_0^\infty e^{-\lambda N}d\lambda = \frac{1}{N} = \frac{1}{2n-1}.$$

Теперь мы можем оценить

$$E(x^* - y^*) = 2E\Delta = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}\left(\binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right)^{-1} E\Delta_0.$$

Так как

$$\binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi n}},$$

то получаем оценку

$$E(x^* - y^*) \leq \frac{\sqrt{2\pi}}{4}\frac{\sqrt{\pi n}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{2n}}{2n-1} \leq \frac{\pi}{4}\frac{1}{\sqrt{N-1}}.$$

Таким образом, ожидаемый интервал между оптимальными предложениями оценивается как

$$\frac{\pi}{4}\frac{1}{\sqrt{N-1}} \approx 0.785/\sqrt{N-1}.$$

Допустим мы хотим определить достаточное количество членов арбитражного комитета, гарантирующее выполнение

$$E(x^* - y^*) \leq \epsilon. \tag{3}$$

Из (3) следует, что

$$N \geq 1 + \left(\frac{\pi}{4\epsilon}\right)^2.$$

В Таблице 1 приведены значения данной оценки для различных n.

Таблица 1

Ожидаемый интервал между оптимальными предложениями

n	2	3	4	5	6	7
$E(x^* - y^*)$	1,026	0,606	0,557	0,418	0,397	0,326
n	8	9	10	11	12	13
$E(x^* - y^*)$	0,314	0,271	0,263	0,233	0,228	0,206

Таким образом, можно оценить разброс между оптимальными предложениями конфликтующих сторон в зависимости от количества арбитров. Как видно из таблицы, при увеличении числа членов арбитражного комитета интервал между оптимальными стратегиями игроков уменьшается.

Заключение

Практическое значение результатов, полученных в работе, обусловлено тем, что в реальной жизни часто оказывается, что параметры распределения мнений членов арбитражного комитета неизвестны или частично известны. В этом случае, важное практическое значение имеет оценка размера интервала, определяемого оптимальными предложениями, найденная в работе. Отметим, что увеличение числа членов арбитражного комитета заставляет предложения игроков сходиться.

Список литературы

1. Менчер А. Э. Дискретная арбитражная процедура с неравномерным распределением вероятностей // Математическая теория игр и ее приложения. 2009. Т. 1. № 4. С. 78–92.

2. Токарева Ю. С. Модифицированная арбитражная процедура по последнему предложению с комитетом // Ученые записки Петрозаводского государственного университета. 2010. № 8. С. 89–92.

3. Chatterjee K. Comparison of arbitration procedures: Models with complete and incomplete information // IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics. 1981. Vol. 11. № 2. P. 101–109.

4. Farber H. An analysis of final-offer arbitration // Journal of conflict resolution. 1980. Vol. 24. № 4. P. 683–705.

5. Gerchak Y., Greenstein E., Weissman I. Estimating arbitrator's hidden judgement in final offer arbitration // Group Decision and Negotiation. 2004. Vol. 13. № 3. P. 291–298.

6. Gibbons R. A Primer in Game Theory. N.Y.: Prentice Hall, 1992. 273 p.

7. Kilgour D. M. Game-theoretic properties of final-offer arbitration // Group Decision and Negotiation. 1994. Vol. 285. № 3. P. 285–301.

8. Mazalov V., Tokareva J. Arbitration procedures with multiple arbitrators // European Journal of Operational Research. 2012. Vol. 217. № 1. P. 198-203 (doi: 10.1016/j.ejor.2011.09.014).

Статья поступила в редакцию 01.03.2012 г.