УДК 517.956
ББК В143

Наталья Николаевна Шадрина,
Забайкальский государственный университет
(Чита, Россия), e-mail: shadrinann8@yandex.ru

О решении третьих краевых задач в кусочно-однородной полуплоскости с трещиной (завесой)[1]

Рассмотрены третьи краевые задачи в кусочно-однородной полуплоскости с двумя линиями разрыва проницаемости, одна из которых параллельна, а другая перпендикулярна границе полуплоскости. Первая линия является идеальным контактом сред, а вторая является сильно проницаемой трещиной или слабо проницаемой завесой. Применяя метод свертывания разложений Фурье, решения задач выражены через решение классической задачи Дирихле в однородной полуплоскости (без трещины и завесы).

Ключевые слова: краевые задачи, кусочно-однородная полуплоскость, трещина, завеса, метод свертывания разложений Фурье.

Natalia Nikolaevna Shadrina,
Trans-Baikal State University
(Chita, Russia), e-mail: shadrinann8@yandex.ru

Solving Third Boundary Value Problems in Piecewise-homogeneous Half-plane with a Crack (Screen)

The article considers the third boundary value problems in the piecewise-homogeneous half-plane with two lines of permeability discontinuity, one of which is parallel and another one is perpendicular to the boundary of the half-plane. The first line is an ideal contact medium, and the second line is a highly permeable fracture or a weakly permeable screen. Applying the method of convolution of Fourier expansions, the problems solutions are expressed in terms of the classical solution of the Dirichlet problem in the homogeneous half-plane (without a crack or a screen).

Keywords: boundary value problems, piecewise-homogeneous half-plane, fracture, screen, method of convolution of Fourier expansions.

1. Случай трещины. Рассмотрим кусочно-однородную полуплоскость $D(y < l, x \in R)$, состоящую из четырёх зон $D_{11}(x < 0, y < 0)$, $D_{21}(x > 0, y < 0)$, $D_{12}(x < 0, 0 < y < l)$, $D_{22}(x > 0, 0 < y < l)$ с различной проницаемостью k_{ij} в D_{ij}, когда зоны D_{1j} и D_{2j} разделены сильно проницаемой трещиной $x = 0$, а контакт зон D_{i1} и D_{i2} идеальный. В данной полуплоскости для потенциалов u_{ij} в D_{ij} рассмотрим третью краевую задачу с однородным граничным условием в D_{12} вида [1; 2]:

$$\Delta u_{ij} = 0, \qquad \partial_y u_{12} + h u_{12\,|y=l} = 0, \qquad \partial_y u_{22} + h u_{22\,|y=l} = f(x), \tag{1}$$

$$x = 0: \qquad u_{2j} = u_{1j}, \qquad r\partial_x u_{2j} - \partial_x u_{1j} = A\partial_x^2 u_{1j}, \qquad j = 1, 2, \tag{2}$$

$$y = 0: \qquad u_{i2} = u_{i1}, \qquad k_{12}\partial_y u_{i2} = k_{11}\partial_y u_{i1}, \qquad i = 1, 2, \tag{3}$$

где $k_{2j} = k_{1j} r$, A – параметр трещины [3, 4], $h = const > 0$. Наряду с задачей (1)–(3) рассмотрим классическую задачу Дирихле в однородной полуплоскости $D(y < l)$ (без трещины) с граничной функцией (1):

$$\Delta F = 0, \qquad (x, y) \in D; \qquad F_{|y=l} = \varphi(x) = \begin{cases} f(x), & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}, \tag{4}$$

[1]Работа выполнена в рамках Государственного задания вузу Минобрнауки РФ, № 1.3985.2011.

решение которой строится по формуле Пуассона [1; 2] и далее считается известной функцией $F(x,y)$. Методом свёртывания разложений Фурье [3' 4] выразим решение задачи (1)–(3) через функцию $F(x,y)$.

Предположим, что граничная функция $\varphi(x)$ (4) разлагается в интеграл Фурье:

$$\varphi(x) = \int_0^\infty g(x,\lambda)d\lambda, \qquad g(x,\lambda) = f_1 \sin\lambda x + f_2 \cos\lambda x, \tag{5}$$

где $f_i(\lambda)$ - коэффициенты Фурье функции $\varphi(x)$. Отсюда, решая задачу Дирихле (4) методом Фурье, представим функцию $F(x,y)$ в виде интеграла Фурье:

$$F(x,y) = \int_0^\infty e^{\lambda(y-l)} g d\lambda, \qquad y \le l. \tag{6}$$

Представим искомые функции $u_{ij}(x,y)$ в виде функций, тождественно удовлетворяющих обобщенным условиям сопряжения на трещине (2) [5]:

$$u_{2j}(x,y) = U_j(x,y) - U_j(-x,y) + \frac{2r}{A}\int_0^\infty e^{-\gamma t} U_j(-x-t,y)dt, \qquad x > 0, \tag{7}$$

$$u_{1j}(x,y) = \frac{2r}{A}\int_0^\infty e^{-\gamma t} U_j(x-t,y)dt, \qquad x < 0, \tag{8}$$

где

$$\gamma = \frac{r+1}{A}.$$

Отсюда для функций $U_j(x,y)$ получим задачу в кусочно-однородной полуплоскости $D(y<l)$, состоящей из двух зон $G_1(y<0)$ и $G_2(0<y<l)$, $x \in R$, вида

$$\Delta U_j = 0, \qquad (x,y) \in G_j; \qquad \partial_y U_2 + hU_{2\,|y=l} = \varphi(x) = \begin{cases} f(x), & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}, \tag{9}$$

$$y = 0: \qquad U_2 = U_1, \qquad k_{12}\partial_y U_2 = k_{11}\partial_y U_1. \tag{10}$$

Представим решение этой задачи в виде

$$U_1(x,y) = \int_0^\infty a_1\, e^{\lambda y} g\, d\lambda, \qquad U_2 = \int_0^\infty (a_2 \operatorname{sh}\lambda y + b \operatorname{ch}\lambda y) g d\lambda, \tag{11}$$

при этом функции (11) удовлетворяют уравнению (9). Из граничного условия (9) и условий сопряжения (10) с учётом разложения (5) для параметров a_i, b получим систему алгебраических уравнений $\lambda(a_2 c + bs) + h(a_2 s + bc) = 1$, $b = a_1$, $k_{12}a_2 = k_{11}a_1$, решение которой имеет вид

$$a_1 = b = \frac{k_{12}}{d}, \qquad a_2 = \frac{k_{11}}{d},$$

где

$$d = k_{11}(\lambda c + hs) + k_{12}(\lambda s + hc), \tag{12}$$

$s = \operatorname{sh}\lambda l$, $c = \operatorname{ch}\lambda l$, при этом $d > 0$ при $0 \le \lambda < \infty$. Из равенства (12) следует

$$\frac{1}{d} = \frac{2e^{-\lambda l}}{(\lambda+h)(k_{11}+k_{12})(1-q)} = \frac{2}{k_{11}+k_{12}} \sum_{n=0}^\infty e^{-\lambda l(2n+1)} \nu^n \frac{(\lambda-h)^n}{(\lambda+h)^{n+1}},$$

где

$$q = \frac{\lambda - h}{\lambda + h} e^{-2l\lambda}\nu, \qquad \nu = \frac{k_{12} - k_{11}}{k_{12} + k_{11}},$$

здесь дробь $(1-q)^{-1}$ разложена в геометрическую прогрессию ($|q| < 1$ при $0 \le \lambda < \infty$). Тогда функции $U_i(x,y)$ (11) примут вид

$$U_1 = (1+\nu)\sum_{n=0}^{\infty}\nu^n \int_0^{\infty} e^{\lambda(y-2nl-l)}\frac{(\lambda-h)^n}{(\lambda+h)^{n+1}}\, g d\lambda, \tag{13}$$

$$U_2 = \sum_{n=0}^{\infty}\nu^n \int_0^{\infty}\left[e^{\lambda(y-2nl-l)} + \nu e^{-\lambda(y+2nl+l)}\right]\frac{(\lambda-h)^n}{(\lambda+h)^{n+1}}\, g d\lambda. \tag{14}$$

Приведём полученные функции к виду, не содержащему разложений Фурье. Из разложения функции $F(x,y)$ (6) следует равенство

$$F(x, y+l-t) = \int_0^{\infty} e^{\lambda(y-t)} g d\lambda, \qquad y < 0, \qquad t > 0.$$

Отсюда аналогично работам [3; 4] получим формулу

$$\frac{(-1)^k}{n!}\int_0^{\infty} e^{-2ht}t^n\partial_t^k[e^{ht}F(x,y+l-t)]dt = \int_0^{\infty} e^{\lambda y}\frac{(\lambda-h)^k}{(\lambda+h)^{n+1}} g d\lambda, \qquad y < 0,$$

где $n = 0, 1, ...,$ $k = 0, 1, ...,$ функция $g(x,\lambda)$ имеет вид (5).

С учётом этой формулы решение (13), (14) задачи (9), (10) непосредственно выражается через функцию $F(x,y)$ (4) без разложений Фурье в виде

$$U_1(x,y) = (1+\nu)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\nu)^n}{n!}\int_0^{\infty} e^{-2ht}t^n\partial_t^n[e^{ht}F(x,y-2nl-t)]dt, \tag{15}$$

$$U_2(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\nu)^n}{n!}\int_0^{\infty} e^{-2ht}t^n\partial_t^n\{e^{ht}[F(x,y-2nl-t) + \nu F(x,-y-2nl-t)]\}dt. \tag{16}$$

Таким образом, решение исходной задачи (1)–(3) строится по формулам (7), (8), (15), (16).

2. Случай завесы. Пусть зоны D_{1j} и D_{2j} разделены слабо проницаемой завесой $x = 0$. Для потенциалов u_{ij} в D_{ij} рассматриваемая задача примет вид (1),(3),

$$x = 0: \qquad u_{2j} - u_{1j} = B\partial_x u_{1j}, \qquad r\partial_x u_{2j} = \partial_x u_{1j}, \qquad j = 1, 2, \tag{17}$$

где B – параметр завесы [3; 4].

Представим решение этой задачи в виде функций, тождественно удовлетворяющих условиям сопряжения на завесе (17) [5]:

$$u_{2j}(x,y) = U_j(x,y) + U_j(-x,y) - \frac{2}{Br}\int_0^{\infty} e^{-\gamma t}U_j(-x-t,y)dt, \qquad x > 0, \tag{18}$$

$$u_{1j}(x,y) = \frac{2}{B}\int_0^{\infty} e^{-\gamma t}U_j(x-t,y)dt, \qquad x < 0, \tag{19}$$

где

$$\gamma = \frac{r+1}{Br}.$$

Отсюда для функций $U_j(x, y)$ получим задачу (9), (10), решение которой стрроится по формулам (15), (16).

Таким образом, решение задачи (1), (3), (17) строится по формулам (18), (19), (15), (16).

Список литературы

1. Арсенин В. Я. Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1974. 431 с.

2. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.

3. Холодовский С. Е. Метод свёртывания разложений Фурье. Случай обобщённых условий сопряжения типа трещины (завесы) в кусочно-неоднородных средах // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 6. С. 855–859.

4. Холодовский С. Е. Метод свёртывания разложений Фурье. Случай трещины (завесы) в неоднородном пространстве // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 8. С. 1204–1208.

5. Холодовский С. Е., Шадрина Н. Н. О решении краевых задач с обобщёнными условиями сопряжения типа трещины (завесы) // Известия вузов. Математика. 2011. № 6. С. 100–106.

Статья поступила в редакцию 03.01.2012 г.