

УДК 517.956
ББК В143

*Наталия Валерьевна Нутчина-Пестрякова,
соискатель,
Южно-Якутский институт железнодорожного транспорта
(Нерюнгри, Россия), e-mail: pestryakovi@mail.ru*

О решении краевых задач в кусочно-однородных областях с двухслойными плёночными включениями¹

Решены различные типы краевых задач для уравнения Лапласа в кусочно-однородных цилиндрах с двухслойной плёнкой, а также задачи с пересекающимися двухслойными плёнками на плоскости. Используя метод свертывания разложений Фурье, решения задач выражены через решение классических задач в однородных цилиндрах или через заданные гармонические функции на плоскости.

Ключевые слова: краевые задачи, метод свертывания разложений Фурье, двухслойные плёночные включения.

*Natalia Valerievna Nutchina-Pestryakova,
Graduate Student,
South Yakutiya Institute of Railway Transport
(Neryungri, Russia), e-mail: pestryakovi@mail.ru*

Solving Boundary Value Problems in Piecewise Homogeneous Regions with Double-layer Film Inclusions

The paper presents solutions of different types of boundary value problems for Laplace equation in a piecewise homogeneous cylinders with the double-layer film, as well as problems with overlapping double-layer films on the plane. Using the method of convolution of Fourier expansions, the problems solutions are expressed in terms of the solution of classical problems in homogeneous cylinders or a set of harmonic functions on the plane.

Keywords: boundary value problems, method of convolution of Fourier expansions, double-layer film inclusions.

Пусть на плоскости x, y задана гармоническая функция $F(x, y)$, имеющая особые точки в полуплоскости $x > 0$. Данная функция описывает установившиеся процессы тепломассопереноса на однородной плоскости, индуцированные заданными особыми точками (источниками, стоками и т. д.).

Задачи на плоскости с двухслойной плёнкой

1. Рассмотрим кусочно-однородную плоскость x, y , состоящую из двух полуплоскостей $D_1(x < 0)$ и $D_2(x > 0)$, $y \in R$ с различной проницаемостью k_i в D_i , когда зоны D_i разделены двухслойной плёнкой $x = 0$ типа сильно проницаемой трещины $x = -0$ с параметром A и слабо-проницаемой завесы $x = +0$ с параметром B [2; 3], при сохранении особых точек функции $F(x, y)$. Задача для потенциалов $u_i(x, y)$ в зонах D_i имеет вид [1-3]:

$$\Delta u_i = 0, \quad i = 1, 2; \quad (1)$$

$$x = 0 : \quad u_2 - u_1 = B k_2 \partial_x u_2, \quad k_2 \partial_x u_2 - k_1 \partial_x u_1 = A \partial_x^2 u_1, \quad (2)$$

при этом функция $u_2(x, y)$ имеет особые точки заданной гармонической функции $F(x, y)$, т. е. в окрестности особых точек выполняется условие

$$u_2(x, y) \sim F(x, y), \quad (3)$$

¹Работа выполнена в рамках Государственного задания вузу Минобрнауки РФ, № 1.3985.2011.

где $\partial_x^n = \partial^n / \partial x^n$. Здесь трещина $x = -0$ и завеса $x = +0$ моделируются бесконечно тонкими слоями с бесконечно большой для трещины и бесконечно малой для завесы проницаемостью [2; 3]. Применяя метод свертывания разложений Фурье [2; 3], выразим решение задачи (1)–(3) через функцию $F(x, y)$. Следуя указанному методу, предположим сначала, что функция $F(0, y)$ разлагается в интеграл Фурье с коэффициентами Фурье f_i :

$$F(0, y) = \int_0^\infty g d\lambda, \quad g(y, \lambda) = f_1 \sin \lambda y + f_2 \cos \lambda y. \quad (4)$$

Отметим, что данное предположение существенно сужает класс особых точек функции $F(x, y)$. Отсюда функция $F(x, y)$ при $x \leq 0$, где она не имеет особых точек, представима в виде

$$F(x, y) = \int_0^\infty e^{\lambda x} g d\lambda, \quad x \leq 0 \quad (5)$$

(функции слева и справа являются решением задачи Дирихле в полуплоскости $D_1(x < 0)$ вида $\Delta u = 0$, $u|_{x=0} = F(0, y)$). Представим решение задачи (1)–(3) также в виде разложений Фурье:

$$u_1 = \int_0^\infty a_1 e^{\lambda x} g d\lambda, \quad x < 0; \quad u_2 = F(x, y) + \int_0^\infty a_2 e^{-\lambda x} g d\lambda, \quad x > 0. \quad (6)$$

Отсюда функции (6) удовлетворяют условиям (1), (3) (при условии сходимости и дифференцируемости интегралов (6)). Из условий сопряжения (2) с учётом (5) для параметров $a_i(\lambda)$ получим систему алгебраических уравнений $1 + a_2 - a_1 = Bk_2\lambda(1 - a_2)$, $k_2(1 - a_2) - k_1a_1 = A\lambda a_1$, решение которой имеет вид

$$a_1 = \frac{2k_2}{d}, \quad a_2 = 1 - \frac{2(A\lambda + k_1)}{d}, \quad (7)$$

где

$$d(\lambda) = ABk_2\lambda^2 + (A + Bk_1k_2)\lambda + k_1 + k_2, \quad (8)$$

при этом $d(\lambda) > 0$ для $0 \leq \lambda < \infty$.

Из разложения функции $F(x, y)$ (5) следует формула, полученная в работах [2; 3]:

$$\frac{1}{n!} \int_0^\infty e^{-\gamma t} t^n F(x - t, y) dt = \int_0^\infty \frac{e^{\lambda x} g}{(\lambda + \gamma)^{n+1}} d\lambda, \quad x < 0, \quad (9)$$

где $\gamma > 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$, функция $g(y, \lambda)$ имеет вид (4).

Пусть квадратный трёхчлен (8) имеет различные корни $-\gamma_i$, т.е. $T \neq 0$, где

$$\gamma_i = \frac{A + Bk_1k_2 + (-1)^i \sqrt{T}}{2ABk_2}, \quad i = 1, 2; \quad T = (A - Bk_1k_2)^2 - 4ABk_2^2,$$

при этом $\operatorname{Re} \gamma_i > 0$. Разлагая правильные дроби (7) на множители, получим

$$a_1 = \frac{2k_2}{\sqrt{T}} \left(\frac{1}{\lambda + \gamma_1} - \frac{1}{\lambda + \gamma_2} \right), \quad a_2 = 1 - \frac{2}{\sqrt{T}} \left(\frac{k_1 - \gamma_1 A}{\lambda + \gamma_1} - \frac{k_1 - \gamma_2 A}{\lambda + \gamma_2} \right).$$

Отсюда с учётом формулы (9) при $n = 0$ решение (6) задачи (1)–(3) приводится к виду:

$$u_1 = \frac{2k_2}{\sqrt{T}} \int_0^\infty F(x - t, y) (e^{-\gamma_1 t} - e^{-\gamma_2 t}) dt, \quad x < 0, \quad (10)$$

$$u_2 = F(x, y) + F(-x, y) -$$

$$- \frac{2}{\sqrt{T}} \int_0^\infty F(-x - t, y) [(k_1 - \gamma_1 A)e^{-\gamma_1 t} - (k_1 - \gamma_2 A)e^{-\gamma_2 t}] dt, \quad x > 0. \quad (11)$$

В случае комплексных корней многочлена (8) функции (10), (11) действительны.

В случае двукратного корня α многочлена (8), т. е. при $T = 0$, с учётом формулы (9) и равенств

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{ABk_2(\lambda + \alpha)^2}, \quad \frac{\lambda A + k_1}{d} = \frac{1}{ABk_2} \left[\frac{k_1 - \alpha A}{(\lambda + \alpha)^2} + \frac{A}{\lambda + \alpha} \right]$$

решение (6), (7) задачи (1)-(3) приводится к виду

$$u_1 = \frac{2}{AB} \int_0^\infty F(x-t, y) e^{-\alpha t} dt, \quad (12)$$

$$u_2 = F(x, y) + F(-x, y) - \frac{2}{ABk_2} \int_0^\infty F(-x-t, y) e^{-\alpha t} [(k_1 - \alpha A)t + A] dt, \quad (13)$$

где

$$\alpha = \frac{A + Bk_1k_2}{2ABk_2} > 0.$$

В полученных формулах (10)–(13) заданная гармоническая функция $F(x, y)$ может иметь произвольные особые точки при $0 < x < \infty$, а при $x \rightarrow -\infty$ она должна удовлетворять условию $|F(x, y)| < ce^{r|x|}$, где $r < \min(\gamma_i)$ и $r < \alpha$ соответственно в случаях $T \neq 0$ (10), (11) и $T = 0$ (12), (13). При указанных условиях интегралы (10)–(13) сходятся и допускает дифференцирование дважды по x, y .

Таким образом, решение задачи (1)–(3) в соответствующих случаях строится по формулам (10)–(13) для широкого класса заданных особых точек.

2. Поменяем местами трещину и завесу в плёнке $x = 0$ при сохранении особых точек функции $F(x, y)$ в полуплоскости $D_2(x > 0)$, т.е. рассмотрим случай завесы $x = -0$ с параметром B и трещины $x = +0$ с параметром A . Для потенциалов $u_i(x, y)$ в зонах D_i проницаемости k_i задача имеет вид (1), (3),

$$x = 0 : \quad u_2 - u_1 = Bk_1 \partial_x u_1, \quad k_2 \partial_x u_2 - k_1 \partial_x u_1 = A \partial_x^2 u_2. \quad (14)$$

Представляя решение этой задачи в виде (6), из условий сопряжения (14) найдем

$$a_1 = \frac{2k_2}{d}, \quad a_2 = -1 + \frac{2k_2(Bk_1\lambda + 1)}{d}, \quad (15)$$

где

$$d(\lambda) = ABk_1\lambda^2 + (A + Bk_1k_2)\lambda + k_1 + k_2. \quad (16)$$

Пусть квадратный трёхчлен (16) имеет различные корни $-\gamma_i$, т.е. $T \neq 0$, где

$$\gamma_i = \frac{A + Bk_1k_2 + (-1)^i \sqrt{T}}{2ABk_1}, \quad i = 1, 2; \quad T = (A - Bk_1k_2)^2 - 4ABk_1^2.$$

Разлагая дроби (15) на множители, получим

$$a_1 = \frac{2k_2}{\sqrt{T}} \left(\frac{1}{\lambda + \gamma_1} - \frac{1}{\lambda + \gamma_2} \right), \quad a_2 = -1 + \frac{2k_2}{\sqrt{T}} \left(\frac{1 - Bk_1\gamma_1}{\lambda + \gamma_1} - \frac{1 - Bk_1\gamma_2}{\lambda + \gamma_2} \right).$$

Отсюда с учётом формулы (9) решение (6) задачи (1), (3), (14) приводится к виду

$$u_1 = \frac{2k_2}{\sqrt{T}} \int_0^\infty F(x-t, y) (e^{-\gamma_1 t} - e^{-\gamma_2 t}) dt, \quad (17)$$

$$u_2 = F(x, y) - F(-x, y) +$$

$$+\frac{2k_2}{\sqrt{T}} \int_0^\infty F(-x-t, y) [(1-Bk_1\gamma_1)e^{-\gamma_1 t} - (1-Bk_1\gamma_2)e^{-\gamma_2 t}] dt. \quad (18)$$

В случае двукратного корня α многочлена (16), т. е. при $T = 0$, с учётом формулы (9) решение (6), (15) задачи (1), (3), (14) примет вид

$$u_1 = \frac{2k_2}{ABk_1} \int_0^\infty F(x-t, y) e^{-\alpha t} dt,$$

$$u_2 = F(x, y) - F(-x, y) + \frac{2k_2}{ABk_1} \int_0^\infty F(-x-t, y) e^{-\alpha t} [(1-Bk_1\alpha)t + Bk_1] dt,$$

где

$$\alpha = \frac{A + Bk_1 k_2}{2ABk_1} > 0.$$

Рассуждая аналогично, в случае одиночной трещины $x = 0$ решение задачи (1)–(3) при $B = 0$ получим в виде

$$u_1 = \frac{2k_2}{A} \int_0^\infty e^{-\gamma t} F(x-t, y) dt,$$

$$u_2 = F(x, y) - F(-x, y) + \frac{2k_2}{A} \int_0^\infty e^{-\gamma t} F(-x-t, y) dt,$$

где $\gamma = (k_1 + k_2)/A$. В случае одиночной завесы решение задачи (1)–(3) при $A = 0$ имеет вид

$$u_1 = \frac{2}{Bk_1} \int_0^\infty e^{-\gamma t} F(x-t, y) dt,$$

$$u_2 = F(x, y) + F(-x, y) - \frac{2}{Bk_2} \int_0^\infty e^{-\gamma t} F(-x-t, y) dt,$$

где $\gamma = (k_1 + k_2)/Bk_1 k_2$.

Краевые задачи в цилиндрах с двухслойной плёнкой. Полученные решения $u_i(x, y)$ имеют вид операторов, действующих на заданную гармоническую функцию $F(x, y)$ по одной переменной x (переменная y остается свободной). В условиях сопряжения (2), (14) также участвует только одна переменная x , при этом эти условия для полученных функций $u_i(x, y)$ выполняются тождественно. Отсюда функция $F(x, y)$, а значит и функции $u_i(x, y)$ по свободной переменной y могут удовлетворять дополнительным условиям.

Рассмотрим в пространстве $(x, y) \in R^3$ цилиндр $D = (x \in R) \times (y \in Q \subseteq R^2)$, состоящий из двух полуцилиндров $D_1(x < 0)$ и $D_2(x > 0)$ с различной проницаемостью k_i в D_i при наличии двухслойной плёнки типа трещины $x = -0$ с параметром A и завесы $x = +0$ с параметром B . В данном цилиндре рассмотрим задачу с однородными условиями в зоне $D_1(x < 0)$ (что не уменьшает общности) вида

$$\Delta u_1 = 0, \quad \Delta u_2 = H(x, y), \quad M[u_1]_S = 0, \quad M[u_2]_S = h(x, y), \quad (19)$$

при выполнении условий сопряжения (2), где M – произвольный линейный оператор граничных условий 1-го, 2-го или 3-го рода по переменным y_i , $y = (y_1, y_2)$ (т. е. оператор M не содержит производных по x и коэффициенты при производных не зависят от x), S – боковая поверхность цилиндра D . Решение данной задачи (19), (2) в соответствующих случаях параметра T строится по формулам (10)–(13), где $F(x, y)$ – решение соответствующей классической краевой задачи в однородном цилиндре $D(x \in R, y \in Q)$ без плёнки вида

$$\Delta F = \begin{cases} H(x, y), & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}, \quad M[F]_S = \begin{cases} h(x, y), & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases},$$

что проверяется непосредственно.

Задачи на плоскости с пересекающимися плёнками. Рассмотрим, как и в п. 1, плоскость x, y с тем или иным плёночным включением $x = 0$ при заданных особых точках потенциала. В случае дополнительного плёночного включения $y = 0$ потенциалы примут вид композиции соответствующих операторов, полученных выше и действующих на заданную функцию $F(x, y)$ соответственно по переменным x и y .

В качестве примера рассмотрим плоскость x, y , разделенную пересекающимися двухслойными плёнками $x = 0$ и $y = 0$ на четыре квадранта $D_{11}(x < 0, y < 0)$, $D_{12}(x < 0, y > 0)$, $D_{21}(x > 0, y < 0)$, $D_{22}(x > 0, y > 0)$ с проницаемостью k_{ij} в D_{ij} , где $k_{2j} = k_{1j}p$. Пусть плёнка $x = 0$ состоит из трещины $x = -0$ с параметром A_1 и завесы $x = +0$ с параметром B_1 , а плёнка $y = 0$ состоит из завесы $y = -0$ с параметром B_2 и трещины $y = +0$ с параметром A_2 , при этом особые точки заданной гармонической функции $F(x, y)$ расположены в зоне D_{22} . Тогда для потенциалов u_{ij} в D_{ij} задача примет вид

$$\Delta u_{ij} = 0, \quad (x, y) \in D_{ij}, \quad (20)$$

$$x = 0 : \quad u_{2j} - u_{1j} = B_1 p \partial_x u_{2j}, \quad p \partial_x u_{2j} - \partial_x u_{1j} = A_1 \partial_x^2 u_{1j}, \quad j = 1, 2, \quad (21)$$

$$y = 0 : \quad u_{i2} - u_{i1} = B_2 k_{11} \partial_y u_{i1}, \quad k_{12} \partial_y u_{i2} - k_{11} \partial_y u_{i1} = A_2 \partial_y^2 u_{i2}, \quad i = 1, 2, \quad (22)$$

$$u_{22}(x, y) \sim F(x, y). \quad (23)$$

Пусть для определённости $T_1 = (A_1 - B_1 p)^2 - 4A_1 B_1 p^2 \neq 0$, $T_2 = (A_2 - B_2 k_{11} k_{12})^2 - 4A_2 B_2 k_{11}^2 \neq 0$. Тогда решение задачи (20)–(23) строится в виде композиции операторов (10), (11) по переменной x и (17), (18) по переменной y . Действительно, представляя решение задачи (20)–(23) в виде операторов (10), (11) (тождественно удовлетворяющих условиям сопряжения (21)):

$$u_{i1}(x, y) = \frac{2p}{\sqrt{T_1}} \int_0^\infty U_i(x - t, y) (e^{-\gamma_1 t} - e^{-\gamma_2 t}) dt, \quad x < 0, \quad (24)$$

$$u_{i2}(x, y) = U_i(x, y) + U_i(-x, y) - \frac{2}{\sqrt{T_1}} \int_0^\infty U_i(-x - t, y) [(1 - \gamma_1 A_1) e^{-\gamma_1 t} - (1 - \gamma_2 A_1) e^{-\gamma_2 t}] dt, \quad x > 0, \quad (25)$$

для функций $U_i(x, y)$ получим задачу

$$\Delta U_i = 0,$$

$$y = 0 : \quad U_2 - U_1 = B_2 k_{11} \partial_y U_1, \quad k_{12} \partial_y U_2 - k_{11} \partial_y U_1 = A_2 \partial_y^2 U_2,$$

$$U_2(x, y) \sim F(x, y),$$

решение которой строится по формулам (17), (18):

$$U_1(x, y) = \frac{2k_{12}}{\sqrt{T_2}} \int_0^{\infty} F(x, y - \tau) (e^{-\beta_1 \tau} - e^{-\beta_2 \tau}) d\tau, \quad (26)$$

$$U_2(x, y) = F(x, y) - F(x, -y) + \\ + \frac{2k_{12}}{\sqrt{T_2}} \int_0^{\infty} F(x, -y - \tau) [(1 - B_2 k_{11} \beta_1) e^{-\beta_1 \tau} - (1 - B_2 k_{11} \beta_2) e^{-\beta_2 \tau}] d\tau, \quad (27)$$

где

$$\gamma_i = \frac{A_1 + B_1 p + (-1)^i \sqrt{T_1}}{2A_1 B_1 p}, \quad \beta_i = \frac{A_2 + B_2 k_{11} k_{12} + (-1)^i \sqrt{T_2}}{2A_2 B_2 k_{11}},$$

$F(x, y)$ – заданная гармоническая функция (23). Таким образом, решение задачи (20)–(23) выражается через функцию $F(x, y)$ по формулам (24)–(27).

Аналогично можно решать задачи с другими комбинациями пересекающихся плёночных включений.

Список литературы

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 735 с.
2. Холодовский С. Е. Метод свёртывания разложений Фурье. Случай обобщенных условий сопряжения типа трещины (завесы) в кусочно-неоднородных средах // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 6. С. 855–859.
3. Холодовский С. Е. Метод свёртывания разложений Фурье. Случай трещины (завесы) в неоднородном пространстве // Дифференциальные уравнения. Т. 45. № 8. 2009. С. 1204–1208.

Статья поступила в редакцию 01.02.2012 г.