УДК 532.5
ББК В253.31

Владимир Александрович Толпаев,
доктор физико-математических наук, профессор,
Северо-Кавказский научно-исследовательский проектный институт природных газов
(Ставрополь, Россия), e-mail: v.a.tolpaev@mail.ru
Алексей Владимирович Колесников,
Северо-Кавказский научно-исследовательский проектный институт природных газов,
(Ставрополь, Россия), e-mail: svnipigz@gazprom.ru

Новый метод построения формул перехода для решения задач фильтрации в изотропных неоднородных пластах

Рассмотрено дивергентное уравнение на плоскости, описывающее фильтрацию жидкости в пластах с функциональной проницаемостью, зависящей от двух декартовых координат. Посредством подстановки Салехова уравнение сведено к уравнению Гельмгольца с функциональным множителем. Для определённого класса этого множителя выведены формулы, позволяющие выражать решение уравнения Гельмгольца через гармонические функции.

Ключевые слова: дивергентные уравнения, уравнение Гельмгольца, формулы перехода, фильтрация в неоднородных пластах.

Vladimir Aleksandrovich Tolpaev,
Doctor of Physics and Mathematics, Professor,
North-Caucasian Scientific Research Project Institute of Natural Gases,
(Stavropol, Russia), e-mail: v.a.tolpaev@mail.ru
Aleksey Vladimirovich Kolesnikov,
North-Caucasian Scientific Research Project Institute of Natural Gases,
(Stavropol, Russia), e-mail: svnipigz@gazprom.ru

A New Method of Constructing Transition Formulas for the Solution of Filtration Problems in Isotropic Inhomogeneous Layers

The paper considers the divergence equation on the plane that describes the filtration of fluids in reservoirs with functional permeability, which depends on two Cartesian coordinates. Through the substitution Salekhova equation is reduced to the Helmholtz equation with a functional factor. For a certain class of this factor, some formulas are derived to express the solution of the Helmholtz equation in terms of harmonic functions.

Keywords: divergence equations, Helmholtz equation, transition formulas, filtration of fluids in inhomogeneous layers.

Линейная плоскопараллельная фильтрация несжимаемой жидкости в изотропных неоднородных средах с проницаемостью

$$k(x,y) = k_0 p(x,y) \tag{1}$$

в декартовой системе координат x, y описывается решениями эллиптического уравнения [4]

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[p(x,y)\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[p(x,y)\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right] = 0. \tag{2}$$

В уравнении (2) $\varphi(x,y) = -k_0[P(x,y) - P_0]/\mu$ – потенциал скорости фильтрации, $k_0 = k(0,0)$ – значение проницаемости в зафиксированной точке (в начале координат) пористой среды, $P(x,y)$ – приведённое давление [1], P_0 – произвольная постоянная с размерностью давления, μ – коэффициент динамической вязкости фильтрующейся жидкости. Зафиксированная проницаемость k_0 на положительную непрерывную безразмерную функцию $p(x,y)$ в начале координат накладывает условие $p(0,0) = 1$.

Как известно, с помощью подстановки Салехова Г. С. [5]

$$\varphi(x,y) = \frac{\Phi(x,y)}{\sqrt{p(x,y)}} \tag{3}$$

интегрирование уравнения (2) можно свести к интегрированию уравнения Гельмгольца

$$L[\Phi(x,y)] \equiv \Delta\Phi(x,y) - M(x,y)\Phi(x,y) = 0, \tag{4}$$

где $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ – оператор Лапласа, а множитель $M(x,y)$ находится по известной функции $p(x,y)$ по формуле

$$M(x,y) = \frac{\Delta\sqrt{p(x,y)}}{\sqrt{p(x,y)}}. \tag{5}$$

Например, в **1-ом случае**, когда $p(x,y) = U^2(x,y)$, где $U(x,y)$ – произвольная гармоническая функция, $\Delta\sqrt{p(x,y)} = \Delta U(x,y) = 0$, множитель $M(x,y) = 0$. Следовательно, согласно (3) и (4), решения краевых задач фильтрации в огромной серии изотропных неоднородных сред $M(x,y) = 0$ будут сводиться к краевым задачам для уравнения Лапласа $\Delta\Phi(x,y) = 0$. Решению задач фильтрации в изотропных неоднородных средах серии $M(x,y) = 0$ посвящено большое число работ [1–5].

Укажем новый, **2-ой случай**, когда решения задач теории фильтрации в широкой серии изотропных неоднородных сред выражаются через решения классического уравнения Лапласа. Пусть множитель $M(x,y)$ является некоторой заданной функцией лишь одной переменной, например, для конкретности, пусть $M = M(x)$. Возможные функции $p(x,y)$, описывающие переменную проницаемость и соответствующие заданному коэффициенту $M(x)$, найдутся как частные решения уравнения (5).

Решение уравнения (4) для случая $M = M(x)$ будем строить в виде ряда

$$\Phi(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x)U_k(x,y), \tag{6}$$

в котором $a_k(x)$ и $U_k(x,y)$ – некоторые пока произвольные функции. После подстановки (6) в (4) придем к выражению

$$L[\Phi(x,y)] = \sum_{k=0}^{\infty}\left\{a_k(x)\Delta U_k(x,y) + 2a_k'(x)\frac{\partial U_k}{\partial x} + [a_k''(x) - M(x)a_k(x)]U_k(x,y)\right\} = 0. \tag{7}$$

Наложим теперь ряд ограничений на выбор функций $a_k(x)$ и $U_k(x,y)$.

Первое ограничение. Пусть все функции $U_k(x,y)$ будут гармоническими, т. е. $\Delta U_k(x,y) = 0$. Тогда (7) упрощается и принимает вид

$$L[\Phi(x,y)] = \sum_{k=0}^{\infty}\left\{2a_k'(x)\frac{\partial U_k}{\partial x} + [a_k''(x) - M(x)a_k(x)]U_k(x,y)\right\} = 0. \tag{8}$$

Второе ограничение. Пусть гармонические функции в последовательности $U_k(x,y)$ связаны друг с другом рекуррентными соотношениями

$$\frac{\partial U_k}{\partial x} = U_{k+1}(x,y). \tag{9}$$

Обращаем внимание на то, что, как легко убедиться, производная $\partial U_k/\partial x$ от гармонической функции $U_k(x,y)$ снова будет гармонической функцией. При выполнении рекуррентных соотношений (9) равенство (8) примет вид:

$$L[\Phi(x,y)] = \sum_{k=0}^{\infty} \{2a_k'(x)U_{k+1}(x,y) + [a_k''(x) - M(x)a_k(x)]U_k(x,y)\} = 0. \tag{10}$$

Третье ограничение сделаем на переменные коэффициенты $a_k(x)$. Для того, чтобы при $k = 0$ коэффициент перед $U_0(x,y)$ обратился в нуль, потребуем, чтобы $a_0''(x) - M(x)a_0(x) = 0$. Кроме того, обратим в нуль множители перед всеми $U_k(x,y)$. В результате для $a_k(x)$ получим систему рекуррентных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{cases} a_0''(x) - M(x)a_0(x) = 0 \\ \ldots \\ a_k''(x) - M(x)a_k(x) + 2a_{k-1}'(x) = 0 \\ \ldots \end{cases}. \tag{11}$$

Таким образом, для представления решений уравнения Гельмгольца (4) через решения $U_0(x,y)$ уравнения Лапласа $\Delta U_0(x,y) = 0$ получено следующее выражение в виде ряда

$$\Phi(x,y) = a_0(x)U_0(x,y) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)\frac{\partial^k U_0(x,y)}{\partial x^k}, \tag{12}$$

которое получается из формул (6) и (9) с учетом очевидного равенства $U_k(x,y) = \partial^k U_0(x,y)/\partial x^k$. Последнее вытекает из рекуррентных формул (9).

Для применения представления (12) к решению краевых задач для уравнений (2) и (4) необходимо, чтобы функциональный ряд в области решения был равномерно и абсолютно сходящимся.

3-й случай, когда решения задач теории фильтрации в серии изотропных неоднородных сред выражаются через решения классического уравнения Лапласа, получается как следствие формулы (12).

Рассмотрим следующий простейший случай формулы (12), когда $a_0(x) \neq 0$, $a_1(x) = const = 1$, а все другие коэффициенты $a_k(x) \equiv 0$ при $k = 2, 3, \ldots$. Формула (12) запишется в виде, который в соответствии со сложившейся традицией назовем формулой перехода

$$\Phi(x,y) = a_0(x)U_0(x,y) + \frac{\partial U_0(x,y)}{\partial x}, \tag{13}$$

а система уравнений (11) будет при этом выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} a_0''(x) - M(x)a_0(x) = 0 \\ M(x) + 2a_0'(x) = 0 \end{cases}. \tag{14}$$

В получившейся системе уравнений (14) функция $M = M(x)$ уже будет выступать не как заранее заданная, а наряду с функцией $a_0(x)$ как неизвестная. После исключения $M(x)$ относительно функции $a_0(x)$ получаем дифференциальное уравнение

$$a_0''(x) + 2a_0(x)a_0'(x) = 0, \tag{15}$$

имеющее первый интеграл

$$a_0'(x) + a_0^2(x) = C_1, \tag{16}$$

где C_1 – произвольная постоянная. В простейшем случае $C_1 = 0$ находим, что

$$a_0(x) = \frac{1}{x+a}, \qquad M(x) = \frac{a_0''(x)}{a_0(x)} = \frac{2}{(x+a)^2}, \tag{17}$$

где a – произвольная постоянная.

Итак, в итоге построена новая формула перехода

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{\sqrt{p(x,y)}}\left[\frac{U_0(x,y)}{x+a} + \frac{\partial U_0(x,y)}{\partial x}\right], \tag{18}$$

позволяющая краевые задачи теории фильтрации в неоднородных средах с функцией проницаемости (1), принадлежащей классу частных решений уравнения

$$\Delta\sqrt{p(x,y)} - \frac{2\sqrt{p(x,y)}}{(x+a)^2} = 0, \tag{19}$$

сводить к краевым задачам классического в математической физике уравнения Лапласа $\Delta U_0(x,y) = 0$.

В заключение отметим, что по аналогии с формулой перехода (13) могут быть построены и более сложные формулы вида

$$\Phi(x,y) = a_0(x)U_0(x,y) + a_1(x)\frac{\partial U_0(x,y)}{\partial x} + a_2(x)\frac{\partial^2 U_0(x,y)}{\partial x^2} + ... + \frac{\partial^n U_0(x,y)}{\partial x^n},$$

позволяющие значительно расширить круг применений уравнения Лапласа к задачам теории фильтрации в изотропных неоднородных средах.

Список литературы

1. Гладышев Ю. А. О методе перехода при решении задач фильтрации в пластах с переменными по простиранию мощностью и проницаемостью // Гидромеханика. Вып. 3. Сборник трудов МОПИ им. Н. К. Крупской. М.? 1974. С. 217–221.

2. Голубев Г. В., Тумашев Г. Г. Фильтрация несжимаемой жидкости в неоднородной пористой среде. Казань: Изд-во Казан. ун-та. 1972. 195 с.

3. Голубева О. В. Формулы перехода // Труды кафедры теоретической и экспериментальной физики. Калининградский государственный университет. Калининград, 1969. С. 31–34.

4. Голубева О. В. Курс механики сплошных сред. М.: Высшая школа, 1972. 368 с.

5. Салехов Г. С. К определению функции давления в неоднородных пластах нефтяных месторождений // ДАН СССР. Т. 105. № 6. 1955.

Статья поступила в редакцию 29.01.2012 г.