УДК 519.7
ББК 22.18

Александр Эмануилович Менчер,
кандидат физико-математических наук, профессор,
Забайкальский государственный гуманитарно-педагогический университет
им. Н. Г. Чернышевского (Чита, Россия), e-mail:aementcher@mail.ru

Арбитражная процедура в трёх точках со степенной функцией выигрыша[1]

Организация переговоров с использованием арбитражных процедур является актуальной теоретико-игровой задачей. В работе рассматривается бескоалиционная игра с нулевой суммой, в которой применена схема арбитража, обобщающая известную арбитражную процедуру по последнему предложению. Найдено равновесие в игре по Нэшу в смешанных стратегиях.

Ключевые слова: игра, арбитражная схема, равновесие, смешанные стратегии.

Alexandr Emanuilovich Mentcher,
Candidate of Physics and Mathematics, Professor,
Zabaikalsky State Humanitarian Pedagogical Universitety
named after N. G. Chernyshevsky (Chita, Russia), e-mail: aementcher@mail.ru

On the Arbitration Procedure in Three Points with Power Payoff Function

The organization of negotiations by using arbitration procedures is an actual problem in game theory. The paper considers a non-cooperative zero-sum game with an arbitration procedure that generalizes the well-known arbitration final-offer procedure. It presents the found Nash equilibrium in this game in mixed strategies.

Keywords: game, arbitration scheme, equilibrium, mixed strategies.

1. Введение

Рассматривается игра с нулевой суммой, в которой игроки L и M, именуемые, соответственно, как работник и работодатель, ведут переговоры об установлении заработной платы. Игрок L делает предложение x, а игрок M – предложение y; x и y – произвольные действительные числа. Если $x \le y$, то конфликта нет и игроки соглашаются на выплату жалованья, равного $\dfrac{x+y}{2}$. Если же $x > y$, игроки апеллируют к арбитру A. Обозначим решение арбитра через z. В работах [1–5] для достижения соглашения между игроками использовалась схема арбитража по последнему предложению, в которой из предложений x и y выбиралось то, которое ближе к решению арбитра z. В такой игре функция выигрыша определялась как математическое ожидание случайной величины $H_z(x,y)$: $H(x,y) = EH_z(x,y)$, где

$$H_z(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{2}, & \text{если } x \le y, \\ x, & \text{если } x > y, |x-z| < |y-z|, \\ y, & \text{если } x > y, |x-z| > |y-z|, \\ z, & \text{если } x > y, |x-z| = |y-z|. \end{cases} \tag{1}$$

В настоящей работе мы, в предположении, что $-\infty < y \le 0 \le x < +\infty$, а z – дискретная случайная величина, принимающая значения $-1, 0, 1$ с равными вероятностями $p = \dfrac{1}{3}$, будем полагать

$$H_z(x,y) = \begin{cases} x^\alpha, & \text{если } |x-z| < |y-z|, \\ -(-y)^\alpha, & \text{если } |x-z| > |y-z|, \\ z, & \text{если } |x-z| = |y-z|. \end{cases} \tag{2}$$

[1]Работа выполнена в рамках Государственного задания вузу Минобрнауки РФ, №8.3641.2011.

Равновесие в игре будем искать в смешанных стратегиях. Обозначим через $f(x)$ и $g(y)$ смешанные стратегии игроков L и M, соответственно. Имеем:

$$f(x) \geq 0, \qquad \int_0^{+\infty} f(x)\,dx = 1; \qquad g(y) \geq 0, \qquad \int_{-\infty}^{0} g(y)\,dy = 1.$$

Благодаря симметрии, цена игры равна нулю, а оптимальные стратегии симметричны относительно оси ординат, то есть: $g(y) = f(-y)$. Следовательно, достаточно построить оптимальную стратегию только для одного из игроков, например, L. Функцию выигрыша игрока M при выбранной игроком L стратегии $f(x)$ обозначим через $H(f(x), y)$.

2. Оптимальные стратегии.

Теорема. *Если $\alpha \in (0, 2]$, то для игрока L оптимальной является стратегия*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq x < c, \\ \dfrac{\alpha c^{\frac{\alpha}{2}}}{x^{\frac{\alpha}{2}+1}}, & \text{если } c < x < c+2, \\ 0, & \text{если } c+2 < x < +\infty, \end{cases} \tag{3}$$

где $c = \dfrac{2}{4^{\frac{1}{\alpha}} - 1}$.

Доказательство. Будем искать оптимальную стратегию игрока L в виде

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq x < c, \\ \varphi(x), & \text{если } c < x < c+2, \\ 0, & \text{если } c+2 < x < +\infty, \end{cases} \tag{4}$$

где функция $\varphi(x)$ положительна и непрерывно дифференцируема в интервале $(c, c+2)$.

Функция $H(f(x), y)$ непрерывна на всей полуоси $(-\infty, 0]$. Стратегия (4) будет оптимальной, если $H(f(x), y) = 0$ для $y \in [-(c+2), -c]$ и $H(f(x), y) \geq 0$ для $y \in (-\infty, -(c+2)) \cup (-c, 0]$.

Пусть $y \in [-(c+2), -c]$, тогда

$$H(f(x), y) = \frac{1}{3}\left[\int_c^{c+2} (-(-y)^\alpha) f(x)\,dx + \int_c^{-y} x^\alpha f(x)\,dx + \right.$$

$$\left. + \int_{-y}^{c+2} (-(-y)^\alpha) f(x)\,dx + \int_c^{c+2} x^\alpha f(x)\,dx\right]. \tag{5}$$

Если теперь $f(x)$ – оптимальная стратегия, то

$$\begin{aligned} 0 = H(f(x), -c-0) &= \frac{1}{3}\left[-2c^\alpha + \int_c^{c+2} x^\alpha f(x)\,dx\right], \\ 0 = H(f(x), -(c+2)+0) &= \frac{1}{3}\left[-(c+2)^\alpha + 2\int_c^{c+2} x^\alpha f(x)\,dx\right]. \end{aligned} \tag{6}$$

Тогда $(c+2)^\alpha = 4c^\alpha$ и $c = \dfrac{2}{4^{\frac{1}{\alpha}} - 1}$. По смыслу задачи необходимо $0 < c \leq 2$, откуда получаем $0 < \alpha \leq 2$. Отметим также, что

$$\int_c^{c+2} x^\alpha f(x)\,dx = 2c^\alpha = 2\left(\frac{2}{4^{\frac{1}{\alpha}} - 1}\right)^\alpha. \tag{7}$$

Далее, для оптимальности стратегии $f(x)$ необходимо $H'(f(x), y) = H''(f(x), y) = 0$ в интервале $(-(c+2), -c)$. Имеем

$$H'(f(x), y) = \frac{1}{3}\left[\alpha(-y)^{\alpha-1} - 2(-y)^\alpha f(-y) + \right.$$

$$\alpha(-y)^{\alpha-1}\int\limits_{-y}^{c+2} f(x)\,dx\Bigg], \tag{8}$$

$$H''(f(x),y)=\frac{1}{3}\Big[-\alpha(\alpha-1)(-y)^{\alpha-2}+3\alpha(-y)^{(\alpha-1)}f(-y)+$$

$$+2(-y)^{\alpha}f'(-y)-\alpha(\alpha-1)(-y)^{\alpha-2}\int\limits_{-y}^{c+2} f(x)\,dx\Bigg]. \tag{9}$$

Если теперь $H'(f(x),y)=H''(f(x),y)=0$ в интервале $(-(c+2),-c)$, то из (8) и (9) получаем

$$(\alpha-1)(-y)^{-1}H'(f(x),y)+H''(f(x),y)=0,$$

откуда

$$(\alpha+2)f(-y)-2yf'(-y)=0. \tag{10}$$

Положим в (10) $y=-x$, тогда $x\in(c,c+2)$ и

$$2x\varphi'(x)+(\alpha+2)\varphi(x)=0. \tag{11}$$

Решением последнего уравнения является функция

$$\varphi(x)=\beta x^{-\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)}. \tag{12}$$

Найдём константу β. Из (8) получаем

$$0=H'(f(x),-c-0)=\frac{1}{3}\left[2\alpha c^{\alpha-1}-2c^{\alpha}\frac{\beta}{c^{\frac{\alpha}{2}+1}}\right],$$

$$\beta=\alpha c^{\frac{\alpha}{2}},$$

и наконец $\varphi(x)=\dfrac{\alpha c^{\frac{\alpha}{2}}}{x^{\frac{\alpha}{2}+1}}$. Таким образом, стратегия $f(x)$ имеет вид (3).

Проверим выполнение условий оптимальности.

Пусть $y\in[-(c+2),-c]$, тогда

$$H(f(x),y)=\frac{1}{3}\Bigg[-(-y)^{\alpha}+\int\limits_{c}^{-y}\alpha c^{\frac{\alpha}{2}}x^{\frac{\alpha}{2}-1}\,dx-(-y)^{\alpha}\int\limits_{-y}^{c+2}\alpha c^{\frac{\alpha}{2}}x^{-\frac{\alpha}{2}-1}\,dx+$$

$$+2c^{\alpha}\Big]=\frac{1}{3}\left[-(-y)^{\alpha}+2c^{\frac{\alpha}{2}}(-y)^{\frac{\alpha}{2}}-2c^{\alpha}+(-y)^{\alpha}-2c^{\frac{\alpha}{2}}(-y)^{\frac{\alpha}{2}}+2c^{\alpha}\right]=0. \tag{13}$$

Пусть $y\in(-\infty,-(c+4)]$, тогда

$$H(f(x),y)=\int\limits_{c}^{c+2}x^{\alpha}f(x)\,dx=2c^{\alpha}. \tag{14}$$

Пусть $y\in[-(c+4),-(c+2)]$, тогда $-y\in[c+2,c+4]$, $-2-y\in[c,c+2]$ и

$$H(f(x),y)=\frac{1}{3}\left[\int\limits_{c}^{-2-y}x^{\alpha}f(x)dx-(-y)^{\alpha}\int\limits_{-2-y}^{c+2}f(x)\,dx+2\int\limits_{c}^{c+2}x^{\alpha}f(x)\,dx\right]=$$

$$\frac{2}{3}\cdot c^{\frac{\alpha}{2}}\left[(-2-y)^{\frac{\alpha}{2}}+c^{\frac{\alpha}{2}}+\frac{(-y)^{\alpha}}{(c+2)^{\frac{\alpha}{2}}}-\frac{(-y)^{\alpha}}{(-2-y)^{\frac{\alpha}{2}}}\right]. \tag{15}$$

Имеем

$$H(f(x),-(c+2)-0)=\frac{2c^{\frac{\alpha}{2}}}{3}\left[c^{\frac{\alpha}{2}}+c^{\frac{\alpha}{2}}+(c+2)^{\alpha}-2(c+2)^{\frac{\alpha}{2}}\right]=0. \tag{16}$$

Далее, положим в (15) $-2-y=t$, $t\in[c,c+2]$ и рассмотрим функцию

$$\tilde{H}(t)=\frac{2}{3}\cdot c^{\frac{\alpha}{2}}\left[t^{\frac{\alpha}{2}}+c^{\frac{\alpha}{2}}+\frac{(t+2)^{\alpha}}{(c+2)^{\frac{\alpha}{2}}}-\frac{(t+2)^{\alpha}}{t^{\frac{\alpha}{2}}}\right].$$

Функции $g(t)=\dfrac{(t+2)^{\alpha}}{(c+2)^{\frac{\alpha}{2}}}$ и $h(t)=t^{\frac{\alpha}{2}}-\dfrac{(t+2)^{\alpha}}{t^{\frac{\alpha}{2}}}=t^{\frac{\alpha}{2}}\left[1-\left(1+\frac{2}{t}\right)^{\alpha}\right]$ строго возрастают на отрезке $[c,c+2]$. Окончательно заключаем, что функция $H(f(x),y)$ как композиция строго убывающей и строго возрастающей функций строго убывает на отрезке $[-(c+4),-(c+2)]$ от $2c^{\alpha}$ до 0 и, таким образом, положительна в интервале $(-(c+4),-(c+2))$.

Пусть $y\in[-c,0]$, тогда $-y\in[0,c]$, $2-y\in[2,c+2]$ и

$$H(f(x),y)=\frac{1}{3}\left[-2(-y)^{\alpha}+\int\limits_{c}^{2-y}x^{\alpha}f(x)\,dx-\int\limits_{2-y}^{c+2}(-y)^{\alpha}f(x)\,dx\right]=$$

$$=\frac{1}{3}\left[-(-y)^{\alpha}+2c^{\frac{\alpha}{2}}(2-y)^{\frac{\alpha}{2}}-2c^{\alpha}-2c^{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{(-y)^{\alpha}}{(2-y)^{\frac{\alpha}{2}}}\right]. \tag{17}$$

Имеем

$$H(f(x),-c+0)=0;\qquad H(f(x),-0)=\frac{2}{3}c^{\frac{\alpha}{2}}(2^{\frac{\alpha}{2}}-c^{\frac{\alpha}{2}})\geq 0. \tag{18}$$

Далее,

$$H'(f(x),y)=\frac{\alpha}{3}\left[(-y)^{\alpha-1}+c^{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{-(2-y)^{\alpha}+4(-y)^{\alpha-1}+(-y)^{\alpha}}{(2-y)^{\frac{\alpha}{2}+1}}\right]. \tag{19}$$

Пусть $\alpha\in(0,1]$, тогда $c\in(0,\frac{2}{3}]\subset(0,1]$. Имеем

$$-(2-y)^{\alpha}+4(-y)^{\alpha-1}+(-y)^{\alpha}=-(2-y)^{\alpha}+(-y)^{\alpha-1}(4-y)\geq$$

$$\geq(4-y)-(2-y)=2.$$

Следовательно, $H'(f(x),y)>0$ в интервале $(-c,0)$ и, учитывая (18), заключаем, что $H(f(x),y)>0$ в этом интервале.

Пусть $\alpha\in(1,2]$, тогда $c\in(\frac{2}{3},2]$. Имеем

$$\begin{gathered}H'(f(x),-c+0)=\frac{\alpha}{6}\cdot\frac{c^{\alpha-1}(8-c)}{c+2}>0,\\ H'(f(x),-0)=-\frac{\alpha\cdot c^{\frac{\alpha}{2}}}{3\cdot 2^{1-\frac{\alpha}{2}}}<0.\end{gathered} \tag{20}$$

Таким образом, в интервале $(-c,0)$ существует хотя бы одна точка y_0, в которой $H'(f(x),y_0)=0$. Если точка y_0 – единственная, то y_0 – точка максимума функции $H(f(x),y)$ и, учитывая (18), эта функция положительна в интервале $(-c,0)$.

Положим в (19) $-y=t$, $t\in[0,c]$, $y_0=-t_0$. Тогда

$$\tilde{H}'(t)=\frac{\alpha}{3}\left[t^{\alpha-1}+c^{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{t^{\alpha-1}(t+4)-(t+2)^{\alpha}}{(t+2)^{\frac{\alpha}{2}+1}}\right].$$

Если теперь $\tilde{H}'(t)=0$, то получим равенство

$$t^{\alpha-1}(t+2)^{\frac{\alpha}{2}+1}+c^{\frac{\alpha}{2}}\cdot t^{\alpha}\left(1-\left(1+\frac{2}{t}\right)^{\alpha}\right)=-4c^{\frac{\alpha}{2}}t^{\alpha-1}. \tag{21}$$

В интервале $(0,c)$ функция, стоящая в левой части равенства (21), строго возрастает, а функция, стоящая в правой части – строго убывает. Следовательно, точка t_0, для которой $\tilde{H}'(t_0)=0$, – единственная. Это завершает доказательство теоремы.

В частности, при $\alpha = 1$ получаем

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \le x < \dfrac{2}{3}, \\ \sqrt{\dfrac{2}{3}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{x^3}}, & \text{если } \dfrac{2}{3} < x < \dfrac{8}{3}, \\ 0, & \text{если } \dfrac{8}{3} < x < \infty, \end{cases} \tag{22}$$

– результат, известный из [2]. График, соотвествующий функции $H(f(x), y)$, имеет вид, представленный на рис. 1.

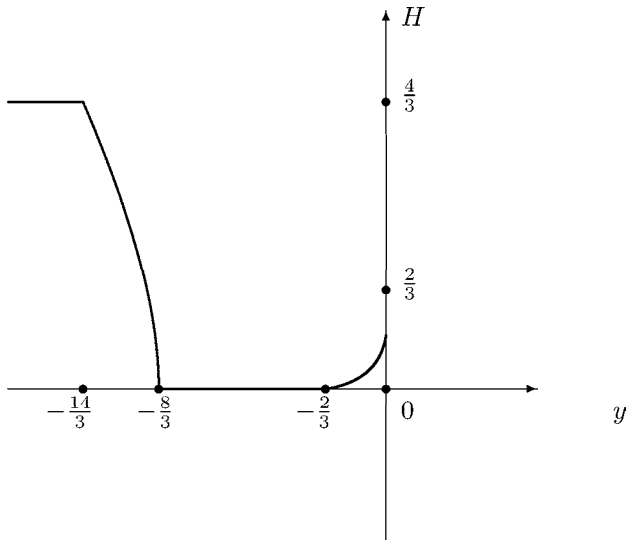

Рис. 1.

При $\alpha = 2$ получаем

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 < x < 2, \\ \frac{4}{x^2}, & \text{если } 2 < x < 4, \\ 0, & \text{если } 4 < x < \infty. \end{cases} \tag{23}$$

График, соответствующий функции $H(f(x), y)$, имеет вид, представленный на рис. 2.

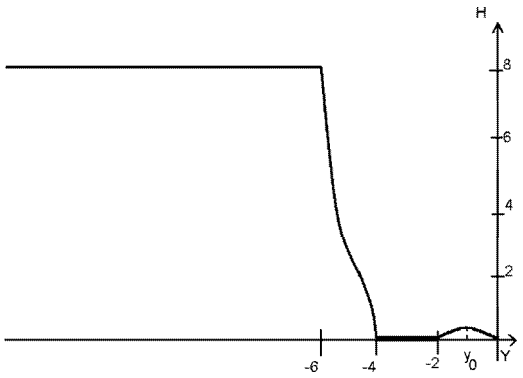

Рис. 2.

Список литературы

1. Мазалов В. В., Токарева Ю. С. Теоретико-игровые модели проведения конкурсов // Математическая теория игр и её приложения. 2010. Вып. 2. № 2. С. 66–78.

2. Менчер А. Э. Дискретная арбитражная процедура с неравномерным распределением вероятностей // Математическая теория игр и её приложения. 2009. Вып. 4. Т. 1. С. 78–91.

3. Farber H. An analysis of final-offer arbitration// Journal of Conflict Resolution, 1980. Vol. 35. P. 683–705.

4. Mazalov V. V., Mentcher A. E., Tokareva J. S. On a discrete arbitration procedure // Sci. Math. Japonical, 2006. Vol. 63. № 3. P. 325–330.

5. Mazalov V. V., Mentcher A. E., Tokareva J. S. On a discrete arbitration procedure in three points // Game Theory and Applications. 2005. Vol. 11. P. 87–91.

Статья поступила в редакцию 01.03.2012 г.