ББК В 11
УДК 519.833.2

Татьяна Эдуардовна Носальская,
аспирант,
Забайкальский институт железнодорожного транспорта
(Чита, Россия), e-mail:tenosalskaya@gmail.com

Правило большинства в задаче наилучшего выбора для трёх лиц[1]

В статье рассмотрена последовательная игра, связанная с задачей наилучшего выбора. Трое игроков ведут переговоры, состоящие из K этапов. На некотором шаге каждый из них получает предложение, которое он должен принять или отвергнуть. После того, как игроки приняли решение, вступает в силу правило большинства: если, по крайней мере, двое из них приняли предложение, то осуществляется соответствующее решение, иначе – происходит дисконтирование, и переговоры переходят на следующий шаг. Процесс продолжается до тех пор, пока игроки не придут к согласию, либо пока переговоры не достигнут последнего этапа. Для описанной игры найдено равновесие в классе пороговых стратегий.

Ключевые слова: задача наилучшего выбора, последовательные переговоры, правило большинства, дисконтирование, соглашение.

Tatiana Eduardovna Nosalskaya,
graduate student
Zabaikalsky Institute of Railway Transport
(Chita, Russia), e-mail: tenosalskaya@gmail.com

Majority Rule in the Problem of the Best Choice for Three Persons

The article discusses the sequential game related to the best-choice problem. Three players participate in the negotiations, which consist of K stages. At some step each of them receives an offer that he should accept or reject. After the players have made a decision, the majority rule comes into force: if at least two of them have accepted the offer, the corresponding solution is carried out, otherwise there is discounting and the negotiations move to the next step. The process continues until the players reach an agreement, or until the negotiations reach the final stage. The equilibrium in the class of threshold strategies is found for the described game.

Keywords: best-choice problem, sequential negotiations, majority rule, discounting, agreement.

Представленная работа продолжает серию известных моделей переговоров, таких как переговоры работника и работодателя [6], [7], игра обмена [2], многоэтапный покер [10], [11], раздел пирога и другие. Большинство исследований [4], [5] анализируют модель, где игроки представляют свои предложения, а третий независимый участник – арбитражный комитет – выбирает одно из них. Сакагучи [11] рассматривает модель переговоров работника и работодателя с арбитражным комитетом, состоящим из двух арбитров, и каждый арбитр предлагает размер заработной платы в каждый период переговоров. В работах [12], [13], [14], [5], [9] эта модель арбитража была расширена для двустороннего случая, где арбитр представляет некоторые предложения для игроков и, если их решения отличаются, приоритет решения определяется лотереей. Статья [8] описывает арбитражную задачу для трёх игроков и её обобщение для n игроков, где приоритет решения определяется голосованием. Дальнейшее развитие эта модель получает в работе [11, с. 42–45] на примере раздела пирога между тремя лицами по правилу большинства, основываясь на совместном распределении Дирихле вида $k_1 = k_2 = k_3 = 1$. Здесь мы исследуем подобную схему с параметрами $k_2 = k_2 = k_3 = 2$.

[1]Работа выполнена в рамках грантf РФФИ №12-01-90702-моб_ст и государственного задания вузу Минобрнауки РФ, №8.3641.2011.

Пусть для переговоров отведено K шагов, а до конца осталось k. На этом этапе игроки получают предложения x^k, y^k, z^k. Предположим, что на каждом шаге это случайные величины, распределённые по закону Дирихле, т.е. совместная плотность имеет вид

$$f(x,y,z)=\frac{\Gamma(k_1+k_2+k_3)}{\Gamma(k_1)\cdot\Gamma(k_2)\cdot\Gamma(k_3)}\cdot x^{k_1-1}y^{k_2-1}z^{k_3-1},$$

причём $x+y+z=1$.

Затем каждый из них решает, принять или отклонить предложение в ожидании более удачного предложения в будущем. После чего, согласно правилу большинства, если хотя бы двое из них приняли положительное решение, осуществляется делёж пирога (x,y,z), в противном случае переговоры переходят на следующий этап $k-1$. При этом происходит дисконтирование, и пирог становится уже размера $\delta\le 1$. Процесс продолжается до тех пор, пока игроки не придут к согласию, либо пока не наступит этап $k=0$, на котором все игроки получат куски малого размера $b<<\frac{1}{3}$.

Обозначим H_k значение игры на этапе k. Предположим, что каждый игрок информируется только о значении его предложения. Пусть x, y, z – предложения игрокам I, II, III, соответственно. Поскольку $x+y+z=1$, можно ограничить рассмотрение переменными x и y.

Исследуем симметричный случай с распределением Дирихле для параметров $k_1=k_2=k_3=2$. Тогда функция совместной плотности распределения имеет вид

$$f(x,y)=\frac{\Gamma(6)}{\Gamma(2)\cdot\Gamma(2)\cdot\Gamma(2)}\cdot xy(1-x-y)=120xy(1-x-y),$$

где $x,y>0, x+y=1$.

Заметим, что

$$120\int\limits_0^1 xdx\int\limits_0^{1-x}y(1-x-y)dy=1.$$

Пусть $\mu_1(x)$, $\mu_2(y)$, $\mu_3(z)$ – вероятность того, что игрок I,II или III примет текущее предложение x, y или z, соответственно. Обозначим $\bar\mu_i(x)=1-\mu_i(x)$, $i=1,2,3$.

Теорема. *Оптимальные стратегии игроков на k-м шаге имеют вид*

$$\mu_i(x)=I_{\{x\ge\delta H_{k-1}\}},\qquad i=1,2,3,$$

где I_A – индикатор A.

Значение игры удовлетворяет рекуррентным соотношениям

$$H_k=\frac{1}{3}-10\delta^4H_{k-1}^4(1-3\delta H_{k-1})(3-4\delta H_{k-1}),\qquad H_0=b.$$

Доказательство. Уравнение оптимальности для выигрыша на k-м шаге имеет вид

$$H_k=120\int\limits_0^1 xdx\int\limits_0^{1-x}y(1-x-y)dy\left\{\mu_1\mu_2\mu_3x+\bar\mu_1\mu_2\mu_3x+\right.$$
$$+\mu_1\bar\mu_2\mu_3x+\mu_1\mu_2\bar\mu_3x+\bar\mu_1\bar\mu_2\bar\mu_3\delta H_{k-1}+\mu_1\bar\mu_2\bar\mu_3\delta H_{k-1}+$$
$$\left.+\bar\mu_1\mu_2\bar\mu_3\delta H_{k-1}+\bar\mu_1\bar\mu_2\mu_3\delta H_{k-1}\right\},\qquad k=1,2,...,\tag{1}$$

причём $H_0=b,\quad \mu_1=\mu_1(x),\quad \mu_2=\mu_2(y),\quad \mu_3=\mu_3(1-x-y)$.

Преобразуя выражение (1), получаем

$$H_k=120\int\limits_0^1 x\cdot\mu_1(x)dx\int\limits_0^{1-x}\left\{(x-\delta H_{k-1})(\mu_2+\mu_3-2\mu_2\mu_3)\right\}y(1-x-y)dy+$$
$$+120\int\limits_0^1 xdx\int\limits_0^{1-x}\left\{(x-\delta H_{k-1})\mu_2\mu_3+\delta H_{k-1}\right\}y(1-x-y)dy.\tag{2}$$

Для максимизации своего выигрыша игрок I может влиять только на значение первого интеграла в формуле (2). Введём обозначение

$$G_k(x) = x \int\limits_0^{1-x} \{(x - \delta H_{k-1})(\mu_2 + \mu_3 - 2\mu_2\mu_3)\} y(1-x-y)dy.$$

Оптимальная стратегия игрока I имеет вид

$$\mu_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } G_k(x) \geq 0 \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Из симметрии задачи следует, что оптимальное поведение игроков II и III должно быть одинаковым, т.е. $\mu_2(y) = \mu_3(1-x-y)$.

Выражение $G_k(x)$ будет положительно, если

$$x(x - \delta H_{k-1}) \int\limits_0^{1-x} (\mu_2 + \mu_3 - 2\mu_2\mu_3) y(1-x-y)dy \geq 0;$$

$$\frac{1}{6}x(x - \delta H_{k-1}) \cdot (1-x)^3 \geq 0;$$

$$x - \delta H_{k-1} \geq 0.$$

Таким образом, при $x \geq \delta H_{k-1}$ получаем $G_k(x) \geq 0$, в противном случае $G_k(x) < 0$. Зафиксируем такое a, что $G_k(a) = 0$.

Находим равновесие рассматриваемой игры в классе пороговых стратегий. Пусть $\mu_2 = I_{\{y \geq a\}}$, $\mu_3 = I_{\{z \geq a\}}$. Рассмотрим три случая:

1) При $0 \leq x \leq 1-2a$ получаем

$$\int\limits_0^{1-x} (\mu_2 + \mu_3 - 2\mu_2\mu_3) y(1-x-y)dy =$$

$$= \int\limits_0^{a} y(1-x-y)dy + \int\limits_{1-x-a}^{1-x} y(1-x-y)dy = \frac{1}{3}a^2(3 - 3x - 2a).$$

2) При $1-2a < x \leq 1-a$ значение указанного интеграла будет описываться формулой

$$\int\limits_0^{1-x-a} y(1-x-y)dy + \int\limits_a^{1-x} y(1-x-y)dy =$$

$$= \frac{1}{3}(1-x+2a)(1-x-a)^2.$$

3) При $1-a < x \leq 1$ рассматриваемый интеграл равен нулю.

Найдём соответствующее выражение для второго интеграла формулы (2)

$$\int\limits_0^{1-x} \mu_2\mu_3 \cdot y(1-x-y)dy = \int\limits_a^{1-a-x} y(1-x-y)dy =$$

$$= \frac{1}{6}(1-x-2a)(1+2a-2a^2-2x-2ax+x^2).$$

С учётом полученных выражений, можно записать

$$G_k(x) = x(x - \delta H_{k-1})\Big(\frac{1}{3}a^2(3 - 3x - 2a) \cdot I\{x \leq 1-2a\} +$$

$$+\frac{1}{3}(1-x+2a)(1-x-a)^2\cdot I\{1-2a<x\le 1-a\}+$$

$$+0\cdot I\{1-a<x\le 1\}\Big).$$

Т.к. $G_k(a)=0$, то $a=\delta H_{k-1}$. Тогда

$$G_k(x)=x(x-\delta H_{k-1})\left(\frac{1}{3}\delta^2 H_{k-1}^2\left(3-3x-2\delta H_{k-1}\right)\cdot I\{x\le 1-2\delta H_{k-1}\}+\right.$$

$$+\frac{1}{3}(1-x+2\delta H_{k-1})(1-x-\delta H_{k-1})^2\cdot I\{1-\delta H_{k-1}<x\le 1-\delta H_{k-1}\}+$$

$$\left.+0\cdot I\{1-\delta H_{k-1}<x\le 1\}\right).$$

Таким образом, если игроки II и III используют пороговые стратегии $\mu_2=I_{\{y\ge\delta H_{k-1}\}}$, $\mu_3=I_{\{z\ge\delta H_{k-1}\}}$, то наилучший ответ игрока I также должен быть $\mu_1=I_{\{x\ge\delta H_{k-1}\}}$.

$$H_k=120\int\limits_0^1\mu_1(x)\cdot G_k(x)dx+$$

$$+120\int\limits_0^1 xdx\int\limits_0^{1-x}\left\{(x-\delta H_{k-1})\,\mu_2\mu_3+\delta H_{k-1}\right\}y(1-x-y)dy=$$

$$=40\delta^2 H_{k-1}^2\int\limits_{\delta H_{k-1}}^{1-2\delta H_{k-1}}x\left(x-\delta H_{k-1}\right)\left(3-3x-2\delta H_{k-1}\right)dx+$$

$$+40\int\limits_{1-2H_{k-1}}^{1-H_{k-1}}x\left(x-\delta H_{k-1}\right)\left(1-x+2\delta H_{k-1}\right)(1-x-\delta H_{k-1})^2dx+$$

$$+20\int\limits_0^{1-2H_{k-1}}x(x-\delta H_{k-1})(1-x-2\delta H_{k-1})\cdot$$

$$\cdot(1+2\delta H_{k-1}-2\delta^2 H_{k-1}^2-2x-2\delta H_{k-1}x+x^2)dx+\delta H_{k-1}.$$

Получаем рекуррентную формулу

$$H_k=\delta H_{k-1}+\frac{1}{3}\left(1-3\delta H_{k-1}\right)\left(1-90\delta^4 H_{k-1}^4+120\delta^5 H_{k-1}^5\right).$$

Следствие. Если $\delta=1$, то $\lim\limits_{k\to\infty}H_k=\dfrac{1}{3}$.

Иными словами, при отсутствии дисконтирования и бесконечном горизонте переговоров арбитр может на некотором этапе предложить игрокам делёж единичного пирога поровну.

Список литературы

1. Мазалов В. В., Менчер А. Э., Токарева Ю. С. Переговоры. Математическая теория. СПб: Лань, 2012. 304 с.

2. Brams J. S., Kilgour D. M., Davis M. D. Unravelling in games of sharing and exchange // Frontiers in Game Theory, MIT Press, Cambridge, 1993. P. 194–212.

3. Chatterjee K. Models with complete and incomplete information // IEEE Trans, SMC-11, 1981. P. 101–109.

4. Crawford V. P. On Complusory arbitration schemes // Journal of Political Economy 11, 1973. P. 131–159.

5. Garnaev A. Y. Value of information in optimal stopping games // Game Theory and Applications 5, 2000. P. 55–64.

6. Gibbons R. A Primer in Game Theory. Prentice Hall, 1992. 278 p.

7. Leitman G. Collective bargaining a differential game // Journal of Optimization Theory and Applications 11, 1973. P. 405–412.

8. Mazalov V. V., Banin M.V. N-person best-choice game with voting // Game Theory and Applications 9, 2003. P. 45–53.

9. Mazalov V. V., Sakaguchi M., Zabelin A.A. Multistage arbitration game with random offers // Game Theory and Applications 8, 2002. P. 95–106.

10. Sakaguchi M. A simplified two-person multistage poker with optional stopping // Mathematica Japonica 28, 1983. P. 287–303.

11. Sakaguchi M. A time-sequential game related to an arbitration procedure // Mathematica Japonica 29, 1984. P. 491–502.

12. Sakaguchi M. Optimal stopping games for bivariate uniform distribution // Mathematica Japonica 41, 1995. P. 677–687.

13. Sakaguchi M. Optimal stopping games where players have weighted priviledge // Game Theory and Applications 6, 2000. P. 116–131.

14. Sakaguchi M. Best-choice game where arbitration comes in // Game Theory and Applications 9, 2003. P. 141–149.

Статья поступила в редакцию 25.02.2012 г.