УДК 517.956
ББК В143

Святослав Евгеньевич Холодовский,
доктор физико-математических наук,
Забайкальский государственный
гуманитарно-педагогический университет им. Н. Г. Чернышевского
(Чита, Россия), e-mail: hol47@yandex.ru

О решении краевых задач в цилиндрах с многослойным пленочным включением[1]

Рассмотрены краевые задачи для линейных дифференциальных уравнений в кусочно-однородных цилиндрах, разделённых на два полуцилиндра многослойной плёнкой, состоящей из произвольного числа сильно и слабо проницаемых прослоек. Методом свертывания разложений Фурье решения задач выражены через решения классических задач в однородных цилиндрах без плёнки.

Ключевые слова: краевые задачи, дифференциальные уравнения, многослойные плёнки, трещины, завесы, метод свертывания разложений Фурье..

Svyatoslav Yevgenyevich Kholodovskii,
Doctor of Physics and Mathematics,
Zabaikalsky State Humanitarian Pedagogical University
named after N. G. Chernyshevsky (Chita, Russia), e-mail: hol47@yandex.ru

Solving Boundary Value Problems in Cylinders with Multilayer Film Inclusion

The article considers boundary value problems for linear differential equations in piecewise-homogeneous cylinders divided into two half-cylinders by multi-layer film consisting of an arbitrary number of strongly and weakly permeable layers. Using the method of convolution of Fourier expansions, task solutions are expressed in terms of solving classical problems in homogeneous cylinders without the film.

Keywords: boundary value problems, differential equations, multi-layer films, cracks, screens, method of convolution of Fourier expansions.

1. Обобщённые условия сопряжения. Рассмотрим в пространстве $(x, y_1, ..., y_m) \in R^{m+1}$ произвольную область D, разделённую гиперплоскостью $x = 0$ на две зоны $D_1(x < 0)$ и $D_2(x > 0)$. Пусть гиперплоскость $x = 0$ является многослойной плёнкой, состоящей из взаимно параллельных, соприкасающихся сильно и слабо проницаемых прослоек – трещин и завес. Трещины и завесы будем моделировать бесконечно тонкими слоями с бесконечно большой для трещин и бесконечно малой для завес проницаемостью [6; 7]. Пусть потенциалы $u_j(x, y)$ в соответствующей зоне D_j в окрестности гиперплоскости $x = 0$ удовлетворяют уравнению

$$\partial_x^2 u_j + L[u_j] = 0, \qquad (x, y) \in D_j, \qquad j = 1, 2, \tag{1}$$

где $y = (y_1, ..., y_m)$, $\partial_x^n = \partial^n/\partial x^n$, L – произвольный линейный дифференциальный оператор по переменным y_i, т. е. оператор L не содержит производных по x и коэффициенты при производных не зависят от x. Выведем по индукции условия сопряжения на данной многослойной плёнке $x = 0$. Для этого найдём приращения потенциала и нормальной скорости на сторонах плёнки $x = \pm 0$, при этом нормальную скорость в D_j рассмотрим в виде $k_j \partial_x u_j$, где постоянные $k_j > 0$ характеризуют проницаемость области D_j по переменной x.

Пусть плёнка $x = 0$ состоит из i примыкающих друг к другу трещин и завес в произвольном их сочетании. Рассмотрим обобщённые условия сопряжения на данной плёнке вида

$$x = 0: \qquad u_2 - u_1 = F_i[u_1], \qquad k_2 \partial_x u_2 - k_1 \partial_x u_1 = G_i[u_1], \tag{2}$$

[1]Работа выполнена в рамках Государственного задания вузу Минобрнауки РФ, № 1.3985.2011.

где $F_i[u]$ и $G_i[u]$ – линейные операторы с постоянными коэффициентами, подлежащие определению. В частности при отсутствии трещин и завес, т.е. при $i = 0$, полагаем $F_0 = G_0 = 0$, что соответствует идеальному контакту зон D_j, при этом условия (2) являются классическими условиями сопряжения.

Добавим к данной многослойной плёнке трещину или завесу $x = +0$, которую заменим слоем $D_0(0 < x < l)$ проницаемости k_0 при выполнении условий вида (2) при $x = 0$ и классических условий сопряжения при $x = l$:

$$x = 0: \qquad u_0 - u_1 = F_i[u_1], \qquad k_0\partial_x u_0 - k_1\partial_x u_1 = G_i[u_1], \tag{3}$$

$$x = l: \qquad u_2 = u_0, \qquad k_2\partial_x u_2 = k_0\partial_x u_0,$$

где u_j – потенциалы в D_j, $j = 0, 1, 2$, $D_2(x > l)$, при этом потенциал $u_0(x, y)$ в D_0 удовлетворяет уравнению (1). Отсюда приращения потенциала и нормальной скорости на ∂D_0 с учётом теоремы о среднем примут соответственно вид

$$u_{2|x=l} - u_{1|x=0} = u_{0|x=l} - u_{0|x=0} + F_i[u_1]_{|x=0} = \frac{l}{k_0}k_0\partial_x u_{0|x=c_1} + F_i[u_1]_{|x=0}, \tag{4}$$

$$k_2\partial_x u_{2|x=l} - k_1\partial_x u_{1|x=0} = k_0\partial_x u_{0|x=l} - k_0\partial_x u_{0|x=0} + G_i[u_1]_{|x=0} = k_0 l\partial_x^2 u_{0|x=c_2} + G_i[u_1]_{|x=0}, \tag{5}$$

где $c_j \in (0, l)$.

Пусть слой D_0 вырождается в трещину, т. е. $l \to 0$, $k_0 \to \infty$ так, что $k_0 l \to A$, где A – параметр трещины [6; 7]. Переходя к указанному пределу, из (4) с учётом первого условия (3) следует $\lim u_{0|x=l} = \lim u_{0|x=0} = \lim(u_1 + F_i[u_1])_{|x=0} = (u_1 + F_i[u_1])_{|x=0}$. Отсюда по принципу максимума для уравнения (1) (что предполагаем имеет место) найдем $\lim u_{0|x=c_2} = (u_1 + F_i[u_1])_{|x=0}$ для $\forall c_2 \in (0, l)$. Действуя на последнее равенство оператором L, с учётом уравнения (1) получим $\lim \partial_x^2 u_{0|x=c_2} = \partial_x^2(u_1 + F_i[u_1])_{|x=0}$. Тогда из равенств (4), (5) в пределе получим условия сопряжения на данной плёнке при дополнительной трещине $x = +0$ вида

$$x = 0: \qquad u_2 - u_1 = F_{i+1}[u_1], \qquad k_2\partial_x u_2 - k_1\partial_x u_1 = G_{i+1}[u_1], \tag{6}$$

где

$$F_{i+1}[u_1] = F_i[u_1], \qquad G_{i+1}[u_1] = A\partial_x^2(u_1 + F_i[u_1]) + G_i[u_1]. \tag{7}$$

Если слой D_0 вырождается в завесу с параметром B, т. е. $l \to 0$, $k_0 \to 0$ так, что $l/k_0 \to B$ [6; 7], то из равенств (5) с учётом второго условия (3) получим $\lim k_0\partial_x u_{0|x=l} = \lim k_0\partial_x u_{0|x=0} = \lim(k_1\partial_x u_1 + G_i[u_1])_{|x=0} = (k_1\partial_x u_1 + G_i[u_1])_{|x=0}$. Отсюда $\lim k_0\partial_x u_{0|x=c_1} = (k_1\partial_x u_1 + G_i[u_1])_{|x=0}$ для $\forall c_1 \in (0, l)$. Тогда из равенств (4), (5) следуют условия сопряжения на данной плёнке при дополнительной завесе $x = +0$ в виде (6), где

$$F_{i+1}[u_1] = B(k_1\partial_x u_1 + G_i[u_1]) + F_i[u_1], \qquad G_{i+1}[u_1] = G_i[u_1]. \tag{8}$$

Пусть плёнка $x = 0$ состоит из n трещин и завес. Отсюда обобщённые условия сопряжения на данной плёнке имеют вид (6), где операторы $F_n[u]$ и $G_n[u]$ строятся по рекуррентным формулам (7), (8), в которых $F_0 = G_0 = 0$, $i = 0, ..., n-1$.

Из равенств (7), (8) следует, что примыкающие друг к другу трещины, а также завесы, равносильны соответственно трещине или завесе с суммарным параметром. Поэтому многослойные плёнки далее рассматриваем, состоящими из чередующихся трещин и завес. Кроме того, из равенств (6)–(8) следует, что на трещине потенциал непрерывен, а нормальная скорость терпит разрыв; на завесе нормальная скорость непрерывна, а потенциал терпит разрыв. Последнее объясняется тем, что «частицы» движущейся сплошной среды (жидкости, потока тепла и т. д.), протекая по сильно проницаемой трещине, могут вытекать из неё в точках, отличных от точек втекания, и для протекания сквозь слабо проницаемую завесу на ней должна поддерживаться определённая разность потенциалов.

В частном случае одиночной трещины условия (6), (7) примут вид

$$x = 0: \qquad u_2 = u_1, \qquad k_2\partial_x u_2 - k_1\partial_x u_1 = A\partial_x^2 u_1. \tag{9}$$

Данные условия совпадают с условиями на одиночной сильно проницаемой плёнке в задачах теплопроводности и фильтрации жидкости, полученными из других соображений [1, с. 31; 3, с. 107–108]. Для волнового уравнения условия (9) соответствуют условиям при продольном ударе по стержню и случаю колебания струны с точечной массой [2, с. 70; 5, с. 147].

В случае одиночной завесы условия (6), (8) примут вид

$$x = 0: \qquad u_2 - u_1 = Bk_1\partial_x u_1, \qquad k_2\partial_x u_2 = k_1\partial_x u_1.$$

Данные условия соответствуют условиям на слабо проницаемых плёнках, а также условиям на контакте стержней, разделённых упругой прокладкой, при продольных колебаниях [1, с.27; 5, с.40].

2. Задачи с многослойной плёнкой, разделяющей цилиндр на два полуцилиндра. Рассмотрим цилиндр $D = (x \in R) \times (y \in Q \subseteq R^m)$, разделённый многослойной плёнкой $x = 0$ на два полуцилиндра $D_1(x < 0)$ и $D_2(x > 0)$, когда плёнка $x = 0$ состоит из $n = 2r$ чередующихся трещин и завес с параметрами соответственно $A_1, B_2, ..., A_{2r-1}, B_{2r}$, где $A_1 \geq 0$ – параметр первой трещины $x = -0$, $B_{2r} \geq 0$ – параметр последней завесы $x = +0$, остальные параметры $B_i, A_j > 0$. При $A_1 = 0$ ($B_{2r} = 0$) первая трещина (последняя завеса) отсутствует.

Рассмотрим в цилиндре D класс краевых задач с неоднородными условиями в зоне $D_2(x > 0)$ вида

$$\partial_x^2 u_1 + L[u_1] = 0, \qquad (x, y) \in D_1; \qquad M[u_1]_{(x,y)\in S} = 0, \tag{10}$$

$$\partial_x^2 u_2 + L[u_2] = H(x, y), \qquad (x, y) \in D_2; \qquad M[u_2]_{(x,y)\in S} = h(x, y), \tag{11}$$

$$x = 0: \qquad u_2 - u_1 = F_{2r}[u_1], \qquad k_2\partial_x u_2 - k_1\partial_x u_1 = G_{2r}[u_1], \tag{12}$$

где оператор M (как и L) является произвольным линейным дифференциальным оператором по переменным y_i, S – боковая поверхность цилиндра D (уравнение поверхности S не содержит переменной x), H и h – заданные функции, операторы F_{2r} и G_{2r} строятся по рекуррентным формулам (7), (8):

$$F_{2i-1}[u] = F_{2i-2}[u], \qquad G_{2i-1}[u] = A_{2i-1}\partial_x^2(u + F_{2i-2}[u]) + G_{2i-2}[u], \tag{13}$$

$$F_{2i}[u] = B_{2i}(k_1\partial_x u + G_{2i-1}[u]) + F_{2i-1}[u], \qquad G_{2i}[u] = G_{2i-1}[u], \tag{14}$$

$$F_0[u] = G_0[u] = 0, \qquad i = 1, ..., r.$$

Пусть известно решение $f(x, y)$ соответствующей классической краевой задачи в однородном по x цилиндре D без плёнки $x = 0$:

$$\partial_x^2 f + L[f] = \begin{cases} H(x, y), & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}, \qquad M[f]_{|(x,y)\in S} = \begin{cases} h(x, y), & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}. \tag{15}$$

В частности, для оператора Лапласа ($L = \partial_y^2$) на плоскости x, y ($D = R^2$) функция $f(x, y)$ является заданной гармонической функцией, особые точки (источники, стоки и т. д.) которой лежат в полуплоскости $x > 0$. Классические задачи Коши при $-\infty < x < \infty$ для гиперболических и параболических уравнений также являются задачами вида (15).

Методом свертывания разложений Фурье [6; 7] выразим решение задачи (10)–(12) с плёнкой $x = 0$ непосредственно через функцию $f(x, y)$ (15).

Следуя указанному методу, для вывода общих формул рассмотрим частный случай оператора $L = \partial_y^2$ при $y \in R$, т. е. когда область D является плоскостью x, y, разделённой многослойной плёнкой $x = 0$ на две полуплоскости $D_1(x < 0)$, $D_2(x > 0)$. В данном случае задача (10)–(12) примет вид модельной задачи, допускающей применение метода Фурье:

$$\Delta u_1 = 0, \qquad \Delta u_2 = H(x,y), \tag{16}$$

при условиях сопряжения (12). При этом полагаем, что известно решение $f(x,y)$ соответствующей классической задачи на однородной плоскости x, y (без плёнки $x = 0$) вида

$$\Delta f = \begin{cases} H(x,y), & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}, \tag{17}$$

и выразим решение задачи (16), (12) с плёнкой $x = 0$ через функцию $f(x,y)$.

Предположим сначала, что функция $f(0,y)$ разлагается в интеграл Фурье с коэффициентами Фурье f_i:

$$f(0,y) = \int_0^\infty g\,d\lambda, \qquad g(y,\lambda) = f_1 \sin \lambda y + f_2 \cos \lambda y \tag{18}$$

(указанное предположение существенно сужает класс функций $f(x,y)$, в частности, фундаментальное решение не разлагается в интеграл Фурье). Отсюда функция $f(x,y)$ в полуплоскости $x < 0$, где она удовлетворяет уравнению Лапласа (17), представима в виде интеграла Фурье:

$$f(x,y) = \int_0^\infty e^{\lambda x} g\,d\lambda, \qquad x \le 0. \tag{19}$$

Формула (19) выражает решение задачи Дирихле в полуплоскости $x < 0$ с граничной функцией $f(0,y)$, полученное методом Фурье. Представим решение задачи (16), (12) в виде

$$u_1 = \int_0^\infty a_1 e^{\lambda x} g\,d\lambda, \qquad x < 0; \qquad u_2 = f(x,y) + \int_0^\infty a_2 e^{-\lambda x} g\,d\lambda, \qquad x > 0, \tag{20}$$

где $a_i(\lambda)$ – неизвестные параметры, функция $g(y,\lambda)$ имеет вид (18). Отсюда функции $u_i(x,y)$ удовлетворяют соответствующему уравнению (16) (при условии сходимости и дифференцируемости интегралов (20)).

Приравняем коэффициенты слева и справа при функции $g(y,\lambda)$ под знаками интегралов (19), (20) в условиях сопряжения (12). При этом необходимо найти указанные коэффициенты в функциях $F_{2r}[u_1]$ и $G_{2r}[u_1]$ (12). Для нахождения этих коэффициентов поставим функции u_1 при $x = 0$ в соответствие указанный коэффициент a_1 (20). Это соответствие обозначим символом $u_1 \div a_1$. Из первого равенства (20) следует $\partial_x^k u_1 \div \lambda^k a_1$, причём данное соответствие линейно, т. е. если $u_i \div a_i$, $i = 1, 2$, то $c_1 u_1 + c_2 u_2 \div c_1 a_1 + c_2 a_2$, где c_i – постоянные.

Лемма. *Если $u_1 \div a_1$, то для операторов $F_j[u_1]$ и $G_j[u_1]$* (13), (14) *имеем*

$$F_{2i-1}[u_1] \div \lambda a_1 p_{i-1}, \qquad G_{2i-1}[u_1] \div \lambda a_1 q_i, \qquad F_{2i}[u_1] \div \lambda a_1 p_i, \qquad G_{2i}[u_1] \div \lambda a_1 q_i, \tag{21}$$

где функции $p_i(\lambda)$, $q_i(\lambda)$ строятся по рекуррентным формулам

$$q_i = \lambda A_{2i-1}(1 + \lambda p_{i-1}) + q_{i-1}, \qquad p_i = B_{2i}(k_1 + q_i) + p_{i-1}, \tag{22}$$

$$i = 1, ..., r, \qquad p_0 = q_0 = 0.$$

Доказательство. Из равенств (13), (14) с учётом первого разложения (20) получим

$$F_1[u_1] \div 0, \qquad G_1[u_1] \div A_1\lambda^2 a_1 = \lambda a_1 q_1$$

$$F_2[u_1] \div B_2\lambda a_1(k_1 + A_1\lambda) = \lambda a_1 p_1, \qquad G_2[u_1] \div \lambda a_1 q_1,$$

где $q_1 = A_1\lambda$, $p_1 = B_2(k_1 + q_1)$, т. е. формулы (21), (22) справедливы при $i = 1$. Полагая, что формулы (21), (22) верны для некоторого i, с помощью равенств (13), (14) найдем

$$F_{2i+1}[u] \div \lambda a_1 p_i, \qquad G_{2i+1}[u] \div A_{2i+1}\lambda^2 a_1(1 + \lambda p_i) + \lambda a_1 q_i = \lambda a_1 q_{i+1},$$

$$F_{2i+2}[u] \div B_{2i+2}\lambda a_1(k_1 + q_{i+1}) + \lambda a_1 p_i = \lambda a_1 p_{i+1}, \qquad G_{2i+2}[u] \div \lambda a_1 q_{i+1},$$

где $q_{i+1} = \lambda A_{2i+1}(1 + \lambda p_i) + q_i$, $p_{i+1} = B_{2i+2}(k_1 + q_{i+1}) + p_i$, т. е. получили формулы (21), (22) при $i + 1$. Лемма доказана.

Из равенств (21), (22) следует $F_{2r}[u_1] \div \lambda a_1 p_r$, $G_{2r}[u_1] \div \lambda a_1 q_r$. Тогда из условий сопряжения (12) с учётом разложения функций $f(x, y)$ и $u_i(x, y)$ (19), (20) для параметров $a_{1,2}$ получим систему алгебраических уравнений $1 + a_2 = a_1(1 + \lambda p_r)$, $k_2(1 - a_2) = a_1(k_1 + q_r)$, решение которой имеет вид

$$a_1 = \frac{2k_2}{d}, \qquad a_2 = \frac{\lambda k_2 p_r - q_r + k_2 - k_1}{d}, \tag{23}$$

где

$$d(\lambda) = \lambda k_2 p_r + q_r + k_1 + k_2, \tag{24}$$

при этом $d > 0$ при $0 \leq \lambda < \infty$. Функция $d(\lambda)$ является монотонно возрастающим многочленом (22). При $B_{2r} > 0$, т. е. когда последняя завеса имеет место, функции $q_r(\lambda)$ и $p_r(\lambda)$ (22) являются многочленами одинаковой степени $2r - 2 + \nu$, где $\nu = 1$ или $\nu = 0$ соответственно, когда первая трещина имеет место ($A_1 > 0$) или отсутствует ($A_1 = 0$). При $B_{2r} = 0$, т. е. когда последняя завеса отсутствует, степени многочленов $q_r(\lambda)$ и $p_r(\lambda)$ различные и соответственно равны $2r - 2 + \nu$ и $2r - 4 + \nu$. Отсюда степени слагаемых $\lambda k_2 p_r$ и q_r, входящих в (23), (24), различны для любого варианта значения $B_{2r} \geq 0$. При $B_{2r} > 0$ для степеней многочленов $\lambda k_2 p_r$ и q_r выполняется неравенство $2r - 1 + \nu > 2r - 2 + \nu$, при $B_{2r} = 0$ для степеней $\lambda k_2 p_r$ и q_r выполняется противоположное неравенство $2r - 3 + \nu < 2r - 2 + \nu$. Отсюда при $B_{2r} > 0$ и $B_{2r} = 0$ из (23), (24) параметр a_2 найдем соответственно в виде

$$a_2 = 1 - \frac{2(q_r + k_1)}{d}, \qquad a_2 = -1 + \frac{2k_2(\lambda p_r + 1)}{d},$$

при этом обе дроби правильные. Тогда с учётом разложения заданной функции $f(x, y)$ (19) решение u_i (20) задачи (16), (12) получим в виде

$$u_1 = 2k_2 \int_0^\infty \frac{1}{d} e^{\lambda x} g \, d\lambda, \qquad x < 0, \tag{25}$$

при этом функция $u_2(x, y)$ при $B_{2r} > 0$ или при $B_{2r} = 0$ примет соответственно вид

$$u_2 = f(x, y) + f(-x, y) - 2 \int_0^\infty \frac{q_r + k_1}{d} e^{-\lambda x} g \, d\lambda, \qquad x > 0, \tag{26}$$

или

$$u_2 = f(x, y) - f(-x, y) + 2k_2 \int_0^\infty \frac{\lambda p_r + 1}{d} e^{-\lambda x} g \, d\lambda, \qquad x > 0, \tag{27}$$

где функции $d(\lambda)$, $g(y,\lambda)$, $q_r(\lambda)$, $p_r(\lambda)$ равны (24), (18), (22).

Интегралы (25)–(27) сходятся и допускают дифференцирование необходимое число раз, что следует из асимптотики подынтегральных функций при $\lambda \to +\infty$ вида $O(\lambda^{-a}e^{-\lambda|x|})$, где $a > 0$.

Отметим, что полученное решение (25)–(27) задачи (16), (12) справедливо для достаточно узкого класса заданных функций $f(x,y)$, удовлетворяющих условию (18). С другой стороны, это решение имеет достаточно сложный вид, т. к. содержит двукратные квадратуры (внешнюю и внутреннюю в коэффициентах Фурье) от сильно осциллирующих тригонометрических функций.

Для того, чтобы выразить функции u_i (25)–(27) непосредственно через заданную функцию $f(x,y)$ (17) без интегралов Фурье выведем рабочую формулу, позволяющую свертывать разложения Фурье. Из разложения функции $f(x,y)$ (19) следует равенство

$$f(x-t,y) = \int\limits_0^\infty e^{\lambda(x-t)} g\, d\lambda, \qquad x \le 0, \qquad t > 0.$$

Умножая это равенство на $e^{-\gamma t}t^n$ и интегрируя по $t \in (0,\infty)$, с учётом равенства (см. формулу 2.3.3.2 в [4, с. 322])

$$\int\limits_0^\infty e^{-at}t^n dt = \frac{n!}{a^{n+1}}, \qquad a > 0$$

получим формулу

$$\frac{1}{n!}\int\limits_0^\infty e^{-\gamma t}t^n f(x-t,y)dt = \int\limits_0^\infty \frac{e^{\lambda x}g}{(\lambda+\gamma)^{n+1}}d\lambda, \qquad x < 0, \tag{28}$$

где $\gamma > 0$, $n = 0,1,2,...$. Данная формула позволяет посредством разложения подынтегральных правильных дробей (25)–(27) на простейшие дроби выразить решение u_i задачи (16), (12) в однократных квадратурах непосредственно через функцию $f(x,y)$ (17) без разложений Фурье.

Рассмотрим случай, когда многочлен $d(\lambda)$ (24) имеет действительные корни $-\gamma_j$ кратности m_j, $j = 1,...,p$, т. е.

$$d = c(\lambda+\gamma_1)^{m_1}...(\lambda+\gamma_p)^{m_p}. \tag{29}$$

Тогда разложения дробей (25)-(27) на простейшие дроби соответственно примут вид

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{c}\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{m_j}\frac{a_{kj}}{(\lambda+\gamma_j)^k},$$

$$\frac{q_r+k_1}{d} = \frac{1}{c}\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{m_j}\frac{b_{kj}}{(\lambda+\gamma_j)^k}, \qquad \frac{\lambda p_r+1}{d} = \frac{1}{c}\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{m_j}\frac{c_{kj}}{(\lambda+\gamma_j)^k}. \tag{30}$$

Отсюда с учётом формулы (28) функции $u_i(x,y)$ (25)–(27) приводятся к виду

$$u_1 = \frac{2k_2}{c}\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{m_j}\frac{a_{kj}}{(k-1)!}\int\limits_0^\infty e^{-\gamma_j t}t^{k-1}f(x-t,y)dt, \qquad x < 0, \tag{31}$$

$$u_2 = f(x,y) - (-1)^\mu\left[f(-x,y) - \right.$$

$$\left. -\frac{2}{c}\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{m_j}\frac{d_{kj}(\mu)}{(k-1)!}\int\limits_0^\infty e^{-\gamma_j t}t^{k-1}f(-x-t,y)dt\right], \qquad x > 0, \tag{32}$$

где $-\gamma_j$ – корни многочлена d (24), (29), $\mu = 1$ и $\mu = 0$ соответственно при $B_{2r} > 0$ и $B_{2r} = 0$, при этом $d_{kj}(1) = b_{kj}$, $d_{kj}(0) = k_2 c_{kj}$ (30).

Формулы (31), (32) справедливы для общего случая задач (10)–(12) и (15).

Теорема. *Если многочлен* $d(\lambda)$ (24) *имеет действительные корни* $-\gamma_j$ (29) *и функция* $f(x, y)$ *является решением задачи* (15), *удовлетворяющим вместе с частными производными, входящими в уравнение* (15), *условию*

$$|f(x,y)| = O(e^{\gamma|x|}), \qquad x \to -\infty, \tag{33}$$

где $\gamma < \min \gamma_j$, *то функции* $u_i(x, y)$ (31), (32) *являются решением задачи* (10)–(12).

Доказательство. Из неравенства $d \geq k_1 + k_2 > 0$ при $0 \leq \lambda < \infty$ следует, что действительные корни $-\gamma_j$ многочлена d (24) отрицательны. Отсюда в равенствах (31), (32) $\gamma_j > 0$, т. е. интегралы (31), (32) при условии (33) сходятся вместе с частными производными, входящими в уравнение (1). Полученное решение (31), (32) имеет вид операторов, действующих на функцию $f(x, y)$ по одной переменной x. В условиях сопряжения (12) также участвует одна переменная x. При этом можно показать, что условия сопряжения (12) для функций u_i (31), (32) выполняются тождественно. Аргументы функции $f(x, y)$ в формулах (31), (32), кроме первого слагаемого в формуле (32), принадлежат области D_1, где условия задачи для функции $f(x, y)$ однородны. При этом, если функция $f(x, y)$ удовлетворяет однородному уравнению $\partial_x^2 f + L[f] = 0$ при $x < 0$, то функция $f(-x, y)$ удовлетворяет этому уравнению при $x > 0$. Отсюда условия задачи (10)-(12) для функций (31), (32) проверяются непосредственно. Теорема доказана.

Можно показать, что в случае комплексно сопряженных корней многочлена (24) функции (31), (32) действительны.

Таким образом, задача (10)–(12) сводится к решению соответствующей классической задачи (15) без плёнки и к нахождению корней многочлена $d(\lambda)$ (24), при этом решение задачи (10)–(12) выражается в виде конечной суммы однократных квадратур вида (31), (32) через решение соответствующей классической задачи (15).

Список литературы

1. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твёрдых тел. М.: Наука, 1964. 487 с.

2. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970. 710 с.

3. Пилатовский В. П. Основы гидромеханики тонкого пласта. М.: Недра, 1966. 317 с.

4. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. 798 с.

5. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 735 с.

6. Холодовский С. Е. Метод свёртывания разложений Фурье. Случай обобщённых условий сопряжения типа трещины (завесы) в кусочно-неоднородных средах // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 6. С. 855–859.

7. Холодовский С. Е. Метод свёртывания разложений Фурье. Случай трещины (завесы) в неоднородном пространстве // Дифференциальные уравнения. Т. 45. № 8. 2009. С. 1204–1208.

Статья поступила в редакцию 29.01.2012 г.