УДК 517.956
ББК В143

Святослав Евгеньевич Холодовский,
доктор физико-математических наук,
Забайкальский государственный
гуманитарно-педагогический университет им. Н. Г. Чернышевского
(Чита, Россия), e-mail: hol47@yandex.ru
Галина Михайловна Давиденко,
старший преподаватель,
Забайкальский государственный университет
(Чита, Россия), e-mail: y.g.m@mail.ru

О решении краевых задач в кусочно-однородных цилиндрах с двумя параллельными завесами[1]

Рассмотрены краевые задачи для линейных дифференциальных уравнений в кусочно-однородных цилиндрах, разделённых на три зоны слабопроницаемыми плёнками. Указанные задачи моделируют процессы тепломассопереноса в композитных материалах с плёночными включениями, которые имеют широкие приложения. Методом свертывания разложений Фурье решения задач выражены через решения соответствующих классических задач в однородных цилиндрах без плёнок.

Ключевые слова: краевые задачи, слабопроницаемые плёнки, кусочно-однородные зоны, метод свертывания разложений Фурье.

Svyatoslav Yevgenyevich Kholodovskii
Doctor of Physics and Mathematics,
Zabaikalsky State Humanitarian Pedagogical University named after N.G. Chernyshevsky
(Chita, Russia), e-mail: hol47@yandex.ru
Galina Mikhailovna Davidenko,
Senior Lecturer, Trans-Baikal State University
(Chita, Russia), e-mail: y.g.m@mail.ru

The Solution of Boundary Value Problems in Piecewise Homogeneous Cylinders with Two Parallel Screens

The article addresses boundary value problems for linear differential equations in piecewise-homogeneous cylinders divided into three zones by slow-permeable films. These tasks model the processes of heat and mass transfer in composite materials with film inclusions that are of wide application. With the help of the method of convolution of Fourier expansions, task solutions are expressed in terms of solving corresponding classical solutions to the problems in homogeneous cylinders without films.

Keywords: boundary value problems, slow-permeable films, piecewise-homogeneous zones, method of convolution of Fourier expansions.

Во многих отраслях хозяйственной деятельности все более широкие применения находят композитные материалы, содержащие разнородные фракции, в том числе наноразмерные плёночные включения. Поэтому представляет большой интерес решение краевых задач в кусочно-однородных областях при наличии плёнок.

Рассмотрим в пространстве R^m цилиндр $D = (x \in R) \times (y \in Q \subseteq R^{m-1})$, разделённый двумя слабопроницаемыми завесами $x = 0$ и $x = l$ с одинаковым параметром B на зоны $D_1(x < 0)$, $D_2(0 < x < l)$, $D_3(x > l)$, $y \in Q$. Пусть проницаемости зон D_i по переменной x постоянны и равны k_i, при этом $k_3 = k_1$. В данном случае в цилиндре D проницаемости k_1 имеет место включение D_2 проницаемости k_2, экранированное слабопроницаемыми плёнками. Для функций $u_i(x, y)$ в D_i рассмотрим класс краевых задач с неоднородными условиями в зоне D_1:

[1]Работа выполнена в рамках Государственного задания вузу Минобрнауки РФ, № 1.3985.2011.

$$\partial_x^2 u_1 + L[u_1] = H(x,y), \qquad M[u_1]_{|S} = h(x,y), \tag{1}$$

$$\partial_x^2 u_j + L[u_j] = 0, \qquad M[u_j]_{|S} = 0, \qquad j = 2,3, \tag{2}$$

$$x = 0: \qquad u_2 - u_1 = Bk_1 \partial_x u_1, \qquad k_2 \partial_x u_2 = k_1 \partial_x u_1, \tag{3}$$

$$x = l: \qquad u_3 - u_2 = Bk_2 \partial_x u_2, \qquad k_1 \partial_x u_3 = k_2 \partial_x u_2, \tag{4}$$

где L и M – произвольные линейные дифференциальные операторы по переменным y_i, т. е. эти операторы не содержат производных по x и коэффициенты при производных не зависят от x, S – боковая поверхность цилиндра D, $H(x,y)$ и $h(x,y)$ – заданные функции, $y = (y_1, ...y_{m-1}) \in Q$. Условия сопряжения (3), (4) на плёнках выведены в работах [1; 2]. Методом свертывания разложений Фурье [1; 2] выразим решение задачи (1)–(4) через решение $f(x,y)$ классической задачи в однородном цилиндре D без плёнок:

$$\partial_x^2 f + L[f] = \begin{cases} H(x,y), & x < 0 \\ 0 & x \geq 0 \end{cases}, \qquad M[f]_{|S} = \begin{cases} h(x,y), & x < 0 \\ 0 & x \geq 0 \end{cases}. \tag{5}$$

Для вывода общих формул рассмотрим модельные случаи задач (1)–(4) и (5) на плоскости x, y для оператора Лапласа, допускающие применение метода Фурье, соответственно вида

$$\Delta u_1 = H(x,y), \qquad \Delta u_j = 0, \qquad j = 2,3 \tag{6}$$

с условиями сопряжения (3), (4) и

$$\Delta f = \begin{cases} H(x,y), & x < 0 \\ 0 & x \geq 0 \end{cases}. \tag{7}$$

Предположим сначала, что функция $f(0,y)$ разлагается в интеграл Фурье:

$$f(0,y) = \int_0^\infty g \, d\lambda, \qquad g(y,\lambda) = f_1 \sin \lambda y + f_2 \cos \lambda y, \tag{8}$$

где $f_i(\lambda)$ – коэффициенты Фурье функции $f(0,y)$. Отсюда функция $f(x,y)$ при $x > 0$, где она удовлетворяет уравнению Лапласа (7), представима в виде разложения Фурье

$$f(x,y) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} g \, d\lambda, \qquad x > 0. \tag{9}$$

Представим решение задачи (6), (3), (4) в виде

$$u_1 = f(x,y) + \int_0^\infty a_1 e^{\lambda x} g \, d\lambda, \qquad x < 0, \tag{10}$$

$$u_2 = \int_0^\infty [a_2 \operatorname{sh} \lambda(x-l) + b \operatorname{ch} \lambda(x-l)] g \, d\lambda, \qquad 0 < x < l, \tag{11}$$

$$u_3 = \int\limits_0^\infty a_3 e^{-\lambda(x-l)} g d\lambda, \qquad x > l, \tag{12}$$

где функция $g(y,\lambda)$ имеет вид (8). Отсюда функции (10)–(12) удовлетворяют соответствующему уравнению (6). Из условий сопряжения (3), (4) с учётом (9) для параметров a_i, b получим систему алгебраических уравнений $-a_2 s + bc - 1 - a_1 = Bk_1\lambda(a_1 - 1)$, $k_2(a_2 c - bs) = k_1(a_1 - 1)$, $a_3 - b = Bk_2\lambda a_2$, $-k_1 a_3 = k_2 a_2$, решение которой имеет вид

$$a_1 = 1 - \frac{2k_2(p\lambda s + k_2 s + k_1 c)}{d}, \qquad a_2 = -\frac{2k_1^2}{d},$$

$$b = \frac{2k_1(p\lambda + k_2)}{d}, \qquad a_3 = \frac{2k_1 k_2}{d}, \tag{13}$$

где

$$d(\lambda) = (p\lambda s + k_2 s + k_1 c)(p\lambda + k_2) + k_1(p\lambda c + k_2 c + k_1 s), \qquad p = Bk_1 k_2, \tag{14}$$

$s = \operatorname{sh}\lambda l$, $c = \operatorname{ch}\lambda l$, при этом $d(\lambda) > 0$ при $0 \le \lambda < \infty$. Раскладывая дробь $1/d$ в геометрическую прогрессию, получим

$$\frac{1}{d} = \frac{2e^{-\lambda l}}{p^2(\lambda+\gamma)^2(1-q)} = \frac{2}{p^2}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda l(2n+1)}\frac{(\lambda+\nu)^{2n}}{(\lambda+\gamma)^{2n+2}}, \tag{15}$$

где

$$q = \left(\frac{\lambda+\nu}{\lambda+\gamma}\right)^2 e^{-2\lambda l}, \qquad \gamma = \frac{k_1 + k_2}{p}, \qquad \nu = \frac{k_2 - k_1}{p},$$

$|q(\lambda)| < 1$ при $0 \le \lambda < \infty$. Отсюда функции u_i (10)–(12) с учётом (9), (13), (15) примут вид

$$u_1 = f(x,y) + f(-x,y) -$$

$$-\frac{2k_2}{p}\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_0^\infty \left[e^{\lambda(x-2nl)}\frac{(\lambda+\nu)^{2n}}{(\lambda+\gamma)^{2n+1}} - e^{\lambda(x-2nl-2l)}\frac{(\lambda+\nu)^{2n+1}}{(\lambda+\gamma)^{2n+2}}\right] g d\lambda, \tag{16}$$

$$u_2 = \frac{2k_1}{p}\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_0^\infty \left[e^{-\lambda(x+2nl)}\frac{(\lambda+\nu)^{2n}}{(\lambda+\gamma)^{2n+1}} + e^{\lambda(x-2nl-2l)}\frac{(\lambda+\nu)^{2n+1}}{(\lambda+\gamma)^{2n+2}}\right] g d\lambda, \tag{17}$$

$$u_3 = \frac{4k_1 k_2}{p^2}\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_0^\infty e^{-\lambda(x+2nl)}\frac{(\lambda+\nu)^{2n}}{(\lambda+\gamma)^{2n+2}} g d\lambda. \tag{18}$$

Из разложения функции $f(x,y)$ (9) следует равенство

$$f(-x+t,y) = \int\limits_0^\infty e^{\lambda(x-t)} g d\lambda, \qquad x < 0, \qquad t > 0.$$

Отсюда аналогично работе [3] получим формулу

$$\frac{(-1)^k}{n!}\int\limits_0^\infty e^{-\delta t} t^n \partial_t^k [e^{-\nu t} f(-x+t,y)] dt = \int\limits_0^\infty e^{\lambda x}\frac{(\lambda+\nu)^k g}{(\lambda+\gamma)^{n+1}} d\lambda, \qquad x < 0, \tag{19}$$

где $n=0,1,...,$ $k=0,1,...,$ $\gamma>0$, функция $g(y,\lambda)$ имеет вид (8),

$$\delta=\gamma-\nu=\frac{2k_1}{p}>0.$$

С учетом формулы (19) решение (16)–(18) задачи (6), (3), (4) непосредственно выражается через функцию $f(x,y)$ (7) без разложений Фурье в виде

$$u_1=f(x,y)+f(-x,y)-\frac{2k_2}{p}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}\int\limits_0^{\infty}e^{-\delta t}t^{2n}\left\{\partial_t^{2n}[e^{-\nu t}f(-x+2nl+t,y)]+\right.$$

$$\left.+\frac{t}{2n+1}\partial_t^{2n+1}[e^{-\nu t}f(-x+2nl+2l+t,y)]\right\}dt, \tag{20}$$

$$u_2=\frac{2k_1}{p}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}\int\limits_0^{\infty}e^{-\delta t}t^{2n}\left\{\partial_t^{2n}[e^{-\nu t}f(x+2nl+t,y)]-\right.$$

$$\left.-\frac{t}{2n+1}\partial_t^{2n+1}[e^{-\nu t}f(-x+2nl+2l+t,y)]\right\}dt, \tag{21}$$

$$u_3=\frac{4k_1k_2}{p}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}\int\limits_0^{\infty}e^{-\delta t}t^{2n+1}\partial_t^{2n}[e^{-\nu t}f(x+2nl+t,y)]dt, \tag{22}$$

где постоянная p имеет вид (14). Полученные формулы (20)–(22) справедливы для общего случая задач (1)–(4) и (5). Для полученного решения имеет место следующая теорема, аналогичная теореме работы [4].

Теорема. *Если функция $f(x,y)$ является решением задачи* (5) *и для любого $n=0,1,...$ выполняется условие*

$$|\partial_x^m[e^{-\nu x}f(x,y)]|<c\alpha^m e^{\alpha x},\qquad x\to+\infty, \tag{23}$$

где $0<\alpha<\alpha_0$, $\alpha_0(1+\mu e^{\alpha_0 l})=\delta$, $\mu=e^{\nu l}$, то решение задачи (1)–(4) *строится по формулам* (20)–(22).

Доказательство. Функция $\beta(\alpha)=\alpha(1+\mu e^{\alpha l})$ монотонно возрастает при $0\le\alpha\le\alpha_0$ от нуля до $\delta=\alpha_0(1+\mu e^{\alpha_0 l})>0$, при этом $\alpha\le\alpha_0<\alpha_0(1+\mu e^{\alpha_0 l})=\delta$. Отсюда при $0<\alpha<\alpha_0$ следуют неравенства

$$\alpha<\delta,\qquad \beta(\alpha)=\alpha(1+\mu e^{\alpha l})<\delta, \tag{24}$$

при этом из условия (23) при $x>0$ следует $|\partial_t^{2n}[e^{-\nu t}f(x+2nl+t,y)]|<c\alpha^{2n}e^{(\alpha+\nu)(x+2nl)+\alpha t}$. Отсюда для первого интеграла (20) получим оценку

$$\frac{1}{(2n)!}\left|\int\limits_0^{\infty}e^{-\delta t}t^{2n}\partial_t^{2n}[e^{-\nu t}f(x+2nl+t,y)]dt\right|\le$$

$$\le\frac{1}{(2n)!}\int\limits_0^{\infty}e^{-\delta t}t^{2n}\left|\partial_t^{2n}[e^{-\nu t}f(x+2nl+t,y)]\right|dt<$$

$$<\frac{c\alpha^{2n}e^{(\alpha+\nu)(x+2nl)}}{(2n)!}\int\limits_0^{\infty}e^{-(\delta-\alpha)t}t^{2n}dt=\frac{ce^{(\alpha+\nu)x}}{\delta-\alpha}r^{2n},$$

где $x > 0$,

$$r = \frac{\alpha e^{(\alpha+\nu)l}}{\delta - \alpha}.$$

В силу неравенств (24) имеем $0 < r < 1$. Аналогичные оценки имеют место для остальных членов рядов (20)–(22). Отсюда ряды (20)–(22) мажорируются рядами, сходящимися со скоростью геометрических прогрессий, т. е. ряды (20)–(22) сходятся и допускают дифференцирование необходимое число раз.

Полученные решения (20)–(22) имеют вид операторов, действующих на заданную функцию $f(x, y)$ по одной переменной x, мультипеременная y остается свободной (параметром). В условиях сопряжения (3), (4) также участвует только переменная x. При этом эти условия для функций (20)–(22) выполняются тождественно. Аргументы функции $f(x, y)$ в формулах (20)–(22), кроме первого слагаемого в формуле (20), принадлежат области $x > 0$, где условия задачи для функции $f(x, y)$ однородны. Отсюда функции (20)–(22) удовлетворяют условиям задачи (1)–(4), что проверяется непосредственно. Теорема доказана.

В частном случае при $L = \partial_y^2$, $y \in R$ формулы (20)–(22) выражают гармонические функции $u_i(x, y)$ на кусочно-однородной плоскости с двумя завесами через гармоническую на однородной плоскости функцию $f(x, y)$ с сохранением её особых точек. При этом формулы (20)–(22) содержат однократные квадратуры от гладких функций без осцилляций, и эти формулы справедливы для широкого класса особых точек функции $f(x, y)$ (23), включая фундаментальное решение типа источника.

Отметим, что решения (10)–(12), полученные методом Фурье, содержат двукратные квадратуры (внешнюю и внутреннюю в коэффициентах Фурье (8)) от сильно осциллирующих функций, и, кроме того, эти решения справедливы для достаточно узкого класса функций $f(x, y)$ в смысле их поведения на бесконечности.

Список литературы

1. Холодовский С. Е. Метод свёртывания разложений Фурье в решении краевых задач с пересекающимися линиями сопряжения // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2007. Т. 47. № 9. С. 1550–1556.

2. Холодовский С. Е. Метод свёртывания разложений Фурье. Случай обобщенных условий сопряжения типа трещины (завесы) в кусочно-неоднородных средах // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 6. С. 855–859.

3. Холодовский С. Е. О решении краевых задач в полупространстве, ограниченном многослойной плёнкой // Ученые записки Забайкальского государственного гуманитарно-педагогического университета. Серия «Физика, математика, техника, технология». № 3 (38). Чита. 2011. С. 160–164.

4. Холодовский С. Е. О решении краевых задач в цилиндрах с двумя параллельными трещинами // Математический анализ и его приложения. Вып. 10 / Забайкальский государственный гуманитарно-педагогический университет. Чита. 2011. С. 56–62.

Статья поступила в редакцию 29.01.2012 г.