УДК 371.3:512
ББК 74.262.214

Виктор Алексеевич Далингер,
доктор педагогических наук, профессор,
Омский государственный педагогический университет
(Омск, Россия), e-mail: dalinger@omgpu.ru

Елена Александровна Пустовит,
аспирант,
Забайкальский государственный университет
(Чита, Россия), e-mail: pustovitlena@yandex.ru

Различные способы решения неравенств вида |f(x)|+|g(x)|>|f(x)+g(x)|

Тема «Уравнения и неравенства, содержащие неизвестное под знаком модуля» входит в обязательный минимум содержания образовательных программ по математике. Однако в школьном курсе математики ей не уделяется должного внимания, хотя задачи на эту тему регулярно встречаются на математических олимпиадах разного уровня, в заданиях государственной итоговой аттестации за курс основной школы и единого государственного экзамена для выпускников школы. В этой статье мы рассмотрим один из видов неравенств, содержащих переменную под знаком модуля, который решается стандартными способами: метод последовательного раскрытия модулей; графическим методом и нестандартными способами: методом перехода к равносильной системе и (или) совокупности; методом, основанным на применении конкретного правила. Знание, понимание и применение этих способов при решении неравенств помогут школьникам систематизировать, расширить и укрепить знания, связанные с абсолютной величиной, а учителям подготовить учащихся к успешной сдаче ГИА и ЕГЭ по математике.

Ключевые слова: неравенство, модуль, способ решения.

Viktor Alekseyevich Dalinger,
Doctor of Pedagogy, professor,
Chair of the Teaching Mathematics Department, Omsk State Pedagogical University,
(Omsk, Russia), e-mail: dalinger@omgpu.ru

Yelena Aleksandrovna Pustovit,
a postgraduate student,
Zabaikalsky State University
(Chita, Russia), e-mail: pustovitlena@yandex.ru

Various Ways of the Solution of |f(x)|+|g(x)|>|f(x)+g(x)| Inequalities

The topic «Equations and Inequalities Containing the Unknown with the Sign of the Module» is a compulsory basic element of the school program in Mathematics. Although the tasks in this topic are frequently met at the Mathematical Olympiads of various levels, at the Final State Exams for the pupils of the 9th form and at the Unified National Exams for the school-leavers, little attention is given to it in the course of Mathematics at school. This article is devoted to the inequalities containing the variable with the sign of the module, which is solved by some standard ways: the method of the successive opening of the modules, the graphical method; and some non-standard ways: the method of passing to the equivalent system, the method based on the application of the special rule. The knowledge, understanding and application of these methods when solving inequalities will help the pupils to systematize, enlarge and improve the knowledge connected with the absolute value. It will be also useful for teachers who prepare their pupils for the Final State Exam and the Unified State Exam in Mathematics.

Keywords: inequality, module, ways of the solution.

Решение неравенств, содержащих знак модуля – одна из сложных тем школьного курса математики основной школы. Известно, что основные способы решения неравенств во многом совпадают со способами решения аналогичных уравнений (метод последовательного раскрытия модулей, графический метод), но необходимо помнить, что они не всегда являются оптимальными. Поэтому учителю необходимо знакомить учащихся с другими, более рациональными способами, приводящими к быстрому получению окончательного результата.

© В. А. Далингер, Е. А. Пустовит, 2012

Продемонстрируем стандартные и нестандартные способы решений на одном из видов неравенств, содержащих знак модуля:

$|x+2|+|x-5|>|2x-3|$.

Способ 1 (стандартный) [2] – метод последовательного раскрытия модулей.

Найдём нули каждого из выражений, стоящих под знаком модуля:

$x+2=0,\quad x-5=0,\quad 2x-3=0$

$x=-2;\quad x=5;\quad x=1,5$

Числа –2, 1,5 и 5 разбивают числовую прямую на четыре промежутка (рис. 1).

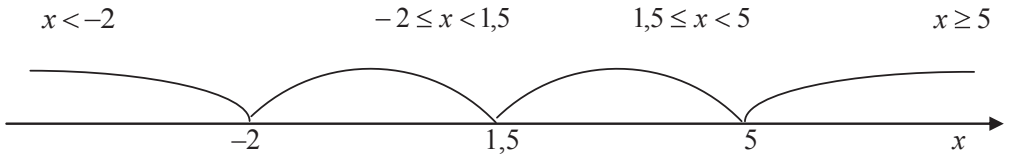

Рис. 1

Определим знаки каждого из выражений, стоящих под знаком модуля, в каждом из промежутков. Составим таблицу знаков (табл.1).

Таблица 1

Промежутки / Подмодульные выражения	x < -2	-2≤x < 1,5	1,5 ≤x < 5	x ≥ 5
x + 2	–	+	+	+
x – 5	–	–	–	+
2x – 3	–	–	+	+

1) Если x < -2, то имеем систему

$$\begin{cases} x<-2, \\ -(x+2)-(x-5)>-(2x-3); \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x<-2, \\ -2x+3>-2x+3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-2, \\ 0x>0\ (неверно). \end{cases}$$

Система не имеет решений.

2) Если –2≤x < 1,5, то имеет систему

$$\begin{cases} -2\le x<1,5, \\ (x+2)-(x-5)>-(2x-3); \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -2\le x<1,5, \\ 2x>-4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\le x<1,5, \\ x>-2. \end{cases}$$

Решение системы – промежуток $(-2;1,5)$.

3) Если *1,5≤x < 5* то имеет систему

$$\begin{cases} 1,5\le x<5, \\ (x+2)-(x-5)>2x-3; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 1,5\le x<5, \\ -2x>-10; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1,5\le x<5, \\ x<5. \end{cases}$$

Решение системы – промежуток [1,5; 5).

4) Если *x≥5,* то имеем систему

$$\begin{cases} x\ge 5, \\ (x+2)+(x-5)>2x-3; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x\ge 5, \\ 2x-3>2x-3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 5, \\ 0x>0\ (неверно). \end{cases}$$

Система не имеет решений.

Объединяем решения в пунктах 2) и 3). Получаем решение исходного неравенства: промежуток (-2; 5).

Ответ: (-2; 5).

Метод последовательного раскрытия модулей является одним из самых простых и доступных способов решения как неравенств, так и уравнений. Учащиеся, применяя этот способ на практике при решении простейших неравенств, практически никогда не ошибаются, т. к.решение сводится к безошибочным алгоритмическим действиям. Единственный недостаток – громоздкость решения и, как следствие, – большая потеря времени, что является немаловажным фактором в условиях сдачи ГИА или ЕГЭ.

Способ 2 (стандартный) [1] – графический метод.

В одной системе координат построим графики двух функций: y=|x+2|+|x-5| и y=|2x-3| (рис. 2).

Для построения ломаной, являющейся графиком функции y=|x+2|+|x-5| (сплошная линия), поступим одним из самых простых способов.

1) Найдём её вершины. Абсциссы вершин – нули выражений, стоящих под модулем.

Вершина P_1: x + 2=0, x_1= -2 Найдём значение функции при x_1 = -2 и y_1=|−2+2|+|−2−5|=|−7|=7. P_1(−2;7).

Вершина P_2: x − 5=0, x_2=5. Найдём значение функции при x_2=5 и y_2=|5+2|+|5−5|=|7|=7. P_2(5;7).

2) Возьмём по одному значению *x* – левее абсциссы вершины P_1 и правее абсциссы вершины P_2.Получим:

Точка P_3: x_3=−4, y_3=|−4+2|+|−4−5|=|−2|+|−9|=2+9=11. P_3(−4;11).

Точка P_4: x_4=7, y_4=|7+2|+|7−5|=|9|+|2|=9+2=11. P_4(7;11).

3) Соединим точки полученные ломаной: P_3(−4;11), P_3(−4;11), P_2(5;7), P_4(7;11)/

В этой же системе координат построим график функции **y=|2x−3| (пунктирная линия), используя** правило (алгоритм) построения графиков функций вида *y=|f(x)|*.

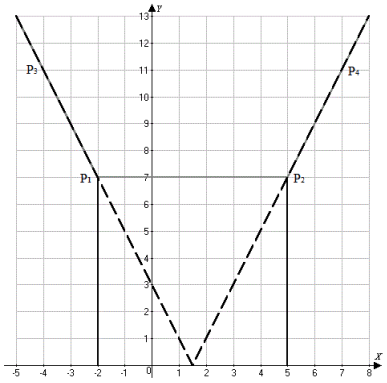

Рис. 2

На интервале (−2; 5) график функции y=|x+2|+|x−5| расположен над графиком функции y=|2x−3|, а это означает, что неравенство |x+2|+|x−5|>|2x−3| для указанных значений *x* справедливо.

Ответ: (−2; 5).

Графический способ является стандартным способом решения любых неравенств, несмотря на то, что в школьной программе он занимает весьма скромное положение или вообще фактически не изучается. А ведь его по праву можно назвать наиболее эффективным и рациональным в силу своей наглядности.

Вспомним, что умение строить графики как по точкам, так и с помощью геометрических преобразований является обязательным для каждого ученика средней школы, поэтому применение графического метода при решении неравенств не должно вызвать у них затруднений, за исключением (построения графиков непрерывных кусочно-линейных функций, формулы, задающие которых, содержат знак модуля; нахождения множества точек, являющихся решением неравенства), которые можно легко разрешить, если систематически применять данный метод, как при решении неравенств, так и при решении уравнений.

Способ 3 (нестандартный) [3] – метод перехода к равносильной системе и (или) совокупности.

При решении неравенства этим способом воспользуемся правилами:

$$|f(x)| < g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > -g(x). \end{cases} \qquad (1)$$

$$|f(x)| > g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x). \end{array}\right. \qquad (2)$$

Для исходного неравенства, переписав его в удобном виде **|2x−3| < |x+2|+|x−5| применим сначала** правило (1), а затем для решения оставшихся неравенств – правило (2). Получим:

$$|2x-3| < |x+2| + |x-5| \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3 < |x+2| + |x-5|, \\ 2x-3 > -|x+2| - |x-5|; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} |x+2| > 2x-3-|x-5|, \\ |x+2| > -2x+3-|x-5|; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x+2 > 2x-3-|x-5|, \\ x+2 < -2x+3+|x-5|, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x+2 > -2x+3-|x-5|, \\ x+2 < 2x-3+|x-5|; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} |x-5| > x-5, \\ |x-5| > 3x-1, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} |x-5| > -3x+1, \\ |x-5| > -x+5. \end{array}\right. \end{cases}$$

Вспомним, что неравенство **|f(x)| > f(x) справедливо** для всех значений *x* удовлетворяющих условию, f(x) < 0 а неравенство |f(x)| > −f(x) – для x удовлетворяющих условию **f(x) > 0 тогда последняя** система совокупностей будет равносильна следующей:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x-5 < 0, \\ |x-5| > 3x-1, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} |x-5| > -3x+1, \\ x-5 > 0; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x-5 < 0, \\ x-5 > 3x-1, \\ x-5 < -3x+1, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x-5 > -3x+1, \\ x-5 < 3x-1, \\ x-5 > 0; \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x<5, \\ x<-2, \\ x<1{,}5 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x>1{,}5, \\ x>-2, \\ x>5; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<5, \\ x>-2. \end{cases}$$

Решением системы является промежуток (−2; 5).

Ответ: (−2; 5).

Такой способ решения неравенств может первоначально не вызвать у учащихся восхищения, т. к., во-первых, решение кажется достаточно сложным и запутанным, а во-вторых, учащиеся всегда испытывают трудности при равносильных переходах от неравенства к системе или совокупности неравенств. Хотя если внимательно проанализировать решение, то в его реализации мы ничего нового не «открывали» и никакими сложными, трудно запоминаемыми свойствами не пользовались. Правила 1 и 2 учащимся знакомы, и они их всегда успешно применяют на практике в отдельно взятом виде.

Конечно, применение этого способа для неравенств подобного типа не является оптимальным и рациональным, но для более сложных примеров такой способ окажется наилучшим и быстро приводящим учащихся к правильному ответу.

Способ 4 (нестандартный) [3] – применение конкретного правила.

Заметим, что заданное неравенство имеет вид $|a|+|b|>||a+b|$, тогда, для его решения? можно воспользоваться правилом $|a|+|b|>|a+b| \Leftrightarrow a\cdot b<0$ Очевидно, что бо́льшая часть учащихся это правило не помнит или вообще не знает, но, применяя свойство неравенств: если **x и y – неотрицательные** числа и $x>y$, то $x^n>y^n$, где n − любое натуральное число, легко выведет его самостоятельно.

Действительно,

$|a| + |b|>|a + b| \Leftrightarrow (|a| + |b|)^2>|a + b|^2 \Leftrightarrow a^2 + 2|ab| + b^2 > a^2 + 2ab + b^2 \Leftrightarrow$

$$2|ab| > 2ab \Leftrightarrow |ab| > ab \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} ab>0, \\ ab>ab, \end{cases} \Leftrightarrow \text{решений нет}, \\ \begin{cases} ab<0, \\ -ab>ab; \end{cases} \Leftrightarrow ab<0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \quad ab<0.$$

Таким образом, чтобы решить неравенство таким нестандартным способом, необходимо помнить классическое правило: «если обе части неравенства неотрицательные, то его обе части можно возвести в квадрат» и уметь его реализовать.

Опираясь на вышесказанное, решим заданное неравенство $|x+2|+|x-5| > |2x-3|$

Решение:

$|x+2|+|x-5| > |2x-3| \Leftrightarrow |x+2|+|x-5| > |(x+2)| + (x-5)| \Leftrightarrow (x+2)(x-5) < 0$

решая последнее квадратное неравенство, получим ответ (−2; 5).

Как видим: красиво, быстро и просто.

Ответ: (−2; 5).

Очевидно, что применять нестандартные способы решения именно для неравенства такого вида учащиеся и не будут, так как аналитическое решение (например, методом последовательного раскрытия модулей) или графическое у них не вызывает ни сомнений, ни трудностей. Но если же им предложить решить неравенство $|x^2-5x+4|+|x^2-1|>|2x^2-5x+3|$ стандартными способами, то скорее всего бо́льшая их часть не доведёт его решение до логического конца, т. к., во-первых, некоторые нули подмодульных выражений есть иррациональные числа, во-вторых, решать семь раз неравенство на каждом из промежутков не вызывает желания и, в-третьих, строить графики функций $y_1=|x^2-5x+4|+|x^2-1|$ и $y=|2x^2-5x+3|$ – сложно. Поэтому, самым простым, рациональным, компактным способом как раз и будет последний – чётвертый способ. Приведём это решение:

$|x^2 - 5x + 4| + |x^2-1| > |2x^2-5x+3| \Leftrightarrow |x^2 - 5x + 4| + |x^2-1| > |(x^2 - 5x + 4)(x^2 - 1) < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x - 1)(x - 4)(x - 1)(x + 1) < 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 1)^2 (x - 4) < 0.$

Решая неравенство методом интервалов (рис. 3), получим:

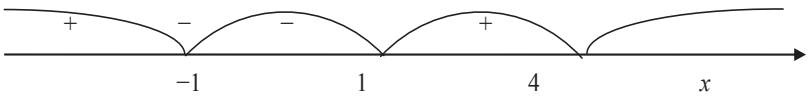

Рис. 3

Решением неравенства является объединение промежутков $(-1; 1) \cup (1; 4)$.

Ответ: $(-1; 1) \cup (1; 4)$.

Итак, рассмотрев различные стандартные и нестандартные способы решения указанного типа неравенств, заметим, что при решении сложных уравнений или неравенств не всегда следует идти по «накатанной колее», пытаясь найти решение «в лоб»: достаточно лишь взглянуть на него и найти зацепку, позволяющую избежать сложных вычислений и преобразований.

Поэтому при изучении темы «Решение неравенств со знаком модуля»задача учителя – познакомить учащихся со всевозможными способами решения различных видов неравенств, а задача учащихся – освоить, научиться выбирать и применять оптимальный способ, демонстрируя на практике рациональное и «красивое» решение.

Список литературы

1. Далингер В. А. Задачи с модулями: учеб. пособие. Омск: Амфора, 2010. 360 с.
2. Калугина Е. Е. Уравнения, содержащие знак модуля. М.: ИЛЕКСА, 2010. 64 с.
3. Колесова С. И. Уравнения и неравенства, содержащие модули. ЕГЭ. Математика. М.: Азбука-2000, 2010. 120 с.

Spisok literatury

1. Dalinger V. A. Zadachi s moduljami: ucheb. posobie. Omsk: Amfora, 2010. 360 s.
2. Kalugina E. E. Uravnenija, soderzhawie znak modulja. M.: ILEKSA, 2010. 64 s.
3. Kolesova S. I. Uravnenija i neravenstva, soderzhawie moduli. EGJe. Matematika. M.: Azbuka-2000, 2010. 120 s.

Статья поступила в редакцию 10.01.2012 г.