

УДК 519.63
ББК В192.1

Святослав Евгеньевич Холодовский
доктор физико-математических наук,
Забайкальский государственный университет
(Чита, Россия), e-mail: hol47@yandex.ru

Решение задачи о движении неограниченной разрывной струны (стержня) с упругим контактом¹

Рассмотрена задача Коши о движении неограниченной струны (стержня), состоящей из двух кусков, концы которых соединены упругой прокладкой типа пружинки. Методом свёртывания разложений Фурье решение задачи выражено через решение классической задачи Коши при сохранении начальных функций. Приведён пример решения задачи в конечном виде, для которого построены графики струны в окрестности упругого контакта с постоянным шагом по времени.

Ключевые слова: составная струна, составной стержень, волновое уравнение, упругий контакт, метод свёртывания разложений Фурье.

Svyatoslav Evgen'evich Kholodovskiy
Doctor of Physics and Mathematics,
Zabaikalsky State University
(Chita, Russia), e-mail: hol47@yandex.ru

Solution of the Problem of the Motion of Unbounded Breaking String (a Rod) with an Elastic Contact

The paper considers the Cauchy problem of the motion of an unbounded string (a rod), consisting of two pieces, the ends of which are connected by an elastic gasket type of spring. Using the method of convolution of Fourier expansions, the problem solution is expressed in terms of the classical solution of the Cauchy problem maintaining the initial functions. The paper gives an example of the problem solution in a closed form for which the graphs in the vicinity of the elastic contact with a constant time step are drawn.

Keywords: compound string, compound rod, wave equation, elastic contact, method of convolution of Fourier expansions.

При решении задач о движении струн с точечными возмущениями, как правило, применяются методы рядов Фурье, преобразований Фурье, численное моделирование [1–5]. При этом основная проблема заключается в нахождении спектра собственных частот. В данной работе рассматривается нестандартный подход к решению задачи о движении составной струны с упругим контактом составляющих частей струны. Поскольку метод свёртывания разложений Фурье непосредственно к решению рассматриваемой задачи неприменим, то для вывода общих формул решается вспомогательная задача, допускающая применение указанного метода. Далее доказывается, что полученные общие формулы также дают решение задачи о составной струне с упругим контактом.

1. Вывод общих формул. Рассмотрим сначала задачу для оператора Лапласа на плоскости с декартовыми координатами x, y вида

$$\Delta u_1 = 0, \quad x < 0; \quad \Delta u_2 = H(x, y), \quad x > 0; \quad (1)$$

$$x = 0 : \quad \gamma(u_2 - u_1) = \partial_x u_1, \quad \partial_x u_2 = \partial_x u_1, \quad (2)$$

где $\partial_x^n = \partial^n / \partial x^n$, $\gamma = \text{const} > 0$, $H(x, y)$ – заданная непрерывная функция. Условия сопряжения (2) в данной задаче соответствуют наличию слабопроницаемой плёнки $x = 0$ [1; 6–8] (для волнового уравнения условия (2) соответствуют наличию упругого контакта).

¹Работа выполнена в рамках Государственного задания вузу Минобрнауки РФ (код проекта 1.3985.2011).

Методом свёртывания разложений Фурье [6, 7] выразим решение этой задачи через решение аналогичной классической задачи на всей плоскости x, y без условий сопряжения:

$$\Delta f = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ H(x, y), & x > 0 \end{cases} \quad (3)$$

при соответствующем условии на бесконечности, обеспечивающем корректность задачи (3). В частности, функция $f(x, y)$ является гармонической функцией, имеющей особые точки при $x > 0$.

Далее при выводе общих формул учитывается возможность применения метода Фурье к задачам (1), (2) и (3) по переменной y (вдоль плёнки $x = 0$), т.е. возможность разложений Фурье заданных функций, как функций от переменной y .

Предположим, что функция $f(0, y)$ разлагается в интеграл Фурье с коэффициентами Фурье $f_i(\lambda)$, т. е.

$$f(0, y) = \int_0^{\infty} g(y, \lambda) d\lambda, \quad g(y, \lambda) = f_1(\lambda) \sin \lambda y + f_2(\lambda) \cos \lambda y. \quad (4)$$

Тогда для функции $f(x, y)$ при $x < 0$ (где $\Delta f = 0$ (3)) получим разложение

$$f(x, y) = \int_0^{\infty} e^{\lambda x} g(y, \lambda) d\lambda, \quad x \leq 0. \quad (5)$$

Отсюда, представляя решение задачи (1), (2) в виде

$$u_1(x, y) = \int_0^{\infty} a_1 e^{\lambda x} g d\lambda, \quad x < 0, \quad (6)$$

$$u_2(x, y) = f(x, y) + \int_0^{\infty} a_2 e^{-\lambda x} g d\lambda, \quad x > 0, \quad (7)$$

из условий сопряжения (2) находим

$$a_1 = \frac{\gamma}{\lambda + \gamma}, \quad a_2 = 1 - \frac{\gamma}{\lambda + \gamma}.$$

При этом функции (6), (7) с учетом разложения (5) примут вид

$$u_1 = \gamma \int_0^{\infty} \frac{e^{\lambda x} g(y, \lambda)}{\lambda + \gamma} d\lambda, \quad x < 0, \quad (8)$$

$$u_2 = f(x, y) + f(-x, y) - \gamma \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda x} g(y, \lambda)}{\lambda + \gamma} d\lambda, \quad x > 0, \quad (9)$$

где функция $g(y, \lambda)$ равна (4). Из разложения (5) следует формула

$$\int_0^{\infty} e^{-\gamma z} f(x - z, y) dz = \int_0^{\infty} \frac{e^{\lambda x} g(y, \lambda)}{\lambda + \gamma} d\lambda, \quad x \leq 0, \quad \gamma > 0.$$

Отсюда решение (8), (9) задачи (1), (2) выражается непосредственно через решение $f(x, y)$ классической задачи (3) без разложений Фурье:

$$u_1 = \gamma \int_0^{\infty} e^{-\gamma z} f(x - z, y) dz, \quad x < 0. \quad (10)$$

$$u_2 = f(x, y) + f(-x, y) - \gamma \int_0^{\infty} e^{-\gamma z} f(-x - z, y) dz, \quad x > 0. \quad (11)$$

Интегралы (10), (11) сходятся для любой функции $f(x, y)$, удовлетворяющей на бесконечности условию

$$|f(x, y)| < ce^{\alpha|x|}, \quad x \rightarrow -\infty, \quad \alpha < \gamma.$$

При этом функции $u_i(x, y)$ (10), (11) тождественно удовлетворяют условиям сопряжения (2) для любой дифференцируемой функции $f(x, y)$.

Формулы (10), (11) представляют собой операторы, действующие на функцию $f(x, y)$ по одной переменной x (переменная y является параметром). Отсюда для функций $u_i(x, y)$ и $f(x, y)$ по свободной переменной y можно изменить уравнение и задать дополнительные краевые условия.

2. Решение задачи о струне. Рассмотрим для функций $u_i(x, t)$ краевую задачу на прямой $-\infty < x < \infty$ с условиями сопряжения (2):

$$\partial_x^2 u_1 - \partial_t^2 u_1 = 0, \quad u_1|_{t=0} = 0, \quad \partial_t u_1|_{t=0} = 0, \quad x < 0, \quad (12)$$

$$\partial_x^2 u_2 - \partial_t^2 u_2 = 0, \quad u_2|_{t=0} = \varphi(x), \quad \partial_t u_2|_{t=0} = \psi(x), \quad x > 0, \quad (13)$$

$$x = 0: \quad \gamma(u_2 - u_1) = \partial_x u_1, \quad \partial_x u_2 = \partial_x u_1, \quad (14)$$

где $0 \leq t < \infty$ – время,

$$\gamma = \frac{B}{k}. \quad (15)$$

Условия данной задачи однородны при $x < 0$, что не умаляет общности, т.к. задача с однородными условиями при $x > 0$ (и неоднородными при $x < 0$) решается аналогично, а в общем случае неоднородных условий при $-\infty < x < \infty$ решение задачи имеет вид суммы решений указанных задач.

Задача (12)–(14) описывает движение неограниченной струны или стержня, состоящего из двух кусков $x < 0$ и $x > 0$ при их упругом контакте, когда куски струны (стержня) в точке $x = 0$ соединены пружинкой с жёсткостью B , т.е. в точке $x = 0$ действует сила натяжения, пропорциональная смещению $k\partial_x u_1 = B(u_2 - u_1)$ [1, 8]. Далее в силу большей наглядности рассматривается струна.

Решение задачи (12)–(14) строится по общим формулам (10), (11), что проверяется непосредственно, т. е.

$$u_1(x, t) = \gamma \int_0^{\infty} e^{-\gamma z} f(x - z, t) dz, \quad x < 0, \quad (16)$$

$$u_2(x, t) = f(x, t) + f(-x, t) - \gamma \int_0^{\infty} e^{-\gamma z} f(-x - z, t) dz, \quad x > 0, \quad (17)$$

где $f(x, t)$ – решение классической задачи Коши

$$\partial_x^2 f - \partial_t^2 f = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad (18)$$

$$f|_{t=0} = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \varphi(x), & x > 0 \end{cases}, \quad \partial_t f|_{t=0} = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \psi(x), & x > 0 \end{cases}, \quad (19)$$

при этом функция $f(x, t)$ выражается по формуле Даламбера [1; 8]. Для широкого класса начальных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ функции $u_i(x, t)$ строятся в конечном виде (16), (17).

Отметим, что указанный выше вывод формул (16), (17) для решения задачи (12)–(14) невозможен, т.к. к задачам (12)–(14) и (18), (19) метод Фурье в указанном выше смысле неприменим.

Из формул (16), (17) в предельном случае $B \rightarrow 0$ ($\gamma \rightarrow 0$ (15)), когда сила возврата пружинки бесконечно мала, находим $u_1 = 0$, $u_2 = f(x, t) + f(-x, t)$, что соответствует классическому случаю движения полуграниченной струны $0 < x < \infty$ со свободным концом $x = 0$ (без пружинки). При $B \rightarrow \infty$, когда сила возврата пружинки бесконечно большая, из формул (16), (17) с помощью интегрирования по частям получим $u_1 = u_2 = f(x, t)$, что соответствует классическому случаю движения неограниченной непрерывной струны. Сказанное имеет очевидное физическое обоснование.

Рассмотрим задачу (12)–(14) для начальных функций вида

$$\varphi(x) = \begin{cases} 2h(x), & x \in (a, b) \\ 0, & x \notin (a, b) \end{cases}, \quad \psi(x) = 0, \quad (20)$$

где $a > 0$, $h(x) \geq 0$, $h(a) = h(b) = 0$. Отсюда решение задачи (12)–(14) строится по формулам (16), (17), где функция $f(x, t)$ в точках, в которых она отлична от нуля, имеет вид

$$f(x, t) = \begin{cases} h(x+t), & a-t < x < b-t \\ h(x-t), & a+t < x < b+t \end{cases}. \quad (21)$$

Пусть для момента времени $t = a$, когда обратная волна $h(x+t)$ доходит до точки $x = 0$, носители этой волны и прямой волны $h(x-t)$ не пересекаются, т.е. $3a > b$. Выражение для функции u_2 (17), (21) содержит в качестве слагаемого прямую волну $h(x-t)$ при $a+t < x < b+t$, которая движется вправо и не пересекает точку $x = 0$. Далее рассматривается движение струны в окрестности точки $x = 0$, при этом слагаемое $h(x-t)$ в u_2 будем опускать. Отсюда функции $u_i(x, y) \neq 0$ (16), (17) с учетом (21) примут вид

$$u_1(x, t) = \gamma e^{-\gamma(x+t)} \int_a^{x+t} e^{\gamma z} h(z) dz, \quad x < 0, \quad (22)$$

$$u_2(x, t) = h(x+t) + h(t-x) - \gamma e^{-\gamma(t-x)} \int_a^{t-x} e^{\gamma z} h(z) dz, \quad x > 0. \quad (23)$$

При $0 < t < a$, когда обратная волна $h(x+t)$ не доходит до точки $x = 0$, получим $u_1 = 0$, $u_2 = h(x+t)$.

При $a < t < (a+b)/2$, $(a+b)/2 < t < b$, $t > b$ функции u_i (22), (23) в точках, в которых они отличны от нуля, приводятся соответственно к виду

$$u_1 = \Phi(x+t), \quad a-t < x < 0, \quad u_2 = \begin{cases} h(x+t) + Q(x, t), & 0 < x < t-a \\ h(x+t), & t-a < x < b-t \end{cases}; \quad (24)$$

$$u_1 = \Phi(x+t), \quad a-t < x < 0, \quad u_2 = \begin{cases} h(x+t) + Q(x, t), & 0 < x < b-t \\ Q(x, t), & b-t < x < t-a \end{cases}; \quad (25)$$

$$u_1 = \begin{cases} \Phi(x+t), & a-t < x < b-t \\ e^{-\gamma(x+t)}c, & b-t < x < 0 \end{cases}, \quad u_2 = \begin{cases} -e^{\gamma(x-t)}c, & 0 < x < t-b \\ Q(x,t), & t-b < x < t-a \end{cases}, \quad (26)$$

где $h(x)$ – заданная функция, $Q(x,t) = h(t-x) - \Phi(t-x)$,

$$\Phi(x) = \gamma e^{-\gamma x} \int_a^x e^{\gamma z} h(z) dz, \quad c = \gamma \int_a^b e^{\gamma z} h(z) dz. \quad (27)$$

Отсюда законы движения концов струны $x = \pm 0$ имеют вид

$$u_1(0,t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < a \\ \Phi(t), & a < t < b \\ e^{-\gamma t}c, & t > b \end{cases}, \quad u_2(0,t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < a \\ 2h(t) - \Phi(t), & a < t < b \\ -e^{-\gamma t}c, & t > b \end{cases}.$$

Отметим, что функция $u_1(0,t)$ является гладкой.

В качестве примера рассмотрим начальную функцию $h(x) = \sin x$ (20) при $2\pi < x < 3\pi$ ($a = 2\pi, b = 3\pi$), $\gamma = 1$, т. е. на упругий контакт $x = 0$ справа набегают волна в виде синусоиды. Отсюда решение задачи (12)–(14), (20) строится в конечном виде по формулам (24)–(26), где (27)

$$\Phi(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}e^{2\pi-x}, \quad c = \frac{e^{3\pi} + e^{2\pi}}{2}.$$

На рис.1 приведены графики движения концов струны в точке разрыва при $x = \pm 0$ в моменты времени $6\pi < t < 13\pi$ (когда обратная волна подходит к точке $x = 0$ при $t = 2\pi$), где сплошная линия является графиком функции $u_2(+0,t)$, а пунктирная – графиком функции $u_1(-0,t)$.

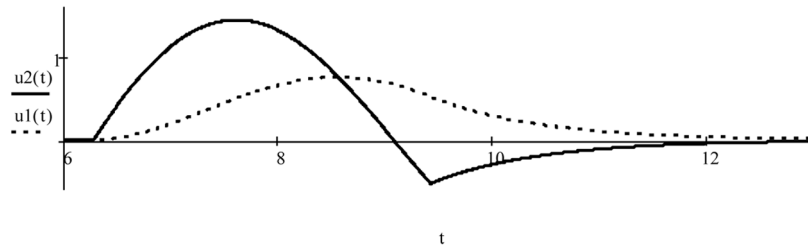
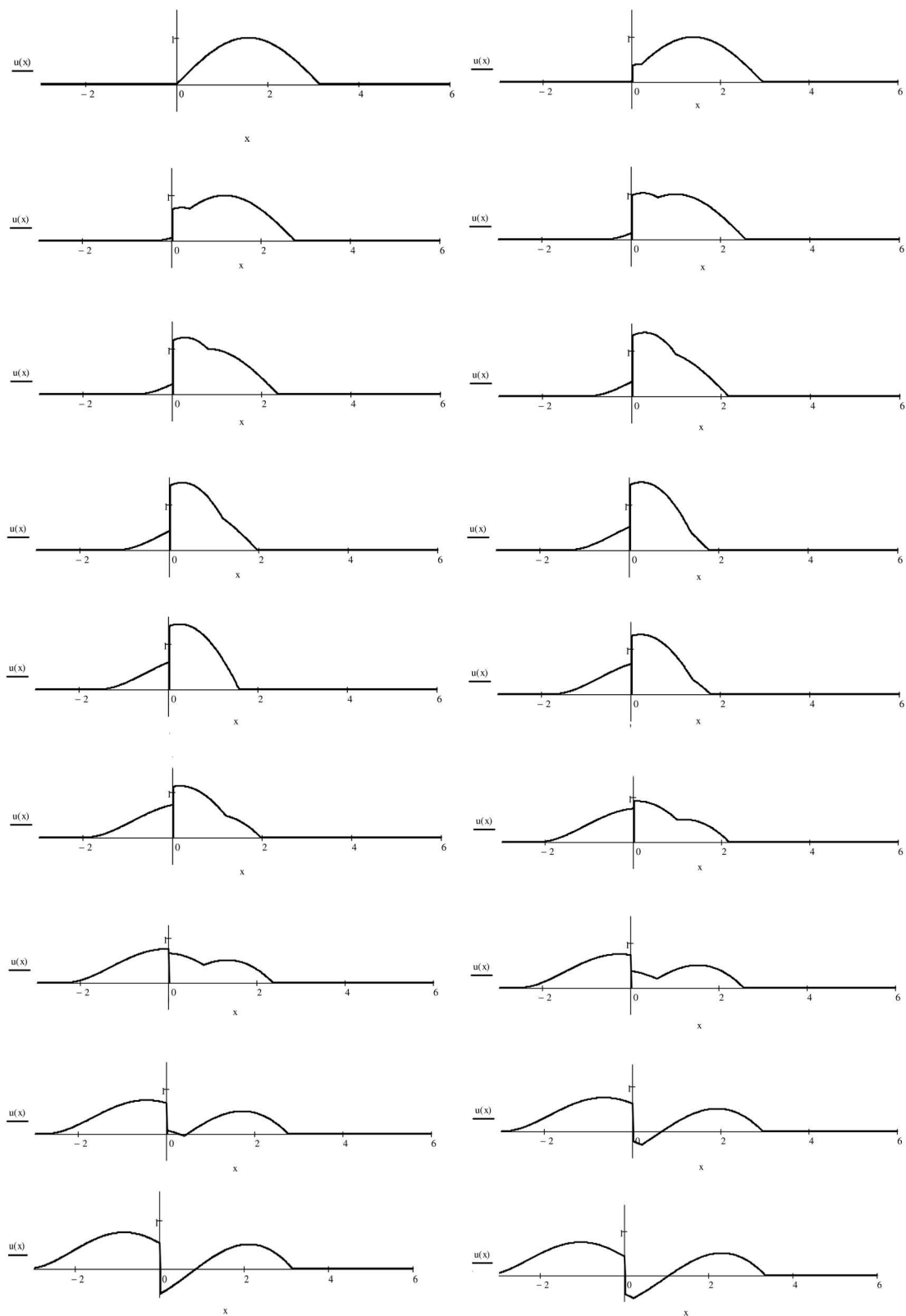
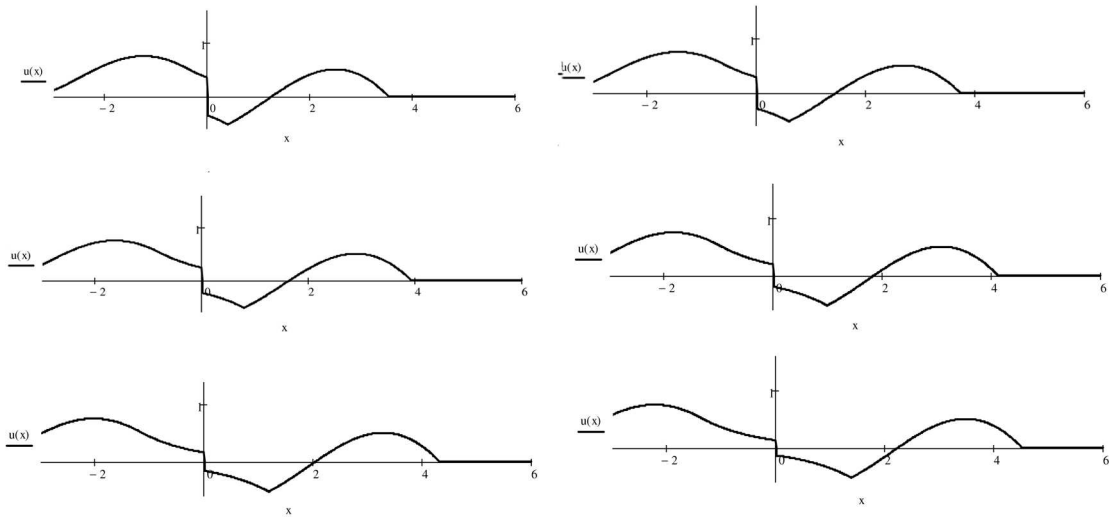


Рис. 1

Ниже приведены графики струны в моменты времени от $t = 2\pi$ до $t = \frac{13}{4}\pi$ с шагом $\Delta t = \frac{1}{16}\pi$.





Список литературы

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.
2. Белоцерковский П. М. Неустановившиеся колебания бесконечной струны, несущей сосредоточенную массу и поддерживаемой упруговязкими подвесками // Прикладная математика и механика. 2011. Т. 75. № 5. С. 791–812.
3. Культербаев Х. П., Исламова О. В. Математическая модель колебаний подвешенной струны с сосредоточенной массой // Изв. высш. учеб. завед. «Северо-Кавказский регион». Технические науки. 2007. № 4. С. 41–46.
4. Миловидов А.-Е., Шаров Г.-С. Проблема устойчивости для замкнутой релятивистской струны с точечной массой // Вестник Тверского ГУ. Серия: Физика. 2005. № 9 (15). Вып. 2. С. 114–123.
5. Кац И. С. Описание множества спектральных функций регулярной струны, несущей сосредоточенную массу на конце, свободном от граничных условий // Известия вузов. Математика. 1974. № 7. С. 27–33.
6. Холодовский С. Е. Метод свертывания разложений Фурье в решении краевых задач с пересекающимися линиями сопряжения // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2007. Т. 47. № 9. С. 1550–1556.
7. Холодовский С. Е. Метод свертывания разложений Фурье. Случай обобщенных условий сопряжения типа трещины (завесы) в кусочно-неоднородных средах // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 6. С. 855–859.
8. Арсенин В. Я. Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1974.

References

1. Tikhonov A. N., Samarsky A. A. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M.: Nauka, 1972.
2. Belotserkovsky P. M. Neustanovivshiyesya kolebaniya beskonechnoy struny, nesushchey sosredotochennuyu massu i podderzhivayemoy uprugovyazkimi podveskami // Prikladnaya matematika i mekhanika. 2011. T. 75. № 5. S. 791–812.
3. Kulterbayev Kh. P., Islamova O. V. Matematicheskaya model kolebaniya podveshennoy struny s sosredotochennoy massoy // Izv. vyssh. ucheb. zaved. «Severokavkazsky region». Tekhnicheskkiye nauki. 2007. № 4. S. 41–46.

4. Milovidov A. Ye., Sharov G. S. Problema ustoychivosti dlya zamknutoy relyativistskoy struny s tochechnoy massoy // Vestnik Tverskogo GU. Seriya. Fizika. 2005. № 9(15). Vyp. 2. S. 114–123.
5. Kats I. S. Opisaniye mnozhestva spektralnykh funktsiy regulyarnoy struny, nesushchey sosredotochennuyu massu na kontse, svobodnom ot granichnykh uslovy // Izvestiya vuzov. Matematika. 1974. № 7. S. 27–33.
6. Kholodovsky S. Ye. Metod svyortyvaniya razlozheny Furiye s resheniyem krayevykh zadach s peresekayushchimisya liniyami. // Zhurnal vychislitelnoy matematiki i matematicheskoy fiziki. 2007. T. 47. № 9. S. 1550–1556.
7. Kholodovsky S. Ye. Metod svyortyvaniya razlozheny Furiye. Sluchay obobshchennykh uslovy sopryazheniya tipa treshchiny (zavesy) v kusochno-neodnorodnykh sredakh // Differentsialnye uravneniya. 2009. T. 45. № 6. S. 855–859.
8. Arsenine V. Ya. Metody matematicheskoy fiziki i spetsialnykh funktsii. M.: Nauka, 1974.

Статья поступила в редакцию 15.03.2013