УДК 517.956
ББК 22.143

Святослав Евгеньевич Холодовский,
доктор физико-математических наук, профессор,
Забайкальский государственный университет
(672039, Россия, г.Чита, ул.Александро-Заводская, 30)
e-mail: hol47@yandex.ru

О решении краевых задач для уравнения Пуассона в плоских областях, ограниченных сильно- и слабопроницаемыми плёнками, соединёнными последовательно [1]

Рассмотрена задача для оператора Лапласа в квадранте, ограниченном сильно- и слабопроницаемыми плёнками. Методом свёртывания разложений Фурье решение задачи выражено через решение смешанной задачи в данном квадранте с классическими граничными условиями первого и второго рода. Показано, что методом конформных отображений можно расширить класс областей, ограниченных системой сильно- и слабопроницаемых плёнок.

Ключевые слова: краевые задачи, плёночные границы областей, сильно проницаемая плёнка, слабопроницаемая пленка, метод свёртывания разложений Фурье.

Svyatoslav Yevgenyevich Kholodovskii,
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
Transbaikal State University
(30 Aleksandro-Zavodskaya St., Chita, Russia, 672039)
e-mail: hol47@yandex.ru

On the Solution of Regional Value Problems for the Poisson Equation in Flat Areas Bounded with Strongly and Weakly Permeable Films Connected in Series[2]

The problem for the Laplace operator in the quadrant with bounded strongly and weakly permeable films. Using the method of convolution of Fourier expansions the solution of the problem expressed in terms of the mixed problem in this quadrant of the classical boundary conditions of the first and second kind. It is shown that the method of conformal mappings can extend the class of domains bounded system strongly and weakly permeable films.

Keywords: boundary value problems, the boundaries of the film, strongly permeable film, weakly permeable film, the method of convolution of Fourier expansions.

В связи с широким применением композитных материалов с нанопокрытиями большой интерес имеют аналитические методы решения краевых задач в областях, ограниченных сильно- и слабопроницаемыми плёнками и их комбинациями.

Рассмотрим для функции $u(x, y)$ в квадранте $D(x > 0, y > 0)$ задачу со смешанными граничными условиями вида

$$\Delta u = 0, \qquad (x, y) \in D, \tag{1}$$

$$B\partial_x u - u_{|x=0} = \varphi(y), \qquad A\partial_y^2 u - \partial_y u_{|y=0} = \psi(x), \tag{2}$$

$$u(x, y) = O(1), \qquad x^2 + y^2 \to \infty, \tag{3}$$

[1]Работа выполнена в рамках Государственного задания вузу Министерства образования и науки Российской Федерации (проект 2014/255 НИР 2603.14).
[2]The work is performed within the State Task for the Higher Institution of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (project 2014/255 NIR 2603.14).

где x, y – декартовы координаты, $\partial_x^n = \partial^n/\partial x^n$, $\varphi(y) \in C^1(R^+)$, $\psi(x) \in C^1(R^+)$. Граничные условия (2) соответствуют условиям на слабопроницаемой плёнке $x = 0$ с параметром $B > 0$ и на сильно проницаемой плёнке $y = 0$ с параметром $A > 0$ [1; 2]. Здесь сначала рассматривается уравнение Лапласа (1).

Методом свёртывания разложений Фурье [3; 4] выразим решение задачи (1)–(3) через решение смешанной задачи в квадранте D с классическими граничными условиями первого и второго рода:

$$\Delta f = 0, \qquad f_{|x=0} = \varphi_0(y), \qquad \partial_y f_{|y=0} = \psi_0(x), \tag{4}$$

где $f(x, y) = O(1)$ при $x^2 + y^2 \to \infty$, граничные функции $\varphi_0(y)$, $\psi_0(x)$ определены ниже (см. (22)).

Для вывода общих формул рассмотрим две вспомогательные задачи в полуплоскости $D_1(x > 0, y \in R)$ с граничным условием на слабопроницаемой плёнке и с условием Дирихле соответственно вида

$$\Delta u_1 = 0, \qquad B\partial_x u_1 - u_{1|x=0} = \varphi_1(y), \tag{5}$$

и

$$\Delta f_1 = 0, \qquad f_{1|x=0} = \varphi_1(y), \tag{6}$$

где $\varphi_1(y) \in C(R)$. Выразим решение задачи (5) через решение задачи Дирихле (6).

Предположим сначала, что граничная функция $\varphi_1(y)$ (5), (6) разлагается в интеграл Фурье:

$$\varphi_1(y) = \int\limits_0^\infty g\, d\lambda, \qquad g(y, \lambda) = g_1 \sin \lambda y + g_2 \cos \lambda y, \tag{7}$$

где $g_i(\lambda)$ – коэффициенты Фурье функции $\varphi_1(y)$. Отсюда, решая задачу Дирихле (6) методом Фурье, получим

$$f_1(x, y) = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda x} g\, d\lambda, \qquad x \geq 0. \tag{8}$$

Представляя решение уравнения (5) в виде

$$u_1(x, y) = \int\limits_0^\infty a\, e^{-\lambda x} g\, d\lambda, \qquad x \geq 0, \tag{9}$$

из граничного условия (5) с учётом разложения (7) найдём

$$a = -\frac{\gamma_1}{\lambda + \gamma_1}, \qquad \gamma_1 = \frac{1}{B} > 0, \tag{10}$$

при этом функция (9) примет вид

$$u_1(x, y) = -\frac{1}{B} \int\limits_0^\infty \frac{e^{-\lambda x} g}{\lambda + \gamma_1}\, d\lambda, \qquad x \geq 0. \tag{11}$$

Из разложения функции $f_1(x, y)$ (8) следует формула

$$\int\limits_0^\infty e^{-\gamma_1 t} f_1(x + t, y)\, dt = \int\limits_0^\infty \frac{e^{-\lambda x} g}{\lambda + \gamma_1}\, d\lambda, \qquad x \geq 0.$$

Отсюда функция $u_1(x,y)$ (11) выражается через решение задачи Дирихле (6) без разложений Фурье:

$$u_1(x,y) = -\frac{1}{B}\int_0^\infty e^{-\gamma_1 t} f_1(x+t,y)\,dt. \tag{12}$$

Непосредственно проверяется, что функция (12) является решением задачи (5) при достаточно слабом условии на бесконечности вида

$$|f_1(x,y)| = O(e^{\alpha x}), \qquad x \to +\infty, \qquad 0 < \alpha < \gamma_1.$$

Аналогично рассмотрим две задачи в верхней полуплоскости $D_2(x \in R, y > 0)$ с граничным условием на сильно проницаемой плёнке и условием Неймана соответственно вида

$$\Delta u_2 = 0, \qquad A\partial_y^2 u_2 - \partial_y u_{2|y=0} = \psi_2(x) \tag{13}$$

и

$$\Delta f_2 = 0, \qquad \partial_y f_{2|y=0} = \psi_2(x), \tag{14}$$

где $\psi_2(x) \in C(R)$. Выразим решение задачи (13) через решение задачи Неймана (14). Пусть решение задачи Неймана (14) является известной функцией $f_2(x,y)$. Предположим сначала, что функция $f_2(x,0)$ разлагается в интеграл Фурье:

$$f_2(x,0) = \int_0^\infty h\,d\lambda, \qquad h(x,\lambda) = h_1 \sin\lambda x + h_2\cos\lambda x, \tag{15}$$

где $h_i(\lambda)$ – коэффициенты Фурье функции $f_2(x,0)$. Отсюда функция $f_2(x,y)$ при $y \geq 0$ представима в виде

$$f_2(x,y) = \int_0^\infty e^{-\lambda y} h\,d\lambda, \qquad y \geq 0 \tag{16}$$

(здесь левая и правая части являются решением задачи Дирихле в полуплоскости $y > 0$ с граничной функцией $f_2(x,0)$).

Представим решение задачи (13) в виде

$$u_2(x,y) = -f_2(x,y) + \int_0^\infty b\,e^{-\lambda y} h\,d\lambda, \qquad y \geq 0, \tag{17}$$

где $h(x,\lambda)$ имеет вид (15), при этом функция $u(x,y)$ удовлетворяет уравнению (13). Из граничного условия (13) с учётом разложения (16) и граничного условия для функции $f_2(x,y)$ (14) (после сокращения $\psi_2(x)$)найдём:

$$b = 1 - \frac{\gamma_2}{\lambda+\gamma_2}, \qquad \gamma_2 = \frac{1}{A} > 0. \tag{18}$$

Отсюда, сокращая в формуле (17) функцию $f_2(x,y)$ (16), решение (17) задачи (13) приведём к виду

$$u_2(x,y) = -\frac{1}{A}\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda y} h}{\lambda+\gamma_2}\,d\lambda, \qquad y \geq 0. \tag{19}$$

Из разложения функции $f_2(x,y)$ (16) следует формула

$$\int\limits_0^\infty e^{-\gamma_2\tau} f_2(x,y+\tau)\,d\tau = \int\limits_0^\infty \frac{e^{-\lambda y}h}{\lambda+\gamma_2}\,d\lambda, \qquad y \geq 0.$$

Отсюда функция $u_2(x,y)$ (19) непосредственно выражается через решение $f_2(x,y)$ задачи Неймана (14) в виде

$$u_2(x,y) = -\frac{1}{A}\int\limits_0^\infty e^{-\gamma_2\tau} f_2(x,y+\tau)\,d\tau, \tag{20}$$

при этом функция $f_2(x,y)$ должна удовлетворять условию

$$|f_2(x,y)| = O(e^{\beta y}), \qquad y \to +\infty, \qquad 0 < \beta < \gamma_2.$$

Отметим, что полученные формулы (12), (20) имеют самостоятельный интерес и выражают решения задач (5), (13) в полуплоскости с плёнками через решения аналогичных классических задач без плёнок (6), (14) с сохранением граничных функций. При этом правые части формул (12), (20) представляют собой операторы, действующие на соответствующую функцию $f_i(x,y)$ по одной переменной (другая переменная остаётся свободной).

Представим решение исходной задачи (1)-(3) в виде композиции операторов (12) и (20):

$$u(x,y) = \frac{1}{AB}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty e^{-\gamma_1 t-\gamma_2\tau} f(x+t,y+\tau)\,dt\,d\tau, \tag{21}$$

где $f(x,y)$ – решение классической задачи (4) с некоторыми граничными функциями $\varphi_0(y)$, $\psi_0(x)$, подлежащими определению. Из граничного условия (2) при $x=0$ с помощью интегрирования по частям первого интеграла по t для функции $\varphi_0(y)$ получим интегральное уравнение

$$-\int\limits_0^\infty e^{-\gamma_2\tau}\varphi_0(y+\tau)\,d\tau = A\varphi(y),$$

решение которого находим посредством замены переменной $\xi = y+\tau$ и дифференцирования по y в виде $\varphi_0(y) = A\varphi'(y) - \varphi(y)$. Аналогично из граничного условия (2) при $y=0$ получаем $\psi_0(x) = B\psi'(x) - \psi(x)$.

Теорема. *Если функция $f(x,y)$ является решением задачи (4), где*

$$\varphi_0(y) = A\varphi'(y) - \varphi(y), \qquad \psi_0(x) = B\psi'(x) - \psi(x), \tag{22}$$

и $f(x,y)$ удовлетворяет вместе с производными до второго порядка условию

$$|f(x,y)| = O(e^{\delta_1 x+\delta_2 y}), \qquad x^2+y^2 \to \infty,$$

то функция $u(x,y)$ (21) является решением задачи (1)–(3), где $0<\delta_i<\gamma_i$, $\gamma_i>0$ имеют вид (10), (18).

Утверждение теоремы проверяется непосредственно.

Отметим, что решение $f(x,y)$ классической задачи (4) строится по формуле Грина (функция Грина находится методом отражения [5]):

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty \psi_0(\xi)\ln\frac{(\xi-x)^2+y^2}{(\xi+x)^2+y^2}\,d\xi+\frac{x}{\pi}\int\limits_0^\infty \varphi_0(\eta)\left[\frac{1}{x^2+(\eta-y)^2}+\frac{1}{x^2+(\eta+y)^2}\right]d\eta.$$

Решение задачи в квадранте $D(x>0,y>0)$, ограниченном плёнками, для уравнения Пуассона:

$$\Delta w=H(x,y),$$

$$B\partial_x w-w_{|x=0}=\Phi(y),\qquad A\partial_y^2 w-\partial_y w_{|y=0}=\Psi(x)$$

имеет вид $w=u+v$, где $v(x,y)$ – решение классической задачи в квадранте D без пленок вида

$$\Delta v=H(x,y),\qquad v_{|x=0}=0,\qquad \partial_y v_{|y=0}=0, \tag{23}$$

а $u(x,y)$ – решение рассмотренной задачи (1)–(3) с граничными функциями $\varphi(y)=\Phi(y)-B\partial_x v(0,y)$, $\psi(x)=\Psi(x)-A\partial_y^2 v(x,0)$, при этом решение задачи (23) имеет вид:

$$v(x,y)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty H(\xi,\eta)\ln\frac{[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2][(\xi-x)^2+(\eta+y)^2]}{[(\xi+x)^2+(\eta-y)^2][(\xi+x)^2+(\eta+y)^2]}\,d\xi d\eta.$$

Посредством аналитической функции $\zeta=z^2$ ($\zeta=\xi+i\eta$, $z=x+iy$), конформно отображающей квадрант $D(x>0,y>0)$ на полуплоскость $G(\xi\in R,\eta>0)$, по формуле (21) строится решение задачи (1)–(3) в полуплоскости G, ограниченной последовательно соединенными сильно- и слабопроницаемыми плёнками $\eta=0$ соответственно при $\xi>0$ и $\xi<0$, где переменные x,y являются параболическими координатами плоскости ζ. На основании решения последней задачи с помощью дробно-линейных конформных отображений можно строить решения краевых задач в областях, ограниченных прямыми и окружностями, состоящими из последовательно соединённых сильно- и слабопроницаемых плёнок в виде отрезков, лучей и дуг окружностей.

Список литературы

1. Холодовский С. Е. О решении краевых задач в полупространстве, ограниченном многослойной плёнкой // Учёные записки ЗабГГПУ. Сер. «Физика, математика, техника, технология». 2011. № 3(38). С. 160–164.

2. Холодовский С. Е. Решение краевых задач в полуцилиндрах с основанием в виде двухслойной плёнки // Тезисы докладов Междунар. конф., посвящ. 105-летию со дня рождения С. Л. Соболева. Дифференциальные уравнения, функциональные пространства, теория приближений. Ин-т математики им. С. Л. Соболева СО РАН. Новосибирск, 2013. С. 283.

3. Холодовский С. Е. Метод свёртывания разложений Фурье. Случай обобщённых условий сопряжения типа трещины (завесы) в кусочно-неоднородных средах // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 6. С. 855-859.

4. Холодовский С. Е. Метод свёртывания разложений Фурье. Случай трещины (завесы) в неоднородном пространстве // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 8. С. 1204–1208.

5. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.

References

1. Kholodovskii S. E. O reshenii kraevykh zadach v poluprostranstve, ogranichennom mnogosloinoi plenkoi // Uchenye zapiski ZabGGPU. Ser. «Fizika, matematika, tekhnika, tekhnologiya». 2011. № 3(38). S. 160–164.

2. Kholodovskii S. E. Reshenie kraevykh zadach v polutsilindrakh s osnovaniem v vide dvukhsloinoi plenki // Tezisy dokladov Mezhdunar. konf., posvyash. 105-letiyu so dnya rozhdeniya S. L. Soboleva. Differentsial'nye uravneniya, funktsional'nye prostranstva, teoriya priblizhenii. Institut matematiki im. S. L. Soboleva SO RAN. Novosibirsk, 2013. S. 283.

3. Kholodovskii S. E. Metod svertyvaniya razlozhenii Fur'e. Sluchai obobshchyonnykh uslovii sopryazheniya tipa treshchiny (zavesy) v kusochno-neodnorodnykh sredakh // Differentsial'nye uravneniya. 2009. T. 45. № 6. S. 855–859.

4. Kholodovskii S. E. Metod svertyvaniya razlozhenii Fur'e. Sluchai treshchiny (zavesy) v neodnorodnom prostranstve // Differentsial'nye uravneniya. 2009. T. 45. № 8. S. 1204–1208.

5. Tikhonov A. N., Samarskii A. A. Uravneniya matematicheskoi fiziki. M.: Nauka, 1972.

Статья поступила в редакцию 03.05.2014