УДК 517.956
ББК 22:23

Наталья Валерьевна Кузнецова,
старший преподаватель,
Южно-Якутский институт железнодорожного транспорта
(678965, Россия, г. Нерюнгри, ул.Карла Маркса, д. 7/1)
e-mail: pestryakovi@mail.ru

О решении задачи Дирихле в кусочно-однородной полосе с двухслойным плёночным включением

Рассмотрена задача Дирихле для уравнения Лапласа в кусочно-однородной полосе $D(x \in R) = D_1(x < 0) \cup D_2(x > 0)$, $0 < y < \pi$ проницаемости k_i в D_i. Области D_i разделены бесконечно тонкой двухслойной плёнкой, состоящей из сильно и слабопроницаемых прослоек. Решение задачи выражено через решение классической задачи Дирихле в однородной полосе без плёнки.

Ключевые слова: краевые задачи в полосе, двухслойное плёночное включение, сильно проницаемая плёнка, слабопроницаемая плёнка, метод свёртывания разложений Фурье.

Natalia Valerievna Kuznetsova,
Senior Teacher,
South-Yakutiya Institute of Railway Transport
(7/1 Karl Marx St., Neryungri, Russia, 678965)
e-mail: pestryakovi@mail.ru

On the Solution of the Dirichlet Problem in a Piecewise Homogeneous Band with the Two-layer Film Inclusion

Consider the Dirichlet problem for the Laplace equation in a piecewise homogeneous band $D(x \in R) = D_1(x < 0) \cup D_2(x > 0)$, $0 < y < \pi$ of permeability k_i in the D_i. Regions D_i are separated by an infinitely thin two-layer film $x = 0$consisting of a hard and low permeability layers. Solution of the problem is expressed in terms of the classical solution of the Dirichlet problem in a homogeneous band without film.

Keywords: boundary value problems in the band, two-layer film inclusion, strongly permeable film, weakly permeable film, method of convolution of Fourier expansions.

В современных условиях широкое применение находят композитные материалы, содержащие плёночные включения. Поэтому большой интерес имеет исследование процессов тепломассопереноса в средах с многослойными плёнками. При решении задач с пленочными включениями, как правило, рассматриваются однослойные плёнки [1–3].

Рассмотрим в кусочно-однородной полосе $D(x \in R, 0 < y < \pi)$, состоящей из двух полуполос $D_1(x < 0, 0 < y < \pi)$ и $D_2(x > 0, 0 < y < \pi)$ для функций $u_i(x, y)$ в D_i задачу:

$$\Delta u_i = 0, \qquad u_{1|y=\pi} = 0, \qquad u_{2|y=\pi} = f(x), \qquad u_{1,2|y=0} = 0, \tag{1}$$

$$x = 0: \qquad u_2 - u_1 = Bk_2\partial_x u_2, \qquad k_2\partial_x u_2 - k_1\partial_x u_1 = A\partial_x^2 u_1, \tag{2}$$

где B, A – положительные постоянные, $f(x)$ – заданная функция, Δu – оператор Лапласа, постоянные $k_i > 0$ характеризуют проницаемость соответствующей зоны D_i, $\partial_y = \partial/\partial y$, граничная функция $f(x)$ удовлетворяет условиям:

$$f(x) \in C(x \geq 0), \qquad |f(x, y)| = O(1), \qquad x \to \infty.$$

Обобщённые условия сопряжения (2) соответствуют условиям на двухслойной плёнке $x = 0$, состоящей из сильно проницаемой прослойки $x = -0$ и слабопроницаемой прослойки $x = +0$ с параметрами соответственно A и B [4]. В данном случае граничное условие неоднородно только на луче $y = \pi$, $x > 0$, что не умаляет общности, т.к. в случаях неоднородных условий на других лучах, составляющих границу D, задача решается аналогично, а в общем случае – как сумма решений указанных задач.

Выразим решение задачи (1), (2) через решение аналогичной классической задачи Дирихле в однородной полосе D без плёнки. Представим решение задачи (1), (2) при $(A - Bk_1k_2)^2 > 4ABk_2^2$, $(A - Bk_1k_2)^2 < 4ABk_2^2$ и $(A - Bk_1k_2)^2 = 4ABk_2^2$ соответственно в виде (см. формулы (12)–(18) в работе автора [4]):

$$u_1 = \frac{2k_2}{\sqrt{T}} \int\limits_0^\infty v(x-t, y) \left(e^{-\gamma_1 t} - e^{-\gamma_2 t}\right) dt, \tag{3}$$

$$u_2 = v(x, y) + v(-x, y) -$$

$$-\frac{2}{\sqrt{T}} \int\limits_0^\infty v(-x-t, y) \left[(k_1 - A\gamma_1)e^{-\gamma_1 t} - (k_1 - A\gamma_2)e^{-\gamma_2 t}\right] dt; \tag{4}$$

$$u_1 = \frac{4k_2}{\sqrt{-T}} \int\limits_0^\infty v(x-t, y) e^{-\alpha t} \sin\beta t \, dt, \tag{5}$$

$$u_2 = v(x, y) + v(-x, y) -$$

$$-\frac{4}{\sqrt{-T}} \int\limits_0^\infty v(-x-t, y) e^{-\alpha t} [(k_1 - A\alpha)\sin\beta t + A\beta\cos\beta t] \, dt \tag{6}$$

и

$$u_1 = \frac{2}{AB} \int\limits_0^\infty v(x-t, y) e^{-\alpha t} t \, dt, \tag{7}$$

$$u_2 = v(x, y) + v(-x, y) - \frac{2}{ABk_2} \int\limits_0^\infty v(-x-t, y) e^{-\alpha t} [(k_1 - A\alpha)t + A] \, dt, \tag{8}$$

где

$$\gamma_i = \frac{A + Bk_1k_2 + (-1)^i\sqrt{T}}{2ABk_2}, \qquad T = (A - Bk_1k_2)^2 - 4ABk_2^2,$$

$$\alpha = \frac{A + Bk_1k_2}{2ABk_2}, \qquad \beta = \frac{\sqrt{-T}}{2ABk_2}.$$

Решения (3)–(8) получены с помощью метода свёртывания разложений Фурье [5; 6]. Функции (3)–(8) представляют собой операторы, действующие на функцию $v(x, y)$ по одной переменной x, при этом переменная y является свободной (параметром). Аргументы слагаемых в формулах (3)–(8), кроме первого слагаемого вида $v(x, y)$ у функции $u_2(x, y)$, принадлежат области, где условия задачи однородны, что проверяется непосредственно. Отсюда для функции $v(x, y)$ получим аналогичную задачу Дирихле в однородной полосе D с сохранением граничной функции:

$$\Delta v = 0, \qquad 0 < y < \pi, \tag{9}$$

$$v_{|y=0} = 0, \qquad v_{|y=\pi} = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ f(x), & x > 0 \end{cases}. \tag{10}$$

Решение последней задачи построим методом функции Грина. Для нахождения функции Грина с помощью аналитической функции $\zeta = e^z$ $(\zeta = \xi + i\eta,\ z = x + iy)$ конформно отобразим полосу D в полуплоскость $D_0(\xi \in R, \eta > 0)$. При этом

$$\xi = \rho\cos\varphi = e^x\cos y, \qquad \eta = \rho\sin\varphi = e^x\sin y, \tag{11}$$

где ρ, φ – полярные координаты плоскости ζ. Отсюда в переменных ξ, η функция Грина в полуплоскости D_0 строится методом отражения особой точки и имеет вид:

$$G = \frac{1}{4\pi}\ln\frac{(\xi-\xi_0)^2 + (\eta-\eta_0)^2}{(\xi-\xi_0)^2 + (\eta+\eta_0)^2}$$

или в переменных x, y (11)

$$G = \frac{1}{4\pi}\ln\frac{\mathrm{ch}(x-x_0) - \cos(y-y_0)}{\mathrm{ch}(x-x_0) - \cos(y+y_0)}.$$

Тогда решение задачи (9), (10) строится по формуле Грина:

$$v(x,y) = \frac{\sin y}{2\pi}\int\limits_0^\infty \frac{f(t)\,dt}{\mathrm{ch}(t-x) + \cos y}. \tag{12}$$

Таким образом, решение исходной задачи (1), (2) строится по формулам (3)-(8), (12).

Пусть граничная функция имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} c_i, & x \in (x_i, x_{i+1}) \\ 0, & x \notin (x_i, x_{i+1}) \end{cases} \tag{13}$$

при фиксированном i, где $x_i > 0$. Тогда решение (12) задачи (9), (10) для граничной функции (13) строится в конечном виде:

$$v(x,y) = \frac{c_i}{\pi}\left(\mathrm{arctg}\,\frac{e^{x_{i+1}-x} + \cos y}{\sin y} - \mathrm{arctg}\,\frac{e^{x_i - x} + \cos y}{\sin y}\right). \tag{14}$$

Функциями (13) можно аппроксимировать произвольную непрерывную граничную функцию $f(x)$ с заданной точностью. При этом решение задачи (9), (10) имеет вид суммы функций (14):

$$v(x,y) = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{\pi}\left(\mathrm{arctg}\,\frac{e^{x_{i+1}-x} + \cos y}{\sin y} - \mathrm{arctg}\,\frac{e^{x_i - x} + \cos y}{\sin y}\right). \tag{15}$$

Отметим, что для функции $v(x,y)$ (15) решение (3)–(8) исходной задачи (1), (2) сводится к вычислению интегралов вида:

$$\int \frac{dr}{(r-c)^{\gamma_i}(r^2+s^2)},$$

где $c = \cos y$, $s = \sin y$. При этом указанные интегралы для целых γ_i вычисляются в элементарных функциях.

Список литературы

1. Васильев Б. А. Плоская стационарная задача теории теплопроводности для составной клиновидной области // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20. № 3. С. 530–533.

2. Гуревич А. В., Крылов А. Л., Топор Д. Н. Решение плоских задач гидродинамики пористых сред вблизи разрывных нарушений методом комплексного потенциала // ДАН СССР. 1988. Т. 298. № 4. С. 846–850.

3. Крутицкий П. А., Прозоров К. В. К задаче для уравнения Гельмгольца вне разрезов на плоскости с заданием условия Дирихле и условия с косой производной на разных сторонах разрезов // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 9. С. 1268–1283.

4. Нутчина-Пестрякова Н. В. О решении задачи Дирихле в кусочно-однородной полуплоскости с двухслойным плёночным включением // Математический анализ и его приложения. 2011. Вып. 10. Чита. ЗабГГПУ. С. 41–49.

5. Холодовский С. Е. Метод свёртывания разложений Фурье в решении краевых задач с пересекающимися линиями сопряжения // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2007. Т. 47. № 9. С. 1550–1556.

6. Холодовский С. Е. Метод свёртывания разложений Фурье. Случай трещины (завесы) в неоднородном пространстве // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 8. С. 1204–1208.

References

1. Vasil'ev B. A. Ploskaya statsionarnaya zadacha teorii teploprovodnosti dlya sostavnoi klinovidnoi oblasti // Differents. uravneniya. 1984. T. 20. № 3. S. 530–533.

2. Gurevich A. V., Krylov A. L., Topor D. N. reshenie ploskikh zadach gidrodinamiki poristykh sred vblizi razryvnykh narushenii metodom kompleksnogo potentsiala // Dan SSSR. 1988. T. 298. № 4. S. 846–850.

3. Krutitskii P. A., Prozorov K. V. K zadache dlya uravneniya Gel'mgol'tsa vne razrezov na ploskosti s zadaniem usloviya Dirikhle i usloviya s kosoi proizvodnoi na raznykh storonakh razrezov // Differents uravneniya. 2011. T. 47. № 9. S. 1269–1283.

4. Nutchina-Pestryakova N. V. O reshenii zadach Dirikhle v kusochno-odnorodnoi poluploskosti s dvukhsloinym plenochnym vklyucheniem // Matematicheskii analiz i ego prilozheniya. 2011. Vyp. 10. Chita: ZabGGPU. S. 41?49.

5. Kholodochskii S. E. Metod svertyvniya razlozhenii Fur'e v reshenii kraevykh zadach s peresekayushchimisya liniyami sopryazheniya // Zhurnal vychislitel'nyi matematiki i matematicheskoi fiziki. 2007. T. 47. № 9. S. 1550–1556.

6. Kholodovskii S. E. Metod svertyvaniya razlozhenii Fur'e. Sluchai treshchiny (zavesy) v neodnorodnom prostranstve // Differents. uraneniya. 2009. T. 45. № 8. S. 1204–1208.

Статья поступила в редакцию 03.05.2014