http://www.uchzap.com ISSN 2658-7114 (Print) ISSN 2542-0070 (Online)

УДК 517.956
DOI: 10.21209/2658-7114-2021-16-3-109-114

Святослав Евгеньевич Холодовский,
доктор физико-математических наук, профессор,
Забайкальский государственный университет
(672039, Россия, г. Чита, ул. Александро-Заводская, 30),
e-mail: hol47@yandex.ru,
https://orcid.org/0000-0002-3983-1384

О законе движения конца полуограниченной струны, гасящем отражённые волны

Рассмотрена задача о колебании полуограниченной струны $0 < x < \infty$ при заданном начальном возмущении $\varphi(x)$, когда левый конец струны $x = 0$ двигается по заданному закону $f(t)$ (t – время). Решение задачи получено в конечном виде для произвольных функций $\varphi(x)$ и $f(t)$. Построены прямые, обратные и отражённые от конца струны компоненты волн, составляющие результирующие волны. Исследуется влияние функции $f(t)$ на величину отражённых волн. Для произвольного начального возмущения струны найден закон движения её конца, при котором отражённые волны исчезают. Актуальность статьи определяется широким кругом практических задач, связанных с колебаниями протяжённых объектов (мостов, балок, антенн), когда источником движения является начальное возмущение и заданная внешняя сила, приложенная к концу объекта.

Ключевые слова: краевые задачи для волновых уравнений, движение полуограниченной струны, краевой режим на конце струны

В реальных условиях во всех объектах под воздействием множества факторов происходят колебательные или волновые процессы с той или иной интенсивностью. Волны в телах при прохождении границ тела частично распространяются за пределы тела и частично отражаются от границ. В случае непроницаемой для волн границы волны в большей степени отражаются от границы (эффект эха). В случае «свободной» (проницаемой) границы также имеют место отражённые волны [1, с. 64; 2, с. 61]. Исследование колебаний протяжённых объектов имеет интерес при проектировании мостов, балок, опор и т. д. [3–10].

Рассмотрим краевую задачу для одномерного волнового уравнения, описывающего поперечные колебания полуограниченной струны (а также продольные колебания стержня и плоские пространственные волны):

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \qquad 0 < x < \infty, \tag{1}$$

$$u_{|t=0} = \varphi(x), \qquad u_{t|t=0} = 0, \qquad x \geq 0, \tag{2}$$

$$u_{|x=0} = f(t), \tag{3}$$

где t – время ($0 \leq t < \infty$), буквенные индексы означают частные производные по соответствующим аргументам, $\varphi(x)$ и $f(t)$ – заданные функции, $\varphi(0) = f(0) = 0$. Пусть носителем функции $\varphi(x)$ является отрезок (b, c), где $b > 0$, т.е. функция $\varphi(x)$ отлична от нуля только на отрезке (b, c). В данном случае на левый конец полуограниченной струны $x = 0$ набегают волны, индуцированные начальным возмущением струны $\varphi(x)$, и этот конец двигается по заданному закону $f(t)$.

Поставим задачу: определить закон $f(t)$ движения конца струны так, чтобы отраженные от него волны, индуцированные начальным возмущением струны, исчезли.

Сначала решим задачу (1)–(3) для общего случая. Функцию $u(x, t)$ будем искать в виде суммы

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t), \tag{4}$$

где функции $v(x, t)$ и $w(x, t)$ являются решениями аналогичных задач с неоднордностями только в одном из условии соответственно вида

$$v_{tt} - a^2 v_{xx} = 0, \qquad 0 < x < \infty, \tag{5}$$

$$v_{|t=0} = \varphi(x), \qquad v_{t|t=0} = 0, \qquad x \geq 0, \tag{6}$$

$$v_{|x=0} = 0 \tag{7}$$

и

$$w_{tt} - a^2 w_{xx} = 0, \qquad 0 < x < \infty, \tag{8}$$

$$w_{|t=0} = 0, \qquad w_{t|t=0} = 0, \qquad x \geq 0, \tag{9}$$

$$w_{|x=0} = f(t). \tag{10}$$

Рассмотрим задачу (5)–(7), которая описывает движение полуограниченной струны $0 < t < \infty$ с неподвижным концом $x = 0$ при заданном начальном возмущении струны $\varphi(x)$.

Для решения задачи (5)–(7) продолжим начальную функцию $\varphi(x)$ на всю ось x по нечётному закону. В результате получим нечётную функцию

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0, \\ -\varphi(-x), & x < 0. \end{cases} \tag{11}$$

Отсюда, рассматривая задачу Коши на всей прямой $-\infty < x < \infty$ с начальной функцией $\varphi_1(x)$ (11):

$$v_{tt} - a^2 v_{xx} = 0, \qquad -\infty < x < \infty,$$

$$v_{|t=0} = \varphi_1(x), \qquad v_{t|t=0} = 0,$$

её решение найдём по формуле Даламбера [1, с. 50]

$$v(x,t) = \frac{\varphi_1(x+at) + \varphi_1(x-at)}{2}, \tag{12}$$

где $a > 0$. Функция $v(x,t)$ (12) при $0 < x < \infty$ является решением задачи (5)–(7), что проверяется непосредственно (граничное условие (7) для функции (12) выполняется в силу нечётности функции $\varphi_1(x)$ (11)). С учетом (11) функция (12) при $-\infty < x < \infty$ примет вид

$$v(x,t) = \begin{cases} \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}, & x > at, \\ \frac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2}, & -at < x < at, \\ -\frac{\varphi(at-x)+\varphi(-x-at)}{2}, & x < -at. \end{cases} \tag{13}$$

В полученном решении (13) прямая волна $\varphi(x-at)/2$ при $t \to \infty$ двигается в положительной части оси x вправо и не пересекает конец исходной струны $x = 0$. Обратная волна $-\varphi(-x-at)/2$ при $t \to \infty$ двигается в отрицательной части оси x влево и также не пересекает конец струны $x = 0$.

Прямая волна $-\varphi(at-x)/2$ двигается вправо в отрицательной части оси x. Обратная волна $\varphi(x+at)/2$ двигается влево в положительной части оси x. Эти волны двигаются навстречу друг другу и в момент времени $t = b/a$ они встретятся в точке $x = 0$. При $t > c/a$ обратная волна $\varphi(x+at)/2$ перейдёт на отрицательную часть оси x, т. е. за пределы исходной струны. Прямая же волна $-\varphi(at-x)/2$ при $t > c/a$ зайдет на положительную часть оси x и будет являться волной, отражённой от неподвижного конца струны $x = 0$. То есть обратная волна $\varphi(x+at)/2$, двигаясь влево, доходит до закреплённого конца струны $x = 0$, отражается от него, меняет знак и двигается вправо с сохранением амплитуды.

Из выражения (13) следует, что на положительной части оси x $(0 < x < \infty)$, где расположена исходная струна, решение задачи (5)-(7) для моментов времени $0 < t < b/a,\ b/a < t < c/a,\ t > c/a$ имеет соответственно вид

$$v(x,t) = \frac{\varphi(x+at)}{2}, \qquad b - at < x < c - at, \tag{14}$$

$$v(x,t) = \begin{cases} \frac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2}, & 0 < x < at - b, \\ \frac{\varphi(x+at)}{2}, & at - b < x < c - at, \end{cases} \tag{15}$$

$$v(x,t) = -\frac{\varphi(at-x)}{2}, \qquad at - c < x < at - b, \tag{16}$$

где для переменной x указаны промежутки, на которых соответствующие функции $v(x,t)$ отличны от нуля, т. е. указаны носители этих функций, и прямая волна $\varphi(x-at)/2$, удаляющаяся от точки $x=0$ вправо, в выражениях для $v(x,t)$ опущена.

Рассмотрим задачу (8)–(10), которая описывает движение полуограниченной струны $0<x<\infty$ с нулевыми начальными условиями, когда конец струны $x=0$ двигается по заданному закону $f(t)$.

Решение этой задачи ищем в виде прямой волны, двигающейся вправо, т. к. источник движения расположен слева в точке $x=0$, а для обратной волны нет источника движения справа:

$$w(x,t)=P(x-at), \tag{17}$$

при этом уравнение (8) для функции (17) выполняется тождественно при любой дважды кусочно-дифференцируемой функции $P(z)$. Из начальных условий (9) находим

$$P(x)\equiv 0, \quad x>0. \tag{18}$$

Граничное условие (10) для функции (17) примет вид $P(-at)=f(t)$ или

$$P(z)=f\left(-\frac{z}{a}\right), \qquad z<0. \tag{19}$$

Отсюда решение (17) задачи (8)–(10) с учётом (18), (19) найдём в виде

$$w(x,t)=\begin{cases}0, & x>at,\\ f\left(t-\frac{x}{a}\right), & x<at.\end{cases} \tag{20}$$

Функция $w(x,t)$ (20) имеет вид прямой волны, бегущей вправо, при этом для $x\geq at$ струна находится в покое, т. к. до этих точек струны волна, индуцированная движением левого конца, еще не дошла в момент времени t.

В итоге решение исходной задачи (1)–(3) имеет вид суммы (4), где функции $v(x,t)$ и $w(x,t)$ строятся соответственно по формулам (14)–(16) и (20).

Из равенств (14)–(16), (20) следует, что если левый конец $x=0$ полуограниченной струны движется в промежутке времени $b/a<t<c/a$ по закону

$$f(t)=\frac{\varphi(at)}{2},$$

а в остальные промежутки времени $t\notin(b/a,c/a)$ не двигается, то отраженная от точки $x=0$ волна исчезает (слагаемые $\varphi(at-x)/2$ в решении (4) взаимно уничтожаются).

Полученные результаты справедливы для любых параметров $b>0$, $b<c\leq\infty$, т. е. начальное возмущение может быть задано во всех точках струны $0<x<\infty$.

Список литературы

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 735 с.

2. Арсенин В. Я. Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1974. 430 с.

3. Белоцерковский П. М. Неустановившиеся колебания бесконечной струны, несущей сосредоточенную массу и поддерживаемую упруговязкими подвесками // Прикладная математика и механика. 2011. № 5. С. 791–812.

4. Боровских А. В. Формула распространяющихся волн для одномерной неоднородной среды // Дифференциальные уравнения. 2002. № 6. С. 758–767.

5. Головатый Ю. Д. О собственных колебаниях и собственных частотах упругого стержня с присоединенной массой // Успехи математических наук. 1988. Т. 43. С. 173–174.

6. Культербаев Х. П., Исламова О. В. Математическая модель колебаний подвешенной струны с сосредоточенной массой // Известия высших учебных заведений Северо-Кавказский регион. Технические науки. 2007. № 4. С. 41–46.

7. Миловидов А. Е., Шаров Г. С. Проблема устойчивости для замкнутой релятивистской струны с точечной массой // Вестник Тверского государственного университета. 2005. № 9. С. 114–123.

8. Холодовский С. Е., Потехо А. О. Решение краевой задачи о движении полуограниченной струны с граничным условием третьего рода // Учёные записки Забайкальского государственного университета. 2013. № 3. С. 140–145.

9. Kholodovskii S. E. On the Motion of a Semibounded String with a Point Mass Attached to the Free End // Mechanics of Solids. 2019. No. 2. Pp. 266–270.

10. Kholodovskii S. E. Effective Solution of the Problem of Motion of an Infinite String with an Attached Point Mass // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2015. No. 1. P. 101–108.

Статья поступила в редакцию 29.04.2021; принята к публикации 06.05.2021

Библиографическое описание статьи

Холодовский С. Е. О законе движения конца полуограниченной струны, гасящем отраженные волны // Учёные записки Забайкальского государственного университета. 2021. Т. 16, № 3. С. 109–114. DOI: 10.21209/2658-7114-2021-16-3-109-114.

Svyatoslav Ye. Kholodovskii,
Doctor of Physics and Mathematics, Professor,
Transbaikal State University
(30 Aleksandro-Zavodskaya str., Chita, 672039, Russia),
e-mail: hol47@yandex.ru,
https://orcid.org/0000-0002-3983-1384

On the Law of Motion of the End of a Semi-Bounded String, Which Extinguishes Reflected Waves

The problem of oscillation of a semi-bounded string at a given initial perturbation $\varphi(x)$, when the left end of the string moves according to a given law $f(t)$, is considered (t – time). The solution of the problem is obtained in the final form for arbitrary functions $\varphi(x)$ and $f(t)$.

The direct, inverse and reflected from the end of the string wave components that make up the resulting waves are constructed. The influence of the function $f(t)$ on the magnitude of the reflected waves is investigated. For an arbitrary initial perturbation of a string, the law of motion of its end is found, at which the reflected waves disappear. The relevance of the article is determined by a wide range of practical problems related to the vibrations of extended objects (bridges, beams, antennas), when the source of motion is an initial perturbation and a given external force applied to the end of the object.

Keywords: boundary value problems for wave equations, motion of a semi-bounded string, the law of motion of the end of the string

References

1. Tikhonov, A. N., Samarsky, A. A. Equations of mathematical physics. M: Nauka, 1972. (In Rus.)

2. Arsenin, V. Ya. Methods of mathematical physics and special functions. M: Science, 1974. (In Rus.)

3. Belotserkovsky, P. M. Unsteady vibrations of an infinite string carrying a concentrated mass and supported by viscoelastic suspensions. Applied Mathematics and Mechanics, no. 5, p. 791–812, 2011. (In Rus.)

4. Borovsky, A. V. Formula of propagating waves for a one-dimensional inhomogeneous medium. Differential Equations, no. 6, pp. 758–767, 2002. (In Rus.)

5. Golovaty Yu. D. On natural vibrations and natural frequencies of an elastic rod with added mass. Successes of mathematical sciences, no. 4, pp. 173–174, 1988. (In Rus.)

6. Kulterbaev, Kh. P., Islamova, O. V. Mathematical model of vibrations of a suspended string with a concentrated mass. Proceedings of higher educational institutions of the North Caucasus region, no. 4, p. 41–46, 2007. (In Rus.)

7. Milovidov, A. E., Sharov, G. S. The stability problem for a closed relative stic string with a point mass. TSU Bulletin, no. 9, p. 114–123, 2005. (In Rus.)

8. Kholodovskii, S. E., Potekho, A. O. Solution of the boundary value problem on the motion of a semi-bounded string with a boundary condition of the third kind. Scientific notes of ZabGU, no. 3, pp. 140–145, 2013. (In Rus.)

9. Kholodovskii, S. E. On the motion of a semibounded string with a point mass attached to the free end. Mechanics of solids, no. 2, pp. 266–270, 2019. (In Engl.)

10. Kholodovskii, S. E. Effective solution of the problem of motion of an infinite string with an attached point mass. Computational mathematics physics, no. 1, pp. 101–108, 2015. (In Engl.)

Received: Aipril 29, 2021; accepted for publication May 7, 2021

Reference to article

Kholodovskii S. Ye. On the Law of Motion of the End of a Semi-Bounded String, Which Extinguishes Reflected Waves. 2021. Vol. 15, No. 3. PP. 109–114. DOI: 10.21209/2658-7114-2021-16-3-109-114.