УДК 532.546
DOI: 10.21209/2658-7114-2021-16-3-69-74

Ирина Анатольевна Ефимова,
кандидат физико-математических наук, доцент,
Забайкальский институт предпринимательства
(672086, Россия, г. Чита, ул. Ленинградская, 16),
e-mail: yefimova79@yandex.ru,
https://orcid.org/0000-0001-7661-0233

О фильтрации жидкости под точечной плотиной с вертикальной слабопроницаемой плёнкой

Рассмотрена задача о фильтрации грунтовых вод под точечной плотиной в кусочно-однородной пористой среде при наличии слабопроницаемой плёнки под плотиной. Рассматривается область фильтрации в виде вертикальной полуплоскости с горизонтальной линией бьефов. Слабопроницаемая плёнка разделяет область фильтрации на два квадранта с различной постоянной проницаемостью. Методом свёртывания разложений Фурье решение задачи получено в явном виде. Исследовано влияние слабопроницаемой плёнки на фильтрационный процесс. Показано, что наличие слабопроницаемой плёнки снижает скорость фильтрации в нижнем бьефе.

Ключевые слова: краевые задачи в кусочно-однородной полуплоскости со слабопроницаемой плёнкой, фильтрация жидкости под плотиной

Рассмотрим в вертикальной нижней полуплоскости $y < 0$ с декартовыми координатами (x, y) фильтрацию жидкости под точечной плотиной, расположенной в точке $(0, 0)$, когда вертикальная полуось $(x = 0, y < 0)$ является слабопроницаемой плёнкой, разделяющей область фильтрации $-\infty < y < 0$ на два квадранта $D_1(x < 0, y < 0)$ и $D_2(x > 0, y < 0)$ с различной проницаемостью k_i в D_i. Для потенциалов $u_i(x, y)$ в D_i задача имеет вид [1, с. 89; 2–4]:

$$\Delta u_i = 0, \quad u_{1|y=0,\,x<0} = 0, \quad u_{2|y=0,\,x>0} = -p, \tag{1}$$

$$x = 0: \quad u_2 - u_1 = Bk_1\partial_x u_1, \quad k_2\partial_x u_2 = k_1\partial_x u_1, \tag{2}$$

где $\Delta u = \partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2$, $\partial_x u = \partial u/\partial x$, $p > 0$, $B > 0$ – постоянные, давление столба жидкости на линии бьефов отсчитывается от давления в нижнем бьефе. Условия сопряжения (2) на плёнке выведены в статье [5], при этом слабопроницаемая плёнка моделируется бесконечно тонким слоем с бесконечно малой проницаемостью.

Задача (1), (2) имеет большой практический интерес, т.к. в силу разности уровней воды слева и справа от плотины происходит фильтрация грунтовых вод под плотиной. Указанная фильтрация является нежелательной, поскольку вытекающая в нижний бьеф жидкость может привести к вымыванию грунта в основании плотины.

Поэтому для снижения скорости фильтрации под плотиной устраивают различные противофильтрационные сооружения, в частности, в виде слабопроницаемых экранов (завес).

Наряду с задачей (1), (2) рассмотрим для функции $f(x,y)$ аналогичную классическую задачу в полуплоскости $y<0$ без плёнки вида

$$\Delta f = 0, \qquad y<0; \qquad f_{|y=0} = \begin{cases} 0, & x<0, \\ -p, & x>0. \end{cases} \tag{3}$$

Данная задача (3) описывает фильтрацию под точечной плотиной в однородной области фильтрации $y<0$ (без плёнки) с потенциалом $f(x,y)$. Решение задачи (3) строится в конечном виде, как

$$f(x,y) = \frac{p}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x}{y} - \frac{p}{2}. \tag{4}$$

Методом свёртывания разложений Фурье [5] выразим решение задачи (1), (2) через решение $f(x,y)$ (4) задачи (3). В соответствии с методом Фурье [6] представим решение задачи (3) при $x<0$ (где функция $f(x,y)$ удовлетворяет однородному граничному условию (3)) в виде интеграла Фурье:

$$f(x,y) = \int\limits_0^\infty e^{\lambda x} g(y,\lambda)\,d\lambda, \quad x<0, \tag{5}$$

где

$$g(y,\lambda) = f_1(\lambda)\sin\lambda y, \quad f_1(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^0 f(0,y)\sin\lambda y\,dy \tag{6}$$

(здесь левая и правая части равенства (5) являются решениями задачи Дирихле в квадранте $D_1(x<0, y<0)$ вида $\Delta u = 0$, $u_{|y=0}=0$, $u_{|x=0}=f(0,y)$).

Решение задачи (1), (2) будем искать в виде

$$u_1(x,y) = \int\limits_0^\infty a_1(\lambda) e^{\lambda x} g(y,\lambda)\,d\lambda, \quad x<0, \tag{7}$$

$$u_2(x,y) = f(x,y) + \int\limits_0^\infty a_2(\lambda) e^{-\lambda x} g(y,\lambda)\,d\lambda, \quad x>0, \tag{8}$$

где функция $g(y,\lambda)$ имеет вид (6), $a_i(\lambda)$ – искомые функции. Отсюда функции $u_i(x,y)$ (7), (8) удовлетворяют условиям задачи (1), что проверяется непосредственно с учётом условий (3). Подставляя функции (5), (7), (8) в условия сопряжения (2) и сравнивая коэффициенты под знаками интегралов при функции $g(y,\lambda)$ слева и справа, для двух функций $a_i(\lambda)$ получим систему двух алгебраических уравнений

$$1 + a_2 = a_1(1 + B\lambda), \quad k_2(1 - a_2) = k_1 a_1,$$

решение которой имеет вид

$$a_1(\lambda) = \frac{2}{Bk_1(\lambda + \beta)}, \quad a_2(\lambda) = 1 - \frac{2}{Bk_2(\lambda + \beta)},$$

где постоянная

$$\beta = \frac{k_1 + k_2}{Bk_1 k_2}. \tag{9}$$

Отсюда решение (7), (8) задачи (1), (2) при учёте равенства (5) примет вид

$$u_1(x, y) = \frac{2}{Bk_1} \int\limits_0^\infty \frac{e^{\lambda x} g(y, \lambda)}{\lambda + \beta}\, d\lambda, \quad x < 0, \tag{10}$$

$$u_2(x, y) = f(x, y) + f(-x, y) - \frac{2}{Bk_2} \int\limits_0^\infty \frac{e^{-\lambda x} g(y, \lambda)}{\lambda + \beta}\, d\lambda, \quad x > 0. \tag{11}$$

Из равенства (5) выводится основная формула свёртывания разложений Фурье (10), (11). Аналогично работе [5], заменяя в равенстве (5) переменную x на $x - t$, умножая полученное равенство на $e^{-\beta t}$ и интегрируя по параметру t от 0 до ∞, получим формулу

$$\int\limits_0^\infty e^{-\beta t} f(x - t, y)\, dt = \int\limits_0^\infty \frac{e^{\lambda x} g(y, \lambda)}{\lambda + \beta}\, d\lambda, \quad x < 0.$$

Отсюда решения (10), (11) исходной задачи (1), (2) приведём к виду без разложений Фурье:

$$u_1(x, y) = \frac{2}{Bk_1} \int\limits_0^\infty e^{-\beta t} f(x - t, y)\, dt, \quad x < 0, \tag{12}$$

$$u_2(x, y) = f(x, y) + f(-x, y) - \frac{2}{Bk_2} \int\limits_0^\infty e^{-\beta t} f(-x - t, y)\, dt, \quad x > 0, \tag{13}$$

где $\beta > 0$ имеет вид (9), функция $f(x, y)$ выражается равенством (4) в конечном виде.

При отсутсвии плёнки, т. е. при $B = 0$, рассуждая аналогично, решение задачи (1), (2) в кусочно-однородной среде (при $k_1 \neq k_2$) найдём в конечном виде

$$u_1(x, y) = \frac{2k_2}{k_1 + k_2} f(x, y), \quad x < 0,$$

$$u_2(x, y) = f(x, y) + \frac{k_2 - k_1}{k_1 + k_2} f(-x, y), \quad x > 0.$$

На практике в задачах о фильтрации жидкости под плотинами имеет большой интерес вычисление скорости жидкости $v_1(x)$, фильтрующейся под плотиной и выходящей в нижний бьеф, т. е. на границу $y = 0$, $x < 0$. Чтобы выявить в «чистом виде» влияние слабопроницаемой плёнки $x = 0$ на процесс (без влияния других параметров) рассмотрим случай однородной области фильтрации, т. е. положим $k_1 = k_2 = 1$. В данном случае из равенств (4), (12) найдем скорость фильтрационного потока на границе нижнего бьефа:

$$v_1(x) = \partial_y u_1(x,0) = \beta \int\limits_0^\infty e^{-\beta t} \partial_y f(x-t,0)\, dt = \frac{\beta p}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{e^{-\beta t}}{t+a}\, dt, \quad x < 0,$$

где $a = -x > 0$, $\beta = 2/B$ или

$$v_1(x) = -\frac{\beta p\, e^{\beta a}}{\pi} Ei(-\beta a),$$

где $Ei(x)$ – интегральная показательная функция [7, с. 9].

Сравним скорости фильтрационных потоков на границе нижнего бьефа без слабопроницаемой плёнки $v_0(x)$ и со слабопроницаемой плёнкой $v_1(x)$. Из выражения (4) находим

$$v_0(x) = \partial_y f(x,0) = \frac{p}{a\pi}, \qquad a = -x > 0.$$

Вычисляя интеграл

$$\frac{\beta p}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{e^{-\beta t}}{a}\, dt = \frac{p}{a\pi} = v_0(x),$$

с учётом очевидного равенства

$$0 < \frac{e^{-\beta t}}{t+a} < \frac{e^{-\beta t}}{a}$$

при $t > 0$, получим оценку

$$\frac{\beta p}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{e^{-\beta t}}{t+a}\, dt < \frac{\beta p}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{e^{-\beta t}}{a}\, dt$$

или $v_1(x) < v_0(x)$.

Таким образом, наличие слабопроницаемой плёнки под основанием плотины снижает скорости фильтрации на границе нижнего бьефа.

Для других классов краевых задач аналогичные результаты влияния плёнок на процессы получены в работах [8–10].

Список литературы

1. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.

2. Петров Н. П. Построение течений под плотинами. Теоретические основы гидродинамики. Тула: Тульский гос. пед. ун-т, 1979. С. 10–13.

3. Ефимова И. А. Решение задачи фильтрации жидкости под точечной плотиной в двухслойной полуплоскости // Учёные записки Забайкальского государственного университета. 2018. Т. 13, № 4. С. 6–10.

4. Ефимова И. А. О фильтрации жидкости под точечной плотиной в двухслойном грунте, ограниченном снизу водорупором // Учёные записки Забайкальского государственного университета. 2019. Т. 14, № 3. С. 6–11.

5. Холодовский С. Е. Метод свертывания разложений Фурье. Случай обобщенных условий сопряжения типа трещины (завесы) в кусочно-неоднородных средах // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 6. С. 855–859. = Kholodovskii S. E. The Convolution Method of Fourier Expansions. The Case of Generalized Transmission Conditions of Crack (Screen) Type in Piecewise Inhomogeneous Media // Differential Equations. 2009. Vol. 45, No. 6. P. 873–877.

6. Арсенин В. Я. Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1974. 432 с.

7. Андреева Т. Г. Математика: специальные функции и некоторые приложения. СПб.: РГГМУ, 2013. 102 с.

8. Kholodovskii S. E. On Multilayer Films on the Boundary of a Half-Space // Mathematical Notes, 2016, Vol. 99. No. 3. P. 426–431.

9. Kholodovskii S. E. Solution of Boundary Value Problems for the La-place Equation in a Ball Bounded by a Multilayer Film // Differential Equations. 2017. No. 7. Pp. 891–899.

10. Kholodovskii S. E. Solution of Boundary Value Problems in Cyl-inders with Two-Layer Film Inclusions // Journal of Mathematical Sciences. 2018. No. 1. P. 55–59.

Статья поступила в редакцию 20.05.2021; принята к публикации 18.06.2021

Библиографическое описание статьи

Ефимова Е. А. О фильтрации жидкости под точечной плотиной с вертикальной слабопроницаемой плёнкой // Учёные записки Забайкальского государственного университета. 2021. Т. 16, № 3. С. 69–74. DOI: 10.21209/2658-7114-2021-16-3-69-74.

Irina A. Efimova,
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor,
Transbaikal Institute of Entrepreneurship
(16 Leningradskay str., Chita, 672086, Russia),
e-mail: yefimova79@yandex.ru,
https://orcid.org/0000-0001-7661-0233

About Liquid Filtration Under a Point Dam with a Vertical Weakly Permeable Film

The problem of groundwater filtration under a point dam in a piecewise homogeneous porous medium in the presence of a weakly permeable film under the dam is considered. The filtration

area is considered in the form of a vertical half-plane with a horizontal line of water courses. A weakly permeable film divides the filtration area into two quadrants with different constant permeability. By the convolution method of Fourier expansions, the solution of the problem is obtained explicitly. The influence of a weakly permeable film on the filtration process is investigated. It is shown that the presence of a weakly permeable film reduces the filtration rates in the downstream.

Keywords: boundary value problems in a piecewise homogeneous half-plane with a weakly permeable film, liquid filtration under a dam

References

1. Polubarinova-Kochina, P. Ya. The theory of groundwater movement. M: Nauka, 1977. (In Rus.)

2. Petrov, N. P. Constructions of currents under dams. Theoretical foundations of hydrodynamics. TGPI, 1979: 10–13. (In Rus.)

3. Efimova, I. A. Solution of the problem of fluid filtration under a point dam in a two-layer half-plane. Scientific notes of ZabGU, no. 4, p. 6–10, 2018. (In Rus.)

4. Efimova, I. A. Filtration of liquid under a point dam in a two-layer soil bounded from below by a water confinement. Scientific notes of ZabGU, no. 3, p. 6–11, 2019. (In Rus.)

5. Kholodovskii, S. E. The convolution method of Fourier expansions. The case of generalized transmission conditions of crack (screen) type in piecewise inhomogeneous media. Differential equations, no. 6, pp. 855–859, 2009. (In Engl.)

6. Arsenin, V. Ya. Methods of mathematical mathematics and special functions. M: Nauka, 1974. (In Rus.)

7. Andreeva, T. G. Mathematics: Special functions and some applications. SPb: RGGMU, 2013. (In Rus.)

8. Kholodovskii, S.E. On multilayer films on the boundary of a Half-Space. Mathematical notes, no. 3, pp. 426–431, 2016. (In Engl.)

9. Kholodovskii, S. E. Solution of boundary value problems for the La-place eguation in a ball bounded by a multilayer film. Differential equations, no. 7, pp. 891–899, 2017. (In Engl.)

10. Kholodovskii, S. E. Solution of boundary value problems in Cyl-inders with two-layer film inclusions. Journal of mathematical sciences, no. 1, pp. 55–59, 2018. (In Engl.)

Received: May 20, 2020; accepted for publication June 18, 2021

Reference to article

Efimova I. A. About Liquid Filtration Under a Point Dam with a Vertical Weakly Permeable Film // Scholarly Notes of Transbaikal State University. 2021. Vol. 16, No. 3. PP. 69–74. DOI: 10.21209/2658-7114-2021-16-3-69-74.