УДК 517.956
ББК 22.161.1

Ирина Анатольевна Ефимова,
кандидат физико-математических наук, доцент,
Забайкальский институт предпринимательства,
672086, Россия, г. Чита, ул. Ленинградская, 16,
e-mail: yefimova79@yandex.ru

О решении краевых задач для уравнения Лапласа в полуплоскости с неограниченными граничными функциями. Метод квазиинтегралов Фурье[1]

Рассмотрена третья краевая задача в полуплоскости с достаточно гладкой граничной функцией, которая в бесконечности имеет произвольный степенной рост. Решение задачи получено в виде квазиинтеграла Фурье с классическими коэффициентами Фурье от n-ой производной граничной функции. Полученные результаты позволяют решать краевые задачи с особыми точками в бесконечности.

Ключевые слова: краевые задачи с неограниченными граничными функциями, метод квазиинтегралов Фурье.

Irina Anatolyevna Efimova,
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor,
Transbaikal Institute of Entrepreneurship
16, Leningradskaya St., Chita, Russia, 672086,
e-mail: yefimova79@yandex.ru

On the Solution of Boundary Value Problems for the Laplace Equation in the Half-Plane with Unbounded Boundary Functions. The Method of Quasi-Integrals of Fourier[2]

The third boundary value problem in the half-plane with sufficiently smooth boundary function which at infinity is an arbitrary polynomial growth was considered. The solution of the problem is obtained in the form of quasi-integral Fourier with classical Fourier coefficients of the n-th derivative of the boundary function. The results allow solving boundary value problems with singular points at infinity.

Keywords: boundary value problems with unbounded boundary functions, method of quasi-integrals of Fourier.

Одним из мощных методов решения краевых задач математической физики является метод разделения переменных – метод Фурье, позволяющая представлять заданные и искомые функции по единым формулам с последующим определением коэффициентов Фурье искомого решения из граничных условий, условий сопряжения и т. д. Однако при решении задач методом Фурье в неограниченных областях заданные функции должны удовлетворять достаточно сильным ограничениям в бесконечности [1, с. 524], что сужает класс решаемых задач. Например, граничная функция $f(x)$, стремящаяся к различным конечным

[1]Работа выполнена в рамках Государственного задания вузу Министерства образования и науки Российской Федерации (проект 2014/255 НИР 2603.14).

[2]The work was performed as part of the State Task to University of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (project 2014/255 research 2603.14).

или бесконечным пределам при $x \to -\infty$ и $x \to +\infty$, не разлагается в интеграл Фурье. Кроме того, потенциал простейшего поступательного потока, а также потенциалы основных особых точек (источников, стоков, вихрей и т. д.), индуцирующих движение, имеют в бесконечности особенности и также не разлагаются в классический интеграл Фурье.

В данной статье на основании понятия квазиинтеграла Фурье [2; 3] решена третья краевая задача для достаточно гладких граничных функций, имеющих в бесконечности рост не выше произвольной степени. Решения получены в обычных функциях и содержат не более двукратных квадратур, как и при применении классического метода Фурье.

Рассмотрим для потенциала $\varphi(x, y)$ в полуплоскости $y < 0$ третью краевую задачу вида

$$\Delta\varphi = 0, \qquad \partial_y\varphi + h\varphi_{|y=0} = f(x), \tag{1}$$

где $h > 0$ – постоянная, Δ – оператор Лапласа по переменным x, y; граничная функция $f(x)$ не ограничена в бесконечности и имеет особенность типа полюса произвольного порядка: $f(x) = O(x^n)$ при $|x| \to \infty$; аналогичную особенность в ∞ имеет φ. Поскольку производная от функций понижает порядок полюсов в бесконечности, то предположим, что n-я производная от граничной функции $f(x)$ разлагается в классический интеграл Фурье [1, с. 524]:

$$f^{(n)}(x) = \int\limits_0^\infty [f_1(\lambda)\sin\lambda x + f_2(\lambda)\cos\lambda x]d\lambda,$$

$$\begin{pmatrix} f_1(\lambda) \\ f_2(\lambda) \end{pmatrix} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\begin{pmatrix} \sin\lambda x \\ \cos\lambda x \end{pmatrix} dx. \tag{2}$$

Дифференцируя задачу (1) n раз по свободной переменной x, для функции $\Phi = \partial_n\varphi$ получим аналогичную задачу с граничной функцией $f^{(n)}(x)$:

$$\Delta\Phi = 0, \qquad y < 0; \qquad \partial_y\Phi + h\Phi_{|y=0} = f^{(n)}(x), \tag{3}$$

здесь и далее нижний числовой индекс n при ∂_n означает производную n-го порядка по x, а буквенный индекс – производную по этой переменной. Применяя метод разделения переменных, найдём ограниченное в полуплоскости $y < 0$ решение задачи (3) в виде

$$\Phi(x, y) \equiv \partial_n\varphi = \int\limits_0^\infty e^{\lambda y}[F_1(\lambda)\sin\lambda x + F_2(\lambda)\cos\lambda x]d\lambda, \qquad y < 0, \tag{4}$$

где

$$F_i(\lambda) = \frac{f_i(\lambda)}{\lambda + h},$$

$f_i(\lambda)$ – коэффициенты Фурье функции $f^{(n)}(x)$ (2). Входящие в (4) функции $e^{\lambda y}\sin\lambda x$ и $e^{\lambda y}\cos\lambda x$ являются сопряжёнными гармоническими функциями.

Отсюда для потенциала $\varphi(x, y)$ имеем задачу о восстановлении гармонической функции по одной её n-й производной $\Phi(x, y) = \partial_n\varphi$ вида (4). Гармоническая функция, сопряжённая функции Φ (4), имеет вид

$$\Psi(x,y)=\int\limits_0^\infty e^{\lambda y}[F_1(\lambda)\cos\lambda x-F_2(\lambda)\sin\lambda x]d\lambda,\qquad y<0. \tag{5}$$

Пусть $\psi(x,y)$ – гармоническая функция, сопряжённая потенциалу $\varphi(x,y)$, т. е.

$$\partial_x\varphi=\partial_y\psi,\qquad \partial_y\varphi=-\partial_x\psi.$$

Дифференцируя последние условия Коши-Римана k раз по x, получим

$$\partial_x(\partial_k\varphi)=\partial_y(\partial_k\psi),\qquad \partial_y(\partial_k\varphi)=-\partial_x(\partial_k\psi), \tag{6}$$

т. е. $\partial_k\varphi$ и $\partial_k\psi$ являются сопряжёнными гармоническими функциями. Из равенств (6) следует, что если известны функции $\partial_k\varphi$ и $\partial_k\psi$, то известны обе частные производные функции $\partial_{k-1}\varphi$: $\partial_x(\partial_{k-1}\varphi)=\partial_k\varphi$, $\partial_y(\partial_{k-1}\varphi)=-\partial_k\psi$, при этом

$$\partial_{k-1}\varphi(x_1,y_1)=\int\limits_{(0,0)}^{(x_1,y_1)}\partial_k\varphi\,dx-\partial_k\psi\,dy+\partial_{k-1}\varphi(0,0). \tag{7}$$

Отсюда при $k=n$ найдём

$$\Phi_1\equiv\partial_{n-1}\varphi(x_1,y_1)=\int\limits_{(0,0)}^{(x_1,y_1)}\Phi\,dx-\Psi\,dy=\int\limits_0^{x_1}\Phi_{|y=y_1}dx-\int\limits_0^{y_1}\Psi_{|x=0}\,dy=$$

$$=\int\limits_0^\infty\frac{1}{\lambda}(F_1P_1+F_2Q_1)\,d\lambda+\partial_{n-1}\varphi(0,0), \tag{8}$$

где в окончательном результате $x_1=x$, $y_1=y$ (во внутренних равенствах аддитивное слагаемое опущено),

$$P_1=1-e^{\lambda y}\cos\lambda x,\qquad Q_1=e^{\lambda y}\sin\lambda x, \tag{9}$$

$P_1=Q_1=0$ при $x=y=0$, функция $\Psi=\partial_n\psi$ – сопряжённая функции Φ (4), (5), при этом $P_1(x,y)$ и $Q_1(x,y)$ (9) – сопряженные гармонические функции.

Функция $\Psi_1=\partial_{n-1}\psi$, сопряжённая функции Φ_1 (8), с учётом (6) имеет вид

$$\Psi_1=-\partial_{n-2,\,y}\varphi=\int\limits_0^\infty\frac{1}{\lambda}(F_1Q_1-F_2P_1)d\lambda-\partial_{n-2,\,y}\varphi(0,0).$$

Вычисляя соответствующий криволинейный интеграл (7), находим

$$\Phi_2 \equiv \partial_{n-2}\varphi = \int\limits_0^\infty \frac{1}{\lambda}(F_1P_2 + F_2Q_2)\,d\lambda + x\,\partial_{n-1}\varphi(0,0) +$$

$$+ y\,\partial_{n-2,\,y}\varphi(0,0) + \partial_{n-2}\varphi(0,0),$$

где

$$P_2 = x - \frac{Q_1}{\lambda}, \qquad Q_2 = y + \frac{P_1}{\lambda},$$

Q_1, P_1 имеют вид (9), P_2 и Q_2 – сопряжённые гармонические функции, равные нулю при $x = y = 0$. Далее указанную процедуру повторяем.

На k-м шаге получим формулу, которая доказывается по индукции,

$$\Phi_k \equiv \partial_{n-k}\varphi = \int\limits_0^\infty \frac{1}{\lambda}(F_1P_k + F_2Q_k)\,d\lambda +$$

$$+ \sum_{m=1}^{k-1}\left[R_m\partial_{n-k+m}\varphi(0,0) + I_m\partial_{n-k+m-1,\,y}\varphi(0,0)\right] + \partial_{n-k}\varphi(0,0), \tag{10}$$

где

$$R_m = \frac{Re\,z^m}{m!}, \qquad I_m = \frac{Im\,z^m}{m!}, \qquad z = x + iy; \tag{11}$$

сопряжённые гармонические функции P_k и Q_k строятся по рекуррентным формулам

$$P_{k+1} = R_k - \frac{Q_k}{\lambda}, \qquad Q_{k+1} = I_k + \frac{P_k}{\lambda},$$

P_1, Q_1 имеют вид (9), причём $P_k = Q_k = 0$ при $x = y = 0$. Отсюда с учётом $P_{k+1} = (R_k\lambda^2 - I_{k-1}\lambda - P_{k-1})\lambda^{-2}$, $Q_{k+1} = (I_k\lambda^2 + R_{k-1}\lambda - Q_{k-1})\lambda^{-2}$ следуют формулы непосредственного вычисления функций P_k, Q_k (без рекуррентных формул):

$$P_{2k} = \frac{1}{\lambda^{2k-1}}\left[\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{k-j-1}(R_{2j+1}\lambda^{2j+1} - I_{2j}\lambda^{2j}) - (-1)^k(R_1\lambda - Q_1)\right],$$

$$Q_{2k} = \frac{1}{\lambda^{2k-1}}\left[\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{k-j-1}(I_{2j+1}\lambda^{2j+1} + R_{2j}\lambda^{2j}) - (-1)^k(I_1\lambda + P_1)\right],$$

$$P_{2k+1} = \frac{1}{\lambda^{2k}}\left[\sum_{j=1}^{k}(-1)^{k-j}(R_{2j}\lambda^{2j} - I_{2j-1}\lambda^{2j-1}) + (-1)^kP_1\right],$$

$$Q_{2k+1} = \frac{1}{\lambda^{2k}}\left[\sum_{j=1}^{k}(-1)^{k-j}(I_{2j}\lambda^{2j} + R_{2j-1}\lambda^{2j-1}) + (-1)^kQ_1\right], \tag{12}$$

где при $k = 1$ в первых двух равенствах суммы $\Sigma = 0$.

Отсюда по формуле (10) при $k = n$ найдём решение исходной задачи (1) в виде

$$\varphi(x,y) = \int_0^\infty \frac{f_1 P_n + f_2 Q_n}{\lambda(\lambda+h)}\, d\lambda +$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1} [R_k\, \partial_k \varphi(0,0) + I_k\, \partial_{k-1,\,y}\varphi(0,0)] + \varphi(0,0), \tag{13}$$

где f_i, P_n, Q_n, R_k, I_k определены в (2), (12), (11), при этом из граничного условия (1) следует $\partial_{k,\,y}\varphi(0,0) = f^{(k)}(0) - h\partial_k\varphi(0,0)$.

Подынтегральная функция (13) в особой точке $\lambda = 0$ имеет конечный предел, что доказывается по индукции с помощью правила Лопиталя, при этом

$$\lim_{\lambda\to 0} \frac{P_n}{\lambda} = -I_n, \qquad \lim_{\lambda\to 0} \frac{Q_n}{\lambda} = R_n.$$

При $\lambda \to \infty$ интеграл (13) сходится равномерно по x, y, т. к. функции P_k/λ и Q_k/λ имеют порядок $O(1/\lambda)$ и $f_i \to 0$ (2), при этом интеграл (13) мажорируется сходящимся интегралом (4) при $y = 0$.

Функция (13) в силу гармоничности функций P_n, Q_n, R_k, I_k удовлетворяет уравнению Лапласа в полуплоскости $y < 0$ (1).

Граничное условие (1) для функции (13) примет вид

$$\partial_k\varphi + h\varphi_{|y=0} = \int_0^\infty \frac{1}{\lambda(\lambda+h)} [f_1(hp_n - q_{n-1}) + f_2(p_{n-1} + hq_n)] d\lambda +$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1} [X_{k-1}\partial_{k-1,\,y}\varphi(0,0) + hX_k\partial_k\varphi(0,0)] + h\varphi(0,0) =$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{\lambda}(f_1 p_n + f_2 q_n) d\lambda + \sum_{k=0}^{n-1} X_k(\partial_{k\,y}\varphi + h\partial_k\varphi)_{|x=y=0} =$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{\lambda}(f_1 p_n + f_2 q_n) d\lambda + \sum_{k=0}^{n-1} X_k f^{(k)}(0), \tag{14}$$

где $q_1 = \sin\lambda x$, $p_1 = 1 - \cos\lambda x$, $X_k = x^k/k!$,

$$p_{2k} = \frac{1}{\lambda^{2k-1}} \left[(-1)^k q_1 + \sum_{i=1}^{k} (-1)^{k-i} X_{2i-1}\lambda^{2i-1} \right],$$

$$p_{2k+1} = \frac{1}{\lambda^{2k}} \left[(-1)^k p_1 + \sum_{i=1}^{k} (-1)^{k-i} X_{2i}\lambda^{2i} \right],$$

$$q_{2k} = \frac{1}{\lambda^{2k-1}} \left[(-1)^{k+1} p_1 + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{k-i-1} X_{2i} \lambda^{2i} \right],$$

$$q_{2k+1} = \frac{1}{\lambda^{2k}} \left[(-1)^{k} q_1 + \sum_{i=1}^{k} (-1)^{k-i} X_{2i-1} \lambda^{2i-1} \right],$$

(здесь полагаем $\sum_{i=a}^{b} = 0$ при $b < a$). Правая часть равенства (14) представляет собой разложение граничной функции $f(x)$ (1) в квазиинтеграл Фурье [2; 3], т. е. граничное условие (1) для функции (13) выполняется. Итак, доказана теорема.

Теорема. *Если граничная функция $f(x) \in C^{n+1}(R)$, $f^{(n+1)}(x)$ – абсолютно интегрируема при $x \in R$ и $f^{(n)}(x)$ разлагается в интеграл Фурье, то решение третьей граничной задачи (1) строится по формуле (13) с точностью до n постоянных $\partial_k \varphi(0,0)$, $k = 0, ..., n-1$.*

Таким образом, для единственности решения задачи (1) следует, кроме граничной функции $f(x)$, задать значения указанных производных искомого решения по переменной x в одной точке.

Список литературы

1. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3. М.: Наука, 1962. 656 с.

2. Холодовский С. Е. О разложении функций в квазиинтегралы Фурье и их приложении // Обозрении прикладной и промышленной математики. 2003. Т. 10. Вып. 1. С. 247–248.

3. Kholodovskii A. S. and Kholodovskii S. E. Fourier quasi-integral expansions of functions and their applications to the solution of boundary value problems // Differential Equations. 2004. Vol. 40. №. 10. P. 1491–1495.

References

1. Fikhtengol'ts G. M. Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya. T. 3. M.: Nauka, 1962. 656 s.

2. Kholodovskii S. E. O razlozhenii funktsii v kvaziintegraly Fur'e i ikh prilozhenii // Obozrenii prikladnoi i promyshlennoi matematiki. 2003. T. 10. Vyp. 1. S. 247–248.

3. Kholodovskii A. S. and Kholodovskii S. E. Fourier quasi-integral expansions of functions and their applications to the solution of boundary value problems // Differential Equations. 2004. Vol. 40. №. 10. P. 1491–1495.

Статья поступила в редакцию 15.05.2015