УДК 338.45:530
ББК 65.305.143.2: 22.311
ББК У 305.143.2: В311

Владимир Александрович Толпаев,
доктор физико-математических наук, профессор,
Северо-Кавказский научно-исследовательский
проектный институт природных газов,
355035, Россия, г. Ставрополь, ул. Ленина, 419,
e-mail: v.a.tolpaev@mail.ru
Александр Михайлович Кравцов,
кандидат физико-математических наук,
Северо-Кавказский научно-исследовательский
проектный институт природных газов,
355035, Россия, г. Ставрополь, ул. Ленина, 419,
e-mail: alex_k@bk.ru

Метод средневзвешенных потенциалов в практических задачах нефтегазодобывающей отрасли

Рассматривается возможность замены при решении краевых задач для уравнения Лапласа со смешанными граничными условиями Дирихле и Неймана на некоторой границе задачами, в которых вдоль участка границы с условиями Дирихле задаются условия Неймана с неопределенными параметрами. Эти неопределенные параметры затем подбираются так, чтобы первоначально заданные условия Дирихле выполнялись в среднеарифметическом приближении, что и составляет сущность метода средневзвешенных потенциалов (СВП). Делаются оценки точности расчёта фильтрационных потоков по методу СВП.

Ключевые слова: Закон Дарси, уравнение Лапласа, граничные условия, несовершенная скважина, давление, коэффициент динамической вязкости, дебит скважины.

Vladimir Aleksandrovich Tolpayev,
Doctor of Physics and Mathematics,
North-Caucasus Research and Design Institute of Natural Gases,
419 Lenin St., Stavropol, Russia, 355035,
e-mail: v.a.tolpaev@mail.ru
Aleksandr Mikhaylovich Kravtsov,
Candidate of Physics and Mathematics,
North-Caucasus Research and Design Institute of Natural Gases,
419 Lenin St., Stavropol, Russia, 355035,
e-mail: alex_k@bk.ru

The Method of Average Weighted Potential in Practical Problems of Oil and Gas Industry

TThe possibility of substitution for solving boundary value problems for the Laplace equation with mixed boundary conditions of the Dirichlet and Neumann boundary on some problems in which area along the border with Dirichlet and Neumann conditions are set with uncertain parameters. These uncertain parameters are chosen that the initially set Dirichlet conditions were carried out in the arithmetic

 © **Толпаев В. А., Кравцов А. М., 2015**

mean approximation, which is the essence of the method of weighted average potentials (WAP). It was made the estimations of the accuracy of calculation of seepage flow method WAP. The possibility of substitution for solving boundary value problems for the Laplace equation with mixed boundary conditions of the Dirichlet and Neumann boundary on some problems in which area along the border with Dirichlet and Neumann conditions are set with uncertain parameters. These uncertain parameters are chosen that the initially set Dirichlet conditions were carried out in the arithmetic mean approximation, which is the essence of the method of weighted average potentials (WAP). It was made the estimations of the accuracy of calculation of seepage flow method WAP.

Keywords: Darcy's law, Laplace equation, boundary value problem, imperfect well, the pressure coefficient of dynamic viscosity, flow rate.

Введение. При оценке характеристик фильтрационных процессов, при добыче углеводородов, в расчётах технологических параметров работы скважин и их узлов возникают задачи со смешанными краевыми условиями [1]. Решение такого рода задач вызывает определённые затруднения, которые можно преодолеть, вводя упрощающие предположения. При этом важно, чтобы упрощающие предположения не входили в противоречие с физической сутью задачи. Для корректного построения упрощённой модели исходной задачи можно использовать идею её аппроксимации более простыми, модельными задачами, помогающими получить аналитическое решение, записываемое в замкнутом виде. Для целого ряда нефтегазопромысловых проблем, сводящихся к граничным задачам со смешанными краевыми условиями, упрощённые модели зачастую могут быть построены на основе метода средневзвешенного потенциала (СВП) [2; 3]. Это физически ясный метод, который можно рекомендовать в учебном процессе с целью выработки навыков построения математических моделей у студентов широкого круга физико-математических и технических специальностей.

Метод СВП опишем на конкретных примерах, по подобию с которыми студентам физико-математических и технических специальностей можно ставить задачи творческого характера для выполнения научных учебно-исследовательских работ.

На протяжении всей статьи, если не делается специальных оговорок, применяются стандартные общепринятые обозначения.

1. Задача о притоке жидкости к скважине в условиях частично непроницаемого контура питания. Сюжет этой задачи заимствован из задачника В. А. Евдокимовой и И. Н. Кочиной [4, задача № 34] по подземной гидравлике.

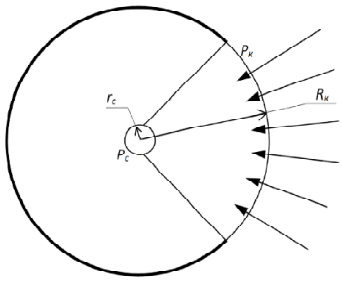

Рис. 1. Схема притока нефти к центральной скважине при наличии непроницаемой части круговой границы области фильтрации

Скважина радиусом $r_c = 10$ см расположена в центре кругового пласта радиусом $R_к = 350$ м. Коэффициент проницаемости пласта $k = 0.8D$, толщина пласта $h = 12$ м, динамический коэффициент вязкости нефти $\mu = 5$ спз. Определить дебит скважины, счи-

тая, что залежь по контуру радиуса $R_к$ частично непроницаема. Контур питания представляет собой в плане дугу окружности радиусом $R_к$ с центральным углом $\alpha = 120°$. Давление на контуре питания $p_к = 27,9$ МПа $= 285$ кгс/с^2, давление на забое скважины $p_к = 7,84$ МПа $= 80$ кгс/с^2 .

В задаче на части круговой границы радиуса R_k задано давление, а другая часть этой круговой границы является непроницаемой. Смешанный характер граничных условий существенно усложняет построение решения. Точное решение в этом случае может быть получено методом конформных отображений. В указаниях к решению задачи в [4] предлагается усреднить пластовое давление по всей внешней границе, считать, что меньшее давление действует на всём контуре. Это неверно в принципе, так как в этом случае искажается картина линий тока фильтрационного потока к скважине, не учитывается направляющее воздействие на фильтрационный поток внешней непроницаемой границы. Такого рода упрощающее допущение приводит к принципиально неверному результату.

Чтобы сохранить контекст задачи с наличием непроницаемой границы, следует предположить, что нормальная составляющая скорости фильтрации известна не только на непроницаемом секторе внешнего контура $R_к$, где она равна нулю, но и на проницаемой части сектора.

Приведём подробное для первого примера решение задачи методом СВП. Как известно [1], для линейного режима плоскопараллельной фильтрации несжимаемой жидкости (нефти) уравнение движения в полярных координатах имеет вид:

$$r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}=0. \tag{1}$$

Граничные условия, с которыми следует интегрировать уравнение (1), в соответствии с постановкой таковы:

$$\varphi\Big|_{r=r_c}=\varphi_c=-\frac{k\cdot P_c}{\mu}, \tag{2}$$

$$\varphi\Big|_{\substack{r=R\\0\le\theta\le\alpha=120°}}=\varphi_k=-\frac{k\cdot P_c}{\mu}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r}\Big|_{\substack{r=R\\\alpha\le\theta\le2\pi}}=0. \tag{4}$$

Сложность задачи обусловлена наличием смешанных краевых условий Дирихле и Неймана на круговом контуре радиуса $R_к$.

В методе СВП для приближённого решения задачи (1)–(4) краевое условие Дирихле (3) заменяют следующим краевым условием Неймана:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r}\Big|_{\substack{r=R\\0\le\theta\le120°}}=v_0=const. \tag{5}$$

В (5) v_o некоторая подлежащая определению постоянная, выражающая собой среднее значение радиальной составляющей скорости фильтрации на дуге с углом $\alpha = 120°$.

Решение задачи (1), (2), (4), (5) строим методом Фурье. В результате для функции $\varphi(r,\theta)$ получаем тригонометрический ряд

$$\varphi=\varphi_c+A_0\cdot\ln\left(\frac{r}{r_c}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}f_n(r)\cdot(A_n\cdot\cos n\theta+B_n\cdot\sin n\theta), \tag{6}$$

где

$$f_n(r)=\left(\frac{r}{r_c}\right)^n-\left(\frac{r_c}{r}\right)^n. \tag{7}$$

Подчеркнём, что ряд (6) при любых произвольных постоянных A_0, A_n и B_n удовлетворяет уравнению (1) и граничному условию (2). Произвольные постоянные A_0, A_n и B_n найдём из граничных условий (4) и (5). Для этого предварительно вычислим производную $\frac{\partial\varphi}{\partial r}$, после чего согласно граничным условиям (4) и (5) приходим к равенству

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{r=R} = \frac{A_0}{R} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(R)\cdot(A_n\cdot\cos n\theta + B_n\cdot\sin n\theta) = \begin{cases} v_0, & \text{если } 0\le\theta\le\alpha \\ 0, & \text{если } \alpha<\theta\le 2\pi \end{cases}. \tag{8}$$

Раскладывая периодическую с периодом 2π кусочно-постоянную функцию в правой части равенства (8) в ряд Фурье, получим следующие выражения для коэффициентов:

$$A_0 = \frac{R\cdot\alpha\cdot v_0}{2\pi},\ A_n = \frac{v_0\cdot\sin n\alpha}{\pi\cdot n\cdot f_n'(R)},\ B_n = \frac{v_0\cdot(1-\cos n\alpha)}{\pi\cdot n f_n'(R)}. \tag{9}$$

Подставляя коэффициенты (9) в ряд (6), получим

$$\varphi = \varphi_c + \frac{R\cdot\alpha\cdot v_0}{2\pi}\cdot\ln\left(\frac{r}{r_c}\right) + \frac{v_0}{\pi}\cdot\sum_{n=1}^{\infty} f_n(r)\cdot\left(\frac{\sin n\alpha}{n\cdot f_n'(R)}\cdot\cos\theta + \frac{1-\cos n\alpha}{n\cdot f_n'(R)}\cdot\sin n\theta\right). \tag{10}$$

Из формулы (10) видно, что решение выражается через неопределённую постоянную v_0. Для расчёта этой постоянной вернёмся к исходному граничному условию (3). Подберём неизвестную постоянную v_0 так, чтобы граничное условие (3) выполнялось «в среднем», т. е. чтобы выполнялось равенство

$$\frac{1}{\alpha}\cdot\int_0^{\alpha}\varphi(R,\theta)\cdot d\theta = \varphi_k = -\frac{k\cdot P_k}{\mu}. \tag{11}$$

Подставляя (10) в (11), вычисляя интегралы и выполняя тождественные преобразования, получим равенство

$$\varphi_c + \frac{R\cdot\alpha\cdot v_0}{2\pi}\cdot\ln\left(\frac{R}{r_c}\right) + \frac{4v_0}{\pi\cdot\alpha}\cdot\sum_{n=1}^{\infty} f_n(R)\frac{\sin^2\left(\frac{n\alpha}{2}\right)}{n^2\cdot f_n'(R)} = \varphi_k. \tag{12}$$

Из формулы (12) находим следующее выражение для расчёта неопределённой постоянной :

$$v_0 = \frac{\pi\cdot(\varphi_k-\varphi_c)}{\frac{R\cdot\alpha}{2}\cdot\ln\left(\frac{R}{r_c}\right) + \frac{4}{\alpha}\cdot S(\alpha)}, \tag{13}$$

где

$$S(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(R)\cdot\frac{\sin^2\left(\frac{n\alpha}{2}\right)}{n^2\cdot f_n'(R)}. \tag{14}$$

Вычислим теперь дебит Q скважины. Согласно закону Дарси $v_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r}$. Поэтому, с учётом отрицательного знака проекции v_r, имеем:

$$Q = -\int_0^{\alpha}\frac{\partial\varphi(R,\theta)}{\partial r}\cdot R\cdot h\cdot d\theta = -R\cdot v_0\cdot h\cdot\alpha. \tag{15}$$

Подставляя в формулу (15) выражение (13), получаем выражение

$$Q = \frac{2\cdot\pi\cdot h\cdot(\varphi_c-\varphi_k)}{\ln\left(\frac{R}{r_c}\right) + C}, \tag{16}$$

где C – дополнительное фильтрационное сопротивление $C = \frac{8}{R \cdot \alpha^2} \cdot S(\alpha)$. Для практически важного случая, когда $R >> r_c$, оказывается, что дополнительное фильтрационное сопротивление $C \cong \frac{8}{\alpha^2} \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{n\alpha}{2}\right)}{n^3}$, т. е. фактически зависит только от угла α и не зависит от отношения R/r_c. Конкретно для значений $\frac{R}{r_c} \geq 15$ на основании анализа ряда (14) авторы получили следующую высокоточную аппроксимацию для дополнительного фильтрационного сопротивления

$$C \cong 2 \cdot \ln\left(\frac{1}{\sin(0.25 \cdot \alpha)}\right). \tag{17}$$

Проверим ещё, как ведёт себя формула (16) в предельных ситуациях, когда $\alpha \to 2\pi$ и $\alpha \to 0$. Если $\alpha \to 2\pi$, то $S(\alpha) \to 0$ и из (16) следует известная формула Дюпюи для дебита совершенной скважины Q_0

$$Q_0 = \frac{2 \cdot \pi \cdot h \cdot (\varphi_c - \varphi_k)}{\ln\left(\frac{R}{r_c}\right)}. \tag{18}$$

Если $\alpha \to 0$, то из формулы (17) следует, что $C \to \infty$ и, стало быть, $Q \to 0$, что и должно быть из физических соображений.

Окончательное выражение для дебита Q, вытекающее из формул (16) и (17), для практического анализа удобно записать в виде безразмерного отношения

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{\ln\left(\frac{R}{r_c}\right)}{\ln\left(\frac{R}{r_c}\right) + C}. \tag{19}$$

Точное решение в терминах электростатической задачи приведено в [5]. Сравнение приближённого (19) по методу СВП и точного [5] решений приведено на рис 2. Нормированные значения дебита Q/Q_0, подсчитанные по методу СВП по формуле (19), представлены штриховыми линиями. Сплошные линии обозначают кривые, полученные для точного решения. Как видно, решения по СВП дают несколько заниженные значения дебита, при этом сохраняется приемлемая точность во всём диапазоне изменения угла α.

Проведём ещё расчёт дебита скважины в условиях задачи № 34. Углу $\alpha = 120°$ и отношению радиусов контура питания и скважины $\frac{R}{r_c} = 3500$ соответствует значение $Q/Q_0 = 0,84$. С учётом дебита совершенной скважины $Q_0 = 192$ м^3/сут, значение дебита составит $Q = 161$ м^3/сут. Для сравнения, задачник предполагает ответ $Q = 14$ м^3/сут, что существенно ниже полученной оценки дебита. Существенно заниженное значение дебита в задачнике получается потому, что в расчёте за контурное давление принималось средневзвешенное значение по длине круговой границы радиуса R области фильтрации. Результат вычислений показывает, что если в составе границы области фильтрации есть как проницаемые, так и непроницаемые участки, то в качестве контурного давления средневзвешенное по длине границы значение принимать нельзя.

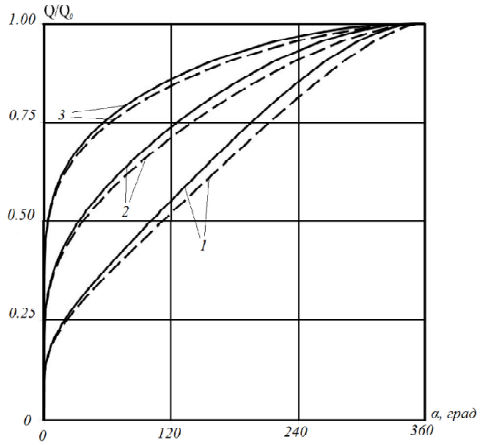

Рис. 2. Зависимости нормированного дебита скважины от угла α в точном (сплошные линии) и приближённом (пунктирные линии) по методу СВП решениях. Все кривые выходят из точки (0, 0) и оканчиваются точкой (360°, 1). Номерами 1, 2, 3 обозначены кривые, соответствующие отношениям R/r_c радиуса контура питания и скважины соответственно равным 5, 50, 5000

Замечание. Для повышения точности решения по методу СВП краевые условия (4) и (5) можно заменить на одно краевое условие Неймана $\left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{r=R} = f(\theta)$, в котором $f(\theta)$ некоторая подлежащая определению функция. Её можем моделировать, например, в виде тригонометрического многочлена с неопределёнными коэффициентами g_k. Для отыскания неопределённых коэффициентов можно применить метод коллокации. Для этого выбираем систему точек θ_j, $j = 1 \div N$ на дуге $0 \le \theta \le \alpha$ контура питания и по граничному условию (3) составляем переопределённую систему $\varphi(R, \theta_j) = \frac{k \cdot P_k}{\mu}$, $j = 1 \div N$ линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов g_k. Решая последнюю, например, методом наименьших квадратов, найдём все коэффициенты g_k. После этого вычисляем дебит и распределение давления. Фактически получим точное решение задачи. Метод СВП представляет частный случай, когда $f(\theta)$ – периодическая кусочно-постоянная функция.

2. Расчёт фильтрации в локальном участке нефтеносного коллектора при шахматно-рядном распределении батарей нагнетательных и добывающих скважин

Приведём следующий пример применения метода СВП. Рассчитаем параметры (распределение давления и расходы) фильтрационных потоков при эксплуатации большого по длине и ширине нефтяного месторождения чередующимися батареями нагнетательных и эксплуатационных скважин, расположенных в шахматно-рядном порядке (рис. 3).

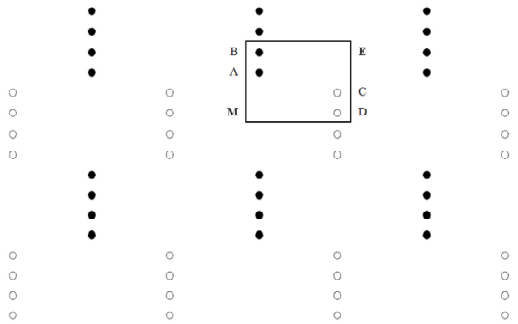

Рис. 3. Шахматно-рядное распределение батарей нагнетательных • и добывающих ∘ скважин и повторяющийся локальный прямоугольный участок $MABECD$ нефтеносного коллектора

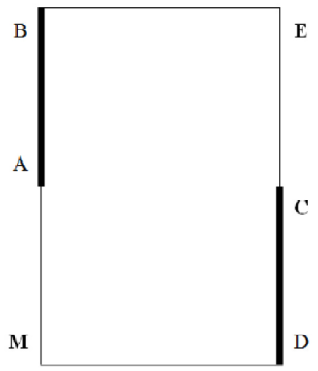

Рис. 4. Схематизация повторяющегося локального прямоугольного участка $MABECD$ нефтеносного коллектора

Будем рассматривать случай, когда шаг сетки скважин намного меньше как размеров месторождения, так и длин батарей скважин. Это позволит в фильтрационных расчётах применить схематизацию, представленную на рис. 4, когда батареи скважин рассматриваются как галереи.

Приближённое решение данной задачи снова строим методом СВП. В декартовых координатах уравнение для линейного режима плоскопараллельной фильтрации несжимаемой жидкости сводится к уравнению Лапласа [1] относительно приведённого давления $P(x,y) = p + \rho \cdot r \cdot z$; ось z направлена вертикально вверх; нивелировочная плоскость $z = 0$ совмещается с подошвой горизонтального плоскопараллельного нефтеносного коллектора, имеющего толщину h.

Граничные условия в точной постановке задачи: $\left.\frac{\partial P}{\partial y}\right|_{y=0} = \left.\frac{\partial P}{\partial y}\right|_{y=L} = 0$, где L – длина сторон BM и ED локального прямоугольного участка; $\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{\substack{AM\\(x=0)}} = \left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{\substack{EC\\(x=T)}}$, где T – длина сторон BE и MD локального прямоугольного участка; $\left.P\right|_{\substack{AB\\(x=0)}} = \Delta P$; $\left.P\right|_{\substack{CD\\(x=T)}} = 0$, где $\Delta P = const$ – перепад давлений между батареями AB и CD .

В приближённой по методу СВП постановке задачи точные краевые условия на границах нагнетательных и добывающих галерей AB и CD заменяются приближёнными $\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{\substack{AB\\(x=0)}} = -\frac{\mu \cdot Q}{l_1 \cdot k \cdot h}$ и $\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{\substack{CD\\(x=T)}} = -\frac{\mu \cdot Q}{l_2 \cdot k \cdot h}$ соответственно. Здесь Q – некоторая пока неизвестная постоянная с размерностью м$^3/c$, подлежащая определению и равная полному по толщине пласта фильтрационному потоку внутри локального прямоугольного участка $MADECD$ от батареи AB к батарее CD. Величины l_1 и l_2 определяются длинами отрезков AB и CD. Естественно, l_1 и l_2 удовлетворяют неравенствами $l_{\leq} L$ и $l_2 \leq L$.

Решая уравнение Лапласа классическим методом Фурье, для функции $P(x,y)$ получаем выражение

$$P(x,y) = \alpha \cdot x + \beta + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot n \cdot y}{L}\right), \tag{20}$$

где

$$f_n(x) = C_{1n} \cdot \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{\pi \cdot n \cdot x}{L}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{\pi \cdot n \cdot T}{L}\right)} + C_{2n} \cdot \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{\pi \cdot n \cdot (T-x)}{L}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{\pi \cdot n \cdot T}{L}\right)}, \tag{21}$$

а α, β, C_{1n} и C_{2n} – пока произвольные постоянные. Подчеркнём, что построенный тригонометрический ряд (20) удовлетворяет граничным условиям на сторонах MD и BE.

Для определения произвольных постоянных вычислим производную $\frac{\partial P}{\partial x}$ на сторонах MB и ED локального прямоугольного участка $MABECD$:

$$\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{\substack{MB\\(x=0)}} = \alpha + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{\pi\cdot n}{L\cdot \operatorname{sh}\left(\frac{\pi\cdot n\cdot T}{L}\right)}\right]\cdot\left[C_{1n} - C_{2n}\cdot \operatorname{ch}\left(\frac{\pi\cdot n\cdot T}{L}\right)\right]\right\}\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot n\cdot y}{L}\right), \quad (22)$$

$$\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{\substack{ED\\(x=T)}} = \alpha + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{\pi\cdot n}{L\cdot \operatorname{sh}\left(\frac{\pi\cdot n\cdot T}{L}\right)}\right]\cdot\left[C_{1n}\cdot \operatorname{ch}\left(\frac{\pi\cdot n\cdot T}{L}\right) - C_{2n}\right]\right\}\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot n\cdot y}{L}\right), \quad (23)$$

С другой стороны, в постановке задачи по методу СВП граничные условия на сторонах MB и ED имеют вид:

$$\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{\substack{MB\\(x=0)}} = \varphi_1(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \le y \le (L - l_1) \\ -\frac{\mu\cdot Q}{l_1\cdot k\cdot h}, & \text{если } (L - l_1) < y \le L \end{cases} \quad (24)$$

$$\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{\substack{ED\\(x=T)}} = \varphi_2(y) = \begin{cases} -\frac{\mu\cdot Q}{l_2\cdot k\cdot h}, & \text{если } 0 \le y \le l_2 \\ 0, & \text{если } l_2 < y \le L \end{cases}. \quad (25)$$

Раскладывая далее в ряды Фурье функции $\varphi_1(y)$ и $\varphi_2(y)$ на отрезке $0 \le y \le L$ по системе $\cos\left(\frac{\pi\cdot n\cdot y}{L}\right)$ и сравнивая разложения с рядами (22) и (23), относительно произвольных постоянных α, C_{1n} и C_{2n} получаем систему линейных алгебраических уравнений. Решая эту систему уравнений, находим, что

$$C_{1n} = \frac{2\cdot\alpha\cdot L}{\pi\cdot n\cdot \operatorname{sh}\left(\frac{\pi\cdot n\cdot T}{L}\right)} \times \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi\cdot n\cdot l_2}{L}\right)}{\left(\frac{\pi\cdot n\cdot l_2}{L}\right)}\cdot \operatorname{ch}\left(\frac{\pi\cdot n\cdot T}{L}\right) + (-1)^{n+1}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi\cdot n\cdot l_1}{L}\right)}{\left(\frac{\pi\cdot n\cdot l_1}{L}\right)}\right], \quad (26)$$

и

$$C_{2n} = \frac{2\cdot\alpha\cdot L}{\pi\cdot n\cdot \operatorname{sh}\left(\frac{\pi\cdot n\cdot T}{L}\right)} \times \left[(-1)^{n+1}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi\cdot n\cdot l_1}{L}\right)}{\left(\frac{\pi\cdot n\cdot l_1}{L}\right)}\cdot \operatorname{ch}\left(\frac{\pi\cdot n\cdot T}{L}\right) + \frac{\sin\left(\frac{\pi\cdot n\cdot l_2}{L}\right)}{\left(\frac{\pi\cdot n\cdot l_2}{L}\right)}\right], \quad (27)$$

где $\alpha = -\frac{\mu\cdot Q}{k\cdot h\cdot L}$.

Как видно из (26) и (27), все коэффициенты C_{1n} и C_{2n} выражаются через одну неизвестную величину α (или, что одно и то же, Q). Таким образом, для окончательного решения задачи остается вычислить две оставшиеся неизвестные — коэффициенты α и β. Их расчёт выполним, возвращаясь к исходным граничным условиям на границах нагнетательных и добывающих галерей AB и CD. Потребуем, чтобы точные граничные условия удовлетворялись в среднем. Для этого потребуем выполнения равенств

$$\frac{1}{l_1}\cdot\int_{L-l_1}^{L} P(0,y)dy = \Delta P \ \text{ и } \ \frac{1}{l_2}\cdot\int_{0}^{l_2} P(T,y)dy = 0. \quad (28)$$

Из уравнений (28) для коэффициентов α и β найдём следующие значения:

$$\alpha\cdot T = \frac{\Delta P}{2\cdot(R_1 - R_2) - 1} \ \text{ и } \ \beta = -\frac{\Delta P\cdot(2\cdot R_2 + 1)}{2\cdot(R_1 - R_2) - 1}, \quad (29)$$

где

$$R_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\left(\frac{\pi \cdot n \cdot T}{L}\right) \cdot \mathrm{sh}\left(\frac{\pi \cdot n \cdot T}{L}\right)} \quad \text{и} \quad R_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\left(\frac{\pi \cdot n \cdot T}{L}\right) \cdot \mathrm{sh}\left(\frac{\pi \cdot n \cdot T}{L}\right)}, \tag{30}$$

а коэффициенты a_n и b_n равны

$$a_n = \frac{\sin^2\left(\frac{\pi \cdot n \cdot l_2}{L}\right)}{\left(\frac{\pi \cdot n \cdot l_2}{L}\right)^2} \cdot \mathrm{ch}\left(\frac{\pi \cdot n \cdot T}{L}\right) + (-1)^{n+1} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi \cdot n \cdot l_1}{L}\right)}{\left(\frac{\pi \cdot n \cdot l_1}{L}\right)} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi \cdot n \cdot l_2}{L}\right)}{\left(\frac{\pi \cdot n \cdot l_2}{L}\right)}, \tag{31}$$

и

$$b_n = \frac{\sin^2\left(\frac{\pi \cdot n \cdot l_1}{L}\right)}{\left(\frac{\pi \cdot n \cdot l_1}{L}\right)^2} \cdot \mathrm{ch}\left(\frac{\pi \cdot n \cdot T}{L}\right) + (-1)^{n} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi \cdot n \cdot l_1}{L}\right)}{\left(\frac{\pi \cdot n \cdot l_1}{L}\right)} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi \cdot n \cdot l_2}{L}\right)}{\left(\frac{\pi \cdot n \cdot l_2}{L}\right)}, \tag{32}$$

.

Для расчёта полного по толщине пласта фильтрационного потока внутри локального прямоугольного участка $MABEC$ от батареи AB к батарее CD используем связь коэффициентов α и Q. В результате получаем формулу

$$Q = \frac{k \cdot h \cdot L \cdot \Delta P}{\mu \cdot T \cdot [1 - 2(R_1 - R_2)]}. \tag{33}$$

В частном случае, когда длины батарей AB и CD равны длине L сторон MB и ED, для полного по толщине пласта фильтрационного потока получаем значение Q_0, равное

$$Q_0 = \frac{k \cdot h \cdot L \cdot \Delta P}{\mu \cdot T}, \tag{34}$$

что соответствует формуле для расчёта потока поступательного течения. Если составить отношение потоков Q и Q_0, то получим удобную для практического анализа формулу для оценки влияния длин батарей AB, CD и их взаимного расположения на величину полного фильтрационного потока:

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{1}{1 - 2 \cdot (R_1 - R_2)}. \tag{35}$$

Точное решение краевой задачи на рис. 4 в терминах электростатики приведено в [3]. По результатам сравнения точного [3] и приближенного (33) решений получены относительные погрешности расчёта полного фильтрационного потока по методу СВП. Результаты расчётов представлены в таблице, из которой видно, что погрешность расчётов существенно зависит от длин батарей нагнетательных и добывающих скважин. Чем ближе отношения l_1/L и l_2/L к единице, т. е. чем точнее выполняется условие равномерного распределения нормальной составляющей скорости фильтрации вдоль галерей MB и ED, тем точнее расчёты по методу СВП. Когда длины галерей MB и ED малы, l_1/L и l_2/L принимают значения менее 0,5, погрешности расчётов по СВП заметно возрастают. Для повышения точности фильтрационных расчётов в этих случаях следует воспользоваться замечанием, приведённым в примере 1.

Таблица 1

Относительные дольные погрешности расчёта полного фильтрационного потока по методу СВП в примере 2

Отношение $T/L = 2$												
l_1/L	Отношение l_2/L											
	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	070	0,75	0,80	085	0,90	0,95	1,00
0,70	0,07	0,05	0,02	0,10	0,09	0,07	0,06	0,05	0,04	0,04	0,04	0,04
0,75	0,06	0,03	0,01	0,09	0,07	0,06	0,05	0,04	0,03	0,03	0,03	0,02
0,80	0,05	0,02	0,00	0,01	0,06	0,05	0,04	0,03	0,02	0,02	0,02	0,02
0,85	0,05	0,02	0,00	0,02	0,03	0,04	0,03	0,02	0,02	0,01	0,01	0,01
0,90	0,06	0,01	0,01	0,02	0,04	0,04	0,03	0,02	0,01	0,01	0,00	0,00
0,95	0,06	0,01	0,01	0,03	0,04	0,04	0,03	0,02	0,01	0,00	0,00	0,00
1,00	0,06	0,01	0,01	0,03	0,04	0,04	0,02	0,02	0,01	0,00	0,00	0,00
Отношение $T/L = 1$												
l_1/L	Отношение l_2/L											
	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
0,75	0,03	0,06	0,03	0,08	0,05	0,12	0,10	0,09	0,06	0,06	0,05	0,05
0,80	0,01	0,04	0,00	0,07	0,03	0,01	0,09	0,06	0,05	0,04	0,03	0,03
0,85	0,00	0,05	0,01	0,05	0,02	0,01	0,06	0,05	0,03	0,03	0,02	0,02
0,90	0,01	0,05	0,02	0,05	0,01	0,01	0,03	0,04	0,03	0,02	0,01	0,01
0,95	0,01	0,06	0,02	0,06	0,00	0,02	0,04	0,03	0,02	0,01	0,00	0,00
1,00	0,01	0,06	0,02	0,06	0,00	0,02	0,04	0,03	0,02	0,01	0,00	0,00
Отношение $T/L = 0,5$												
l_1/L	Отношение l_2/L											
	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
0,80	0,08	0,05	0,11	0,04	0,01	0,01	0,07	0,03	0,10	0,07	0,06	0,07
0,85	0,11	0,09	0,09	0,06	0,04	0,01	0,06	0,00	0,07	0,05	0,04	0,03
0,90	0,14	0,10	0,07	0,09	0,06	0,03	0,08	0,02	0,04	0,03	0,02	0,02
0,95	0,11	0,11	0,11	0,10	0,07	0,05	0,09	0,03	0,05	0,02	0,01	0,01
1,00	0,11	0,13	0,11	0,11	0,08	0,06	0,09	0,03	0,06	0,02	0,01	0,00

3. Расчёт дебитов несовершенных по степени вскрытия пласта скважин методом СВП

Отметим ещё один важный класс задач, в которых средствами СВП можно получить удобные с точки зрения практического применения формулы для оценок дебитов несовершенных по степени вскрытия пласта скважин (см. рис. 5).

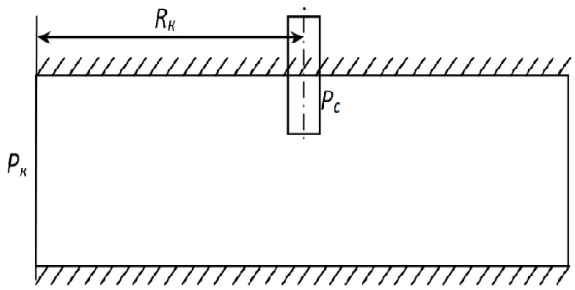

Рис. 5. Вертикальное сечение несовершенной по степени вскрытия пласта скважины

Линейная фильтрация несжимаемой жидкости к несовершенной скважине, частично вскрывшей плоскопараллельный пласт с непроницаемыми подошвой и кровлей, носит осесимметричный характер. Поэтому краевую задачу для уравнения Лапласа линейного режима фильтрации несжимаемой жидкости (нефти) решаем в цилиндрических координатах r, z с осью z, направленной вверх по оси симметрии скважины. Граничные условия, с которыми

следует интегрировать осесимметричное относительно функции $\varphi(r,z) = -\frac{k \cdot P(r,z)}{\mu}$ уравнение Лапласа в точной постановке задачи таковы: граничное условие на поверхности ствола скважины $r = r_c$ носит смешанный характер. На перфорированной части $h - b \leq z \leq h$ поверхности скважины, вскрывшей пласт с толщиной h на глубину b и примыкающей к кровле пласта, задаются условия Дирихле

$$\varphi\Big|_{\substack{r=r_c \\ h-b\leq z\leq h}} = \varphi_3 = -\frac{k \cdot P_3}{\mu}, \tag{36}$$

а на неперфорированной части $(0 \leq z \leq h - b)$ — условия Неймана:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r}\Big|_{\substack{r=r_c \\ 0\leq z<h-b}} = 0. \tag{37}$$

Граничные условия на подошве пласта $z = 0$ и кровле $z = h$ имеют вид

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}\Big|_{z=0} = \frac{\partial\varphi}{\partial z}\Big|_{z=h} 0, \tag{38}$$

а на круговой цилиндрической поверхности питания – вид

$$\varphi\Big|_{r=R} = \varphi_k = -\frac{k \cdot P_k}{\mu}. \tag{39}$$

Решение краевой задачи для осесимметричного уравнения Лапласа с однородными граничными условиями (41) строим методом Фурье:

$$\varphi(r,z) = A_0 + A_1 \cdot \ln\left(\frac{r}{r_c}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} F_n(r) \cdot \cos(\lambda_n z), \tag{40}$$

где $\lambda_n = \frac{\pi \cdot n}{h}$, $n = 1, 2, 3, ..., A_0$, и A_1 – произвольные постоянные. Функции $F_n(r)$ в формуле (40) представляют линейные комбинации функций Бесселя $K_0(\lambda_n r)$ и $I_0(\lambda_n r)$ мнимого аргумента. Учитывая граничное условие (39), для функций получаем следующее представление:

$$F_n(r) = D_n \cdot f_n(r), \text{ где } f_n(r) = \begin{vmatrix} K_0(\lambda_n r) & I_0(\lambda_n r) \\ K_0(\lambda_n R) & I_0(\lambda_n R) \end{vmatrix}, \tag{41}$$

а D_n – произвольные постоянные. Граничное условие (39) сводится к виду

$$A_0 + A_1 \cdot \ln\left(\frac{R}{r_c}\right) = \varphi_k. \tag{42}$$

Для отыскания произвольных постоянных D_n условия (36) и (37) на поверхности ствола скважины $r = r_c$ запишем в виде одного условия типа Неймана

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r}\Big|_{r=r_c} = g(z) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq z \leq h - b \\ \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot r_c \cdot b}, & \text{если } h - b < z \leq h \end{cases}, \tag{43}$$

где Q – искомый дебит несовершенной скважины. Вычисляя от суммы ряда (40) в предположении правомочности почленного дифференцирования производную $\frac{\partial\varphi}{\partial r}$, получаем с учетом формул $K_0'(\lambda_n r) = -\lambda_n \cdot K_1(\lambda_n r)$ и $I_0'(\lambda_n r) = \lambda_n \cdot I_1(\lambda_n r)$ следующее выражение

$$\frac{\partial\varphi(r,z)}{\partial r} = \frac{A_1}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cdot f_n'(r) \cdot \cos(\lambda_n, z), \tag{44}$$

где

$$f_n'(r)\begin{vmatrix} -\lambda_n\cdot K_1(\lambda_n r) & \lambda_n\cdot I_1(\lambda_n r) \\ K_0(\lambda_n R) & I_0(\lambda_n R)\end{vmatrix} = \lambda_n\cdot\begin{vmatrix} -K_1(\lambda_n r) & I_1(\lambda_n r) \\ K_0(\lambda_n R) & I_0(\lambda_n R)\end{vmatrix}. \quad (45)$$

Теперь на основании формул (43) и (44) приходим к следующему представлению граничного условия на поверхности ствола несовершенной скважины:

$$\frac{A_1}{r_c} + \sum_{n=1}^{\infty} D_n\cdot f_n'(r_c)\cdot\cos(\lambda_n z) = g(z). \quad (46)$$

Раскладывая функцию $g(z)4$ на отрезке $0 \le z \le h$ в ряд Фурье по системе $\cos(\lambda_n z)$, получим следующие выражения для искомых коэффициентов:

$$A_1 = \frac{Q}{2\cdot\pi\cdot h};\ D_n = -\frac{Q}{\pi\cdot r_c\cdot b}\cdot\frac{\sin\left[\lambda_n\cdot(h-b)\right]}{h\cdot\lambda_n\cdot f_n'(r_c)}. \quad (47)$$

Для окончательного решения задачи остаётся вычислить две оставшиеся неизвестные — коэффициенты A_0 и Q. Их расчёт выполним, возвращаясь к исходному граничному условию (36) на поверхности ствола скважины, вскрывшей пласт на глубину b. Потребуем, чтобы точные граничные условия (36) удовлетворялись в среднем:

$$\frac{1}{b}\cdot\int\limits_{h-b}^{h}\varphi(r_c,z)dz = \varphi_з. \quad (48)$$

Из равенства (48) после ряда тождественных преобразований находим следующее уравнение:

$$A_0 + \frac{Q}{\pi\cdot r_c\cdot b^2\cdot h}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n(r_c)\cdot\sin^2\left[\lambda_n\cdot(h-b)\right]}{\lambda_n^2\cdot f_n'(r_c)} = \varphi_з. \quad (49)$$

Теперь из формул (42), (47) и (49) находим дебит несовершенной по степени вскрытия пласта скважины:

$$Q = \frac{2\cdot\pi\cdot k\cdot h\cdot(P_k - P_з)}{\mu\cdot\left[\ln\left(\frac{R}{r_c}\right) + C\right]}, \quad (50)$$

где

$$C = \frac{2\cdot S}{r_c\cdot b^2},\ S = \frac{h^3}{\pi^3}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\zeta_n\cdot\frac{\sin^2\left[\frac{\pi\cdot n\cdot(h-b)}{h}\right]}{n^3}\ \text{и}\ \zeta_n = -\frac{\begin{vmatrix} K_0(\lambda_n r_c) & I_0(\lambda_n r_c) \\ K_0(\lambda_n R) & I_0(\lambda_n R)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -K_1(\lambda_n r_c) & I_1(\lambda_n r_c) \\ K_0(\lambda_n R) & I_0(\lambda_n R)\end{vmatrix}}. \quad (51)$$

Задача о дебите несовершенной по вскрытию пласта скважины впервые рассмотрена Маскетом [6]. Дебит несовершенной скважины по формуле Маскета [6] равен

$$Q_M = \frac{2\cdot\pi\cdot k\cdot h\cdot(P_k - P_з)}{\mu\left\{\frac{1}{2\overline{h}}\cdot\left[2\ln\frac{4h}{r_c} - \varphi(\overline{h})\right] + \ln\frac{R}{4h}\right\}}, \quad (52)$$

где

$$\varphi(\overline{h}) = \ln\frac{\Gamma(0,125\overline{h})\cdot\Gamma(0,875\overline{h})}{\Gamma(1-0,125\overline{h})\cdot\Gamma(1-0,875\overline{h})},\ \text{а}\ \overline{h} = \frac{b}{h}. \quad (53)$$

Буквой Γ обозначена гамма-функция, определяемая интегралом Эйлера $\Gamma(x) = \int\limits_0^{\infty} t^{x-1}\times$ $\times\, e^{-1}\cdot dt$. Для расчёта значений $\Gamma(x)$ для аргументов $0 \le x \le 1$ существуют высокоточные аппроксимации многочленами.

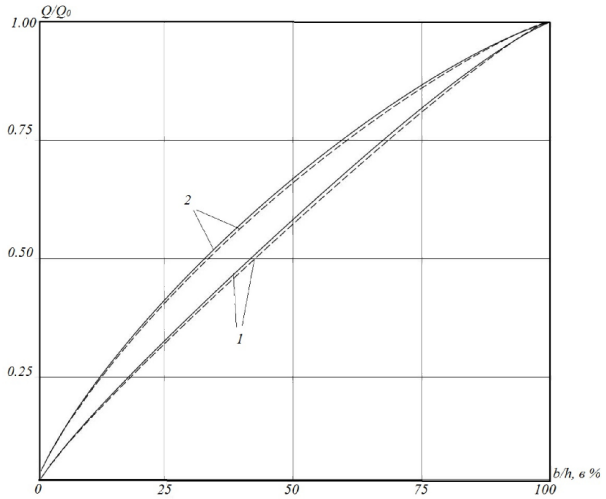

Рис. 6. Зависимость приведённого дебита несовершенной скважины от степени вскрытия пласта b/h. Сплошной линией показаны расчёты по формуле Маскета, штриховой по методу СВП. Кривые 1 и 2 рассчитаны для значений $R/r_c = 500$ и $R/r_c = 8000$ соответственно.

Вычислительные эксперименты, результаты которых приведены на рис. 6, подтвердили высокую точность расчётов по методу СВП. Совпадение результатов по методу СВП и по формуле Маскета удовлетворительное во всём диапазоне изменения степени вскрытия пласта b/h. Достоинство метода СВП в более простых при выводе формулы дебита скважины математических выкладках, нежели выкладках в методе Маскета.

Заключение. Представленные примеры показали, что с достаточной практической точностью приближённое решение нефтегазовых задач, сводящихся к краевым задачам для уравнения Лапласа со смешанными граничными условиями Дирихле и Неймана на некоторой границе L, можно построить, переходя к упрощённым модельным задачам. В модельных задачах условия Дирихле вдоль участка границы L заменяются условиями Неймана с неопределёнными параметрами. Эти неопределённые параметры подбираются из требования, чтобы первоначально заданные условия Дирихле вдоль соответствующего участка границы L выполнялись в среднеарифметическом приближении. Рекомендации [4] применять в задачах со смешанными на границе L граничными условиями уменьшенное контурное давление, получающееся в результате перераспределения заданной лишь на части границы L величины давления на всю длину L, принципиально не верны.

Представленные в статье примеры применения метода СВП к решению конкретных задач позволят студентам и аспирантам широкого круга физико-математических и технических специальностей вырабатывать и совершенствовать навыки построения ориентированных на практику математических моделей, а преподавателям ставить в учебном процессе перед учащимися целый ряд содержательных творческих задач учебно-исследовательского характера. Например, исследовать пропускную способность различных скважинных фильтров (перфорационных, вертикально-щелевых, горизонтально-щелевых) от конструктивных параметров фильтров. Исследовать зависимости дебитов несовершенных скважин от положения зоны вскрытия пласта (около кровли, ближе к середине или к подошве пласта, либо несколькими участками перфорации эксплуатационной колонны), влияния на скважинный приток трещин гидроразрыва пласта и целый ряд других задач.

Список литературы

1. Басниев К. С., Дмитриев Н. М., Розенберг Г. Д. Нефтегазовая гидромеханика. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. 544 с.

2. Толпаев В. А., Петухов А. А., Захаров В. В. Математические модели работы скважинных фильтров // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2004. № 3. С. 45–48.

3. Толпаев В. А., Шахнабатова Л.Б., Крымин Л. Г. Об аппроксимации в электротехнических расчётах мелкослойчатых сред анизотропными // Известия вузов. Электромеханика. 1985. № 11. С. 23–32.

4. Евдокимова В. А., Кочина И. Н. Сборник задач по подземной гидравлике. М.: Альянс, 2007. 168 с.

5. Иоссель Ю. Я., Кочанов Э. С., Струнский М. Г. Расчёт электрической ёмкости. Л.: Энергоиздат. Ленингр. отделение, 1981. 288 с.

6. Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде. М.; Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2004. 640 с.

References

1. Basniev K. S., Dmitriev N. M., Rozenberg G. D. Neftegazovaya gidromekhanika. – Moskva-Izhevsk: Institut komp'yuternykh issledovanii, 2005. 544 s.

2. Tolpaev V. A., Petukhov A. A., Zakharov V. V. Matematicheskie modeli raboty skvazhinnykh fil'trov // Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskii region. Estestvennye nauki. 2004. № 3. S. 45–48.

3. Tolpaev V. A., Shakhnabatova L.B., Krymin L. G. Ob approksimatsii v elektrotekhnicheskikh raschetakh melkosloichatykh sred anizotropnymi // Izvestiya vuzov. Elektromekhanika. 1985. № 11. S. 23–32.

4. Evdokimova V. A., Kochina I. N. Sbornik zadach po podzemnoi gidravlike. M.: Al'yans, 2007. 168 s.

5. Iossel' Yu. Ya., Kochanov E. S., Strunskii M. G. Raschet elektricheskoi emkosti. L.: Energoizdat. Leningr. otdelenie, 1981. 288 s.

6. Masket M. Techenie odnorodnykh zhidkostei v poristoi srede. M.; Izhevsk: Institut komp'yuternykh issledovanii, 2004. 640 s.

Статья поступила в редакцию 13.04.2015