УДК 532.546
ББК 22.253

Галина Михайловна Яковлева,
старший преподаватель,
Забайкальский государственный университет,
672039, Россия, г. Чита, ул.Александро-Заводская, 30,
e-mail: y.g.m@mail.ru

О динамических процессах в плоских областях с плёночным включением[1]

Рассмотрена задача о построении потенциалов установившихся процессов (теплопроводности, фильтрации жидкости, диффузии) на кусочно-однородной плоскости с плёночным включением в виде бесконечно тонкого сильно- или слабопроницаемого слоя. Процесс индуцируется заданными особыми точками (источниками, стоками и т. д.). Потенциалы выражены в квадратурах через гармонические функции с сохранением типа их особых точек. Показано, что полученные формулы выражают также решения краевых задач в полуплоскости и полосе с плёночным включением через решения аналогичных классических задач без плёнки.

Ключевые слова: особые точки потенциалов, краевые задачи, кусочно-однородные области, сильно проницаемая плёнка, слабопроницаемая плёнка, дебит скважины.

Galina Mikhaylovna Yakovleva,
Senior Lecturer,
Transbaikal State University,
30, Aleksandro-Zavodskaya St., Chita, Russia, 672039,
e-mail: y.g.m@mail.ru

Dynamical Processes in Flat Areas with Film Inclusion[2]

The task of constructing a potential steady-state processes (heat conduction, fluid filtration, diffusion) on piecewise homogeneous plane with the film including in the form of thin strongly or weakly permeable layer is considered. Process is induced with the given singular points (sources, sinks, etc.). The potentials are expressed in quadratures in terms of harmonic functions with preservation of the type of singular points. It is shown that these formulas also express solving of boundary value problems in a half-plane and strip with the film including through the solution of the classic similar problems without the film.

Keywords: singular points of potential, boundary value problems, piecewise homogeneous areas, strongly permeable film, weakly permeable film.

1. Введение. В настоящее время всё более широкие приложения находят композитные материалы, содержащие наноразмерные плёночные включения. В теории фильтрации для управления потоками используются линейные дренажи и экраны, в диффузии применяются

[1] Работа выполнена в рамках Государственного задания вузу Министерства образования и науки Российской Федерации (проект 2014/255 НИР 2603.14).

[2] The work was performed as part of the State of the university Ministry of Education and Science of the Russian Federation (project 2014/255 Study 2603.14).

мембраны и т. д. Отсюда имеет большой интерес теоретическое исследование динамических процессов в кусочно-однородных средах с плёночными включениями.

В статье рассматриваются сильно- и слабопроницаемые плёнки, которые, как и в работах [1]–[3], моделируются бесконечно тонкими слоями с бесконечно большой и соответственно бесконечно малой проницаемостью. В указанных работах решаются краевые задачи с обобщёнными условиями сопряжения на плёнках.

В статье предложен новый подход к решению краевых задач с плёнками: сначала плёнка заменяется слоем конечной толщины и проницаемости и решается соответствующая задача без плёнки, а затем в полученном решении указанный слой вырождается в сильно- или слабопроницаемую плёнку. Это позволяет определять параметры течения в самой плёнке. Кроме того, показано, что полученные решения удовлетворяют известным обобщённым условиям сопряжения на плёнках без дополнительных гипотез, которые постулируются при выводе указанных условий сопряжения на плёнках [4; 5].

2. Решение вспомогательной задачи без плёнки. Рассмотрим установившийся динамический процесс (фильтрации жидкости, теплопроводности, диффузии) на кусочно-однородной плоскости, состоящей из трех зон $D_1(x<0)$, $D_0(0<x<l)$, $D_2(x>l)$, $-\infty<y<\infty$ с различной постоянной проницаемостью соответственно k_1, k_0, k_2, где x, y – декартовы координаты. Пусть процесс индуцируется заданными особыми точками потенциала (источниками, стоками и т. д.), расположенными в зоне $D_1(x<0)$. При этом предположим, что известна гармоническая на плоскости (x, y) функция $f(x, y)$, которая имеет указанные особые точки при $x<0$. Функция $f(x, y)$ является потенциалом рассматриваемого процесса на однородной плоскости без плёнки. Например, для источника в точке (x_0, y_0), $x_0<0$ имеем

$$f(x,y)=q\ln[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]. \tag{1}$$

Для функций (потенциалов) $u_i(x,y)$ в соответствующих зонах D_i вне особых точек задача имеет вид

$$\Delta u_i=0, \qquad (x,y)\in D_i, \tag{2}$$

$$x=0: \qquad u_1=u_0, \qquad k_1\partial_x u_1=k_0\partial_x u_0, \tag{3}$$

$$x=l: \qquad u_0=u_2, \qquad k_0\partial_x u_0=k_2\partial_x u_2, \tag{4}$$

где функция $u_1(x,y)$ в окрестности особых точек удовлетворяет условию

$$u_1\sim f(x,y), \tag{5}$$

т. е. функция $u_1(x,y)$ имеет особые точки заданной гармонической функции $f(x,y)$, здесь $\partial_x^n=\partial^n/\partial x^n$, Δu – оператор Лапласа.

Выразим решение $u_i(x,y)$ задачи (2)–(5) через гармоническую функцию $f(x,y)$. Для вывода общих формул в качестве промежуточного метода применяем метод Фурье. Предположим сначала, что функция $f(0,y)$ разлагается в интеграл Фурье с коэффициентами Фурье $f_i(\lambda)$ [6, с. 529]:

$$f(0,y)=\int\limits_0^\infty g(y,\lambda)\,d\lambda,\qquad g(y,\lambda)=f_1(\lambda)\sin\lambda y+f_2(\lambda)\cos\lambda y, \tag{6}$$

где

$$\left(\begin{array}{c} f_1(\lambda)\\ f_2(\lambda)\end{array}\right)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(0,y)\left(\begin{array}{c}\sin\lambda y\\ \cos\lambda y\end{array}\right)dy, \tag{7}$$

при этом $f(0,y)\to 0$ при $|y|\to\infty$. Данное ограничение сужает класс особых точек функции $f(x,y)$, в частности фундаментальное решение (1) не удовлетворяет условию (6). В доказанной ниже теореме класс функций $f(x,y)$ существенно расширен.

Из разложения (6) следует, что функция $f(x,y)$ в полуплоскости $x>0$ (где она удовлетворяет уравнению Лапласа) имеет вид

$$f(x,y)=\int\limits_0^\infty e^{-\lambda x}g(y,\lambda)\,d\lambda,\qquad x>0. \tag{8}$$

Здесь учитываем, что функция $f(x,y)$ при $x>0$ является ограниченным решением задачи Дирихле в полуплоскости вида: $\Delta u=0$, $x>0$, $u_{|x=0}=f(0,y)$, полученным методом Фурье.

Представим решение исходной задачи (2)–(5) также в виде разложений Фурье:

$$u_1(x,y)=f(x,y)+\int\limits_0^\infty b_1e^{\lambda x}g\,d\lambda,\qquad x<0, \tag{9}$$

$$u_0(x,y)=\int\limits_0^\infty [a_0\operatorname{sh}\lambda(x-l)+b_0\operatorname{ch}\lambda(x-l)]g\,d\lambda,\qquad 0<x<l, \tag{10}$$

$$u_2(x,y)=\int\limits_0^\infty b_2e^{-\lambda(x-l)}g\,d\lambda,\qquad x>l, \tag{11}$$

где функция $g(y,\lambda)$ имеет вид (6), $a_0(\lambda)$, $b_i(\lambda)$ – искомые функции. При этом функции u_i удовлетворяют соответствующему уравнению (2) и условию (5) (в предположении сходимости и дифференцируемости интегралов (9)–(11)). Приравнивая в условиях сопряжения (3), (4) коэффициенты при функции $g(y,\lambda)$ под знаками интегралов (9)–(11), для функций $a_0(\lambda)$, $b_i(\lambda)$ с учётом разложения (8) получим систему алгебраических уравнений: $1+b_1=-a_0s+b_0c$, $-k_1(1-b_1)=k_0(a_0c-b_0s)$, $b_0=b_2$, $k_0a_0=-k_2b_2$, решение которой имеет вид

$$b_1=-1+\frac{2k_1(k_2s+k_0c)}{p}=1-\frac{2k_0(k_0s+k_2c)}{p}, \tag{12}$$

$$a_0 = -\frac{2k_1 k_2}{p}, \qquad b_2 = b_0 = \frac{2k_1 k_0}{p}, \tag{13}$$

где $p = s(k_1 k_2 + k_0^2) + ck_0(k_1 + k_2)$, $s = \operatorname{sh}\lambda l$, $c = \operatorname{ch}\lambda l$. При этом $p \geq k_0(k_1 + k_2) > 0$ при $0 \leq \lambda < \infty$, т. е. в интегралах (9)–(11) $\lambda = 0$ не является особой точкой. При $\lambda \to \infty$ имеем $p = O(e^{\lambda l})$; $b_1 = O(1)$; $a_0, b_0, b_2 = O(e^{-\lambda l})$. Отсюда коэффициенты при функции $g(y,\lambda)$ под знаками интегралов (9)–(11) имеют асимптотику $O(e^{-\lambda x})$, где $x > 0$, при этом функция g (6) так же стремится к нулю при $\lambda \to \infty$, т. к. $f_i \to 0$ (7). Отсюда интегралы (9)–(11) сходятся и допускают дифференцирование дважды по x, y.

Таким образом, полученные формулы (9)–(11) выражают решение задачи на кусочно-однородной плоскости через решение $f(x,y)$ аналогичной задачи на однородной плоскости для класса функций $f(x,y)$, разлагающихся при $x = 0$ в интеграл Фурье.

3. Сильнопроницаемая плёнка. Пусть средний слой $D_0(0 < x < l)$ толщины l и проницаемости k_0 вырождается в сильнопроницаемую плёнку с параметром A [1], т. е.

$$l \to 0, \qquad k_0 \to \infty, \qquad k_0 l \to A. \tag{14}$$

Отсюда, подставляя выражение для $a_0(\lambda)$, $b_i(\lambda)$ из (12), (13) в (9)-(11) (для $b_1(\lambda)$ используем первое равенство (12)), с учётом разложения (8) получим решение задачи на кусочно-однородной плоскости, состоящей из двух зон $D_1(x < 0)$, $D_2(x > 0)$, разделенных сильно проницаемой плёнкой $x = 0$, в виде

$$u_1(x,y) = f(x,y) - f(-x,y) + \frac{2k_1}{A}\int_0^\infty \frac{e^{\lambda x} g(y,\lambda)}{\lambda + \gamma}\, d\lambda, \qquad x < 0, \tag{15}$$

$$u_2(x,y) = \frac{2k_1}{A}\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda x} g(y,\lambda)}{\lambda + \gamma}\, d\lambda, \qquad x > 0, \qquad \gamma = \frac{k_1 + k_2}{A}, \tag{16}$$

где $g(y,\lambda) = f_1(\lambda)\sin\lambda y + f_2(\lambda)\cos\lambda y$ (6).

По формулам (10), (13) можно найти различные параметры течения в самой плёнке. Так, переходя в формуле (13) к пределу (14), получим потенциал $u_0(y)$ и поток $Q(y)$ в поперечном сечении плёнки:

$$u_0(y) = \frac{2k_1}{A}\int_0^\infty \frac{f_1 \sin\lambda y + f_2 \cos\lambda y}{\lambda + \gamma}\, d\lambda, \tag{17}$$

$$Q(y) = \lim_{k_0 \to \infty,\, l \to 0} k_0 \int_0^l \partial_y u_0(x,y)dx = 2k_1 \int_0^\infty \frac{\lambda(f_1 \cos\lambda y - f_2 \sin\lambda y)}{\lambda + \gamma}\, d\lambda. \tag{18}$$

К недостаткам полученных формул (15), (16) относится достаточно узкий класс заданных особых точек гармонической функции $f(x,y)$ в смысле её поведения в бесконечности. Кроме того, решение, полученное в виде разложений Фурье (15), (16), имеет достаточно сложный вид, т. к. содержит двукратные квадратуры (внешние и внутренние в коэффициентах Фурье $f_i(\lambda)$ (7)) от сильно осциллирующих на бесконечности тригонометрических функций.

Для устранения этих недостатков упростим формулы (15), (16) с помощью метода свертывания разложений Фурье [1]–[3]. Заменяя в разложении функции $f(x,y)$ (8) переменную x на $x+z$, умножая полученное равенство на $e^{-\gamma z}$ и интегрируя по $z \in (0,\infty)$, получим формулу

$$\int\limits_0^\infty e^{-\gamma z} f(x+z,y)\,dz = \int\limits_0^\infty \frac{e^{-\lambda x} g(y,\lambda)}{\lambda+\gamma}\,d\lambda, \qquad x>0, \qquad \gamma>0, \tag{19}$$

где функция $g(y,\lambda)$ имеет вид (6). Отсюда функции $u_{1,2}(x,y)$ (15), (16) непосредственно выражаются через гармоническую функцию $f(x,y)$ в однократных квадратурах без разложений Фурье:

$$u_1(x,y) = f(x,y) - f(-x,y) + \frac{2k_1}{A}\int\limits_0^\infty e^{-\gamma z} f(-x+z,y)\,dz, \qquad x<0, \tag{20}$$

$$u_2(x,y) = \frac{2k_1}{A}\int\limits_0^\infty e^{-\gamma z} f(x+z,y)\,dz, \qquad x>0, \tag{21}$$

где $\gamma>0$ имеет вид (16). Аналогично с учётом формулы (19) потенциал (17) и поток (18) в плёнке приводятся соответственно к виду

$$u_0(y) = \frac{2k_1}{A}\int\limits_0^\infty e^{-\gamma z} f(z,y)\,dz, \qquad Q(y) = 2k_1\int\limits_0^\infty e^{-\gamma z}\partial_y f(z,y)\,dz.$$

Обобщённые условия сопряжения на сильно проницаемой плёнке $x=0$ имеют вид [1]–[3]:

$$x=0: \qquad u_2 = u_1, \qquad k_2\partial_x u_2 - k_1\partial_x u_1 = A\partial_x^2 u_1. \tag{22}$$

В работе [5, с. 106] условия сопряжения (22) на сильнопроницаемой трещине выведены для фильтрационных процессов при дополнительной рабочей гипотезе о постоянстве давления в поперечном сечении трещины.

Рассмотрим задачу (2), (5), (22), где в условии (2) $i=1,2$; $D_1(x<0)$, $D_2(x>0)$.

Теорема. *Если гармоническая функция $f(x,y)$ на плоскости (x,y) имеет особые точки при $x<0$ и удовлетворяет вместе с производными до второго порядка условию*

$$|f(x,y)| = O(e^{\alpha x}), \qquad x\to+\infty, \qquad 0<\alpha<\gamma, \tag{23}$$

($\gamma>0$ (16)), *то решение задачи* (2), (5), (22) *строится по формулам* (20), (21). То есть полученные функции (20), (21) удовлетворяют известным обобщённым условиям сопряжения (22).

Доказательство. При выполнении условия (23) интегралы (20), (21) сходятся и допускают дифференцирование дважды по x и y. Функции (20), (21) тождественно удовлетворяют условиям сопряжения (22), что проверяется непосредственно интегрированием по частям. Аргументы функции $f(x,y)$ в формулах (20), (21), кроме первого слагаемого в формуле (20), принадлежат области $D_2(x>0)$, где функция $f(x,y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа. При этом, если функция $f(x,y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа при $x>0$, то функция $f(-x,y)$ удовлетворяет этому уравнению при $x<0$. Отсюда условия задачи (2), (5) для функций (20), (21) проверяются непосредственно. Теорема доказана.

Из условия (23) следует, что гармоническая функция $f(x,y)$ может иметь произвольные особые точки в любой конечной части полуплоскости $x<0$ и в бесконечности может иметь рост не выше показательной функции (не выше существенно особой точки), т. е. условие (23) выполняется для широкого класса гармонических функций $f(x,y)$, имеющих практический интерес. В частности для фундаментального решения (1) условие (23) выполняется. Кроме того, формулы (20), (21) проще формул (15), (16), полученных методом Фурье, т. к. содержат однократные квадратуры, тогда как формулы (15), (16) содержат двукратные квадратуры.

В предельном случае при $A\to\infty$ ($\gamma\to 0$ (16)) имеем сильно проницаемую плёнку $x=0$ большого раскрытия, при этом из формул (20), (21) получаем $u_1\to f(x,y)-f(-x,y)$, $u_2\to 0$, т. е. плёнка $x=0$ вырождается в абсолютно проницаемую границу области D_1, на которой выполняется граничное условие $u_{1|x=0}=0$.

В случае $A\to 0$ ($\gamma\to\infty$) плёнка исчезает и функции (20), (21) посредством интегрирования по частям приводятся к виду потенциалов без плёнки в кусочно-однородной среде (идеальный контакт зон D_i):

$$u_1(x,y)=f(x,y)+\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}f(-x,y),\qquad u_2(x,y)=\frac{2k_1}{k_1+k_2}f(x,y).$$

Если гармоническая функция $f(x,y)$ имеет особые точки при $x>0$, то решение задачи строится аналогично, а в общем случае при произвольном расположении особых точек решение строится в виде суммы решений указанных задач.

4. Слабопроницаемая плёнка. Пусть в задаче (2)–(5) средний слой $D_0(0<x<l)$ толщины l и проницаемости k_0 вырождается в слабопроницаемую плёнку с параметром B [2], т. е. $l\to 0$, $k_0\to 0$, $l/k_0\to B$. Отсюда, переходя в равенствах (9)–(13) к указанному пределу (для $b_1(\lambda)$ используем второе равенство (12)), с учётом разложения (8) и формулы (19) выразим функции $u_i(x,y)$ непосредственно через гармоническую функцию $f(x,y)$ без разложений Фурье в виде

$$u_1(x,y)=f(x,y)+f(-x,y)-\frac{2}{Bk_1}\int\limits_0^\infty e^{-\gamma z}f(-x+z,y)\,dz,\qquad x<0, \tag{24}$$

$$u_2(x,y)=\frac{2}{Bk_2}\int\limits_0^\infty e^{-\gamma z}f(x+z,y)\,dz,\qquad x>0, \tag{25}$$

где $\gamma=(k_1+k_2)/(Bk_1k_2)$.

Обобщённые условия сопряжения на слабопроницаемой плёнке имеют вид [3]:

$$x=0:\qquad u_2-u_1=Bk_1\partial_x u_1,\qquad k_2\partial_x u_2=k_1\partial_x u_1. \tag{26}$$

Непосредственно устанавливается, что функции (24), (25) в зонах $D_1(x<0)$, $D_2(x>0)$ являются решением задачи (2), (5), (26), при этом имеет место теорема, аналогичная предыдущей теореме.

В предельном случае при $B\to\infty$ ($\gamma\to 0$ (25)) из формул (24), (25) получаем $u_1\to f(x,y)+f(-x,y)$, $u_2\to 0$, т. е. плёнка $x=0$ вырождается в абсолютно непроницаемую границу области D_1, на которой выполняется граничное условие $\partial_x u_{1|x=0}=0$. В случае $B\to 0$ плёнка $x=0$ исчезает (идеальный контакт зон D_i).

5. Решение краевых задач с плёнками. Правые части формул (20), (21), (24), (25) являются операторами, действующими на функцию $f(x,y)$ по одной переменной x (y – свободная переменная). Отсюда задачи (2), (5), (22) и (2), (5), (26) по переменной y можно подчинить дополнительным граничным условиям при сохранении формул (20), (21) и (24), (25).

Пусть известна гармоническая функция $f(x,y)$, имеющая заданные особые точки в полуплоскости $D(x\in R,\, y<0)$ при $x<0$ и удовлетворяющая однородному при $x>0$ граничному условию Дирихле вида

$$f_{|y=0}=\begin{cases} h_1(x), & x<0,\\ 0 & x>0.\end{cases} \tag{27}$$

Тогда решение аналогичной задачи в полуплоскости $D(x\in R,\, y<0)$ с дополнительной сильно проницаемой плёнкой $x=0$ вида (2), (5), (22),

$$u_{1|y=0,\,x<0}=h_1(x),\qquad u_{2|y=0,\,x>0}=0 \tag{28}$$

строится по общим формулам (20), (21), что проверяется непосредственно. Здесь $u_{1,2}(x,y)$ – потенциалы в полуплоскости $D(x\in R,\, y<0)$ соответственно при $x<0$ и $x>0$, уравнение Лапласа (2) для функции $u_1(x,y)$ выполняется вне особых точек функции $f(x,y)$. В случае слабопроницаемой плёнки $x=0$ решение задачи (2), (5), (26), (28) строится по формулам (24), (25).

Аналогично пусть известна гармоническая функция $f(x,y)$, имеющая заданные особые точки в полосе $D(x\in R,\, 0<y<r)$ при $x<0$ и удовлетворяющая граничным условиям, однородным при $x>0$, вида (27),

$$f_{|y=r}=\begin{cases} h_2(x), & x<0,\\ 0 & x>0.\end{cases}$$

Тогда решение аналогичной задачи в полосе D с сильно проницаемой плёнкой $x=0$ вида (2), (5), (22), (28),

$$u_{1|y=r,\,x<0}=h_2(x),\qquad u_{2|y=r,\,x>0}=0 \tag{29}$$

строится по формулам (20), (21), где $u_{1,2}(x,y)$ – потенциалы в полосе $D(x\in R,\, 0<y<r)$ соответственно при $x<0$, $x>0$. В случае слабопроницаемой плёнки $x=0$ решение задачи (2), (5), (26), (28), (29) строится по общим формулам (24), (25).

Таким образом, операторы (20), (21), (24), (25) отображают множество решений $f(x,y)$ рассмотренных классических задач без плёнки на множество решений аналогичных задач с плёнкой при сохранении области D, уравнения и граничных условий.

Список литературы

1. Kholodovskii S. E. A Method of Convolution of Fourier Expansions as Applied to Solving Boundary Value Problems with Intersecting Interface Lines // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2007. Vol. 47. No. 9. P. 1489–1495.

2. Kholodovskii S. E. The Convolution Method of Fourier Expansions. The Case of Generalized Transmission Conditions of Crack (Screen) Type in Piecewise Inhomogeneous Media // Differential Equations. 2009. Vol. 45. No. 6. P. 873–877.

3. Холодовский С. Е. Метод свёртывания разложений Фурье. Случай трещины (завесы) в неоднородном пространстве // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 8. С. 1204–1208.

4. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твёрдых тел. М.: Наука, 1964. 487 с.

5. Пилатовский В. П. Основы гидромеханики тонкого пласта. М.: Недра, 1966. 317 с.

6. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3. М.: Наука, 1962. 656 с.

7. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 680 с.

References

1. Kholodovskii S. E. A Method of Convolution of Fourier Expansions as Applied to Solving Boundary Value Problems with Intersecting Interface Lines // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2007. Vol. 47. No. 9. P. 1489–1495.

2. Kholodovskii S. E. The Convolution Method of Fourier Expansions. The Case of Generalized Transmission Conditions of Crack (Screen) Type in Piecewise Inhomogeneous Media // Differential Equations. 2009. Vol. 45. No. 6. P. 873–877.

3. Kholodovskii S. E. Metod svertyvaniya razlozhenii Fur'e. Sluchai treshchiny (zavesy) v neodnorodnom prostranstve // Differentsial'nye uravneniya. 2009. T. 45. № 8. S. 1204–1208.

4. Karslou G., Eger D. Teploprovodnost' tverdykh tel. M.: Nauka, 1964. 487 s.

5. Pilatovskii V. P. Osnovy gidromekhaniki tonkogo plasta. M.: Nedra, 1966. 317 s.

6. Fikhtengol'ts G. M. Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya. T. 3. M.: Nauka, 1962. 656 s.

7. Polubarinova-Kochina P. Ya. Teoriya dvizheniya gruntovykh vod. M.: Nauka, 1977. 680 s.

Статья поступила в редакцию 13.04.2015