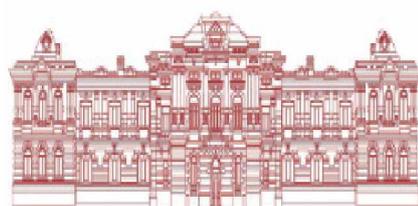
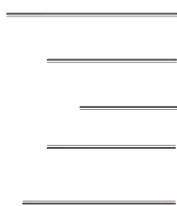
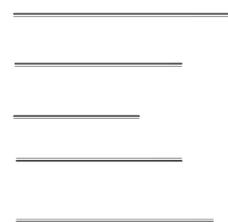


Ученые записки



Забайкальского государственного университета

С е р и я «Физика, математика, техника, технология»



№ 3 (62)
2015

ISSN 2308-8761

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ

Забайкальского
государственного
университета



Серия

«Физика, математика, техника,
технология»

Научный журнал
Основан в 1957 г.
Выходит шесть раз в год

Учредитель

ФГБОУ ВПО
«Забайкальский государственный университет»

Журнал зарегистрирован

Федеральной службой по надзору
в сфере связи, информационных технологий
и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)

Свидетельство о регистрации

ПИ № ФС77–54257 от 24.05.2013

Журнал входит

в Перечень ведущих рецензируемых научных
журналов и изданий, в которых должны быть
опубликованы основные научные результаты
диссертаций на соискание учёных степеней
доктора и кандидата наук

Авторы несут полную ответственность
за подбор и изложение фактов, содержащихся
в статьях; высказываемые взгляды
могут не отражать точку зрения редакции

Перепечатка материалов журнала допускается
только по согласованию с редакцией

Рукописи, присланные в журнал,
не возвращаются

Адрес редакции:

672007, г. Чита, ул. Бабушкина, 129
Телефон: 8 (3022) 35-24-79,
факс: 8 (3022) 41-64-44.
E-mail: zab-nauka@mail.ru

Сайт журнала в Интернете

<http://www.uchzap.com>

Подписной индекс журнала
в «Пресса России» **42408**

Электронная версия журнала

Размещена на платформе
Российской универсальной
научной электронной библиотеки:
www.elibrary.ru

© Забайкальский государственный
университет, 2015

SCHOLARLY NOTES Of Transbaikal State University

Series

Physics, Mathematics, Engineering, Technology

UCHENYE ZAPISKI Zabaikal'skogo

Gosudarstvennogo Universiteta

Seriya

Fizika, Matematika, Tehnika, Tehnologiya

Scientific Journal
Founded in 1957 г.
Published six times per year

Founder

FSBEI HPE
"Zabaikalsky State University"

The journal is registered

by the Federal Supervision Service in the Field
of Communications, Information Technology
and Mass Communications (Roskomnadzor)

Registration certificate

ПИ № ФС77–54257 от 24.05.2013

The journal

is in the List of the leading refereed
scientific journals
and editions which publish the main results
of dissertations for academic degrees
of doctors and candidates of sciences

The authors are fully responsible for the selec-
tion and presentation of the facts contained in their
articles; the views expressed by them do not neces-
sarily reflect the views of the editorial board

Reproduction of any materials from the journal
is allowed only in coordination
with the editorial board

The manuscripts submitted to the journal
are not returned

Address:

672007, Chita, 129 Babushkin St.
Phone: 8 (3022) 35-24-79,
Fax: 8 (3022) 41-64-44.
E-mail: zab-nauka@mail.ru

Journal web site

<http://www.uchzap.com>

Subscription index

of the journal in "Press of Russia" **42408**

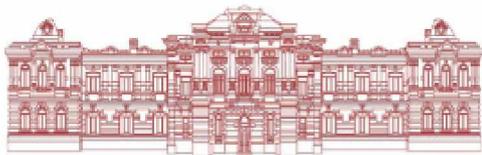
The electronic version of the journal

is placed on the platform
of the Russian Universal
Scientific Electronic Library:
www.elibrary.ru

© Zabaikalsky State University, 2015

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ

Забайкальского
государственного
университета



Серия
«Физика, математика, техника,
технология»

SCHOLARLY NOTES Of Transbaikal State University

Series

Physics, Mathematics, Engineering, Technology

◆
UCHENYE ZAPISKI
Zabaikal'skogo
Gosudarstvennogo Universiteta
Seriya

Fizika, Matematika, Tehnika, Tehnologiya

Редакционный совет

Борис Ванданович Базаров, д-р ист. наук, проф., член-кор. РАН, Институт монголоведения, буддологии и тибетологии СО РАН (Улан-Удэ, Россия); **Андре Буржо**, д-р социал. наук, акад., Национальный центр научных исследований Франции (Париж, Франция); **Дэн Цзюнь**, проф., Институт русского языка Хэйлуцзянского университета (Хэйлуцзян, КНР); **Кейдзи Идэ**, заместитель главы миссии, министр Посольства Японии в Российской Федерации (Япония); **Чжен Шупу**, д-р филол. наук, проф. (Харбин, КНР); **Михаил Иванович Эпов**, д-р техн. наук, проф., акад. РАН, Институт нефтегазовой геологии и геофизики СО РАН (Новосибирск, Россия)

Редакционная коллегия

Выпускающий редактор:

С. Е. Холодовский, доктор физико-математических наук, профессор (Чита, Россия);

С. Ф. Забелин, доктор технических наук, профессор (Чита, Россия)

Члены редколлегии:

В. Е. Архинчеев, доктор физико-математических наук, профессор (Улан-Удэ, Россия);

В. В. Мазалов, доктор физико-математических наук, профессор (Петрозаводск, Россия);

Главный редактор

И. В. Ерофеева, д-р филол. наук, доцент

Ответственный секретарь

Э. А. Арутюнян

◆
Журнал представляет собой сборник оригинальных и обзорных научных статей, посвящённых аналитическому решению задач математической физики в областях, содержащих плёночные включения и плёночные покрытия, математической теории игр, построению математических моделей кристаллических решёток; работы по экспериментальной физике: исследованию ледяных покровов, твёрдых растворов и др., а также работы по различным инженерным технологиям (термическая обработка металлов) и работы по информатике.

Материалы журнала будут интересны широкой научной общественности, преподавателям вузов, аспирантам, студентам, деятелям культуры и образования.

Editors

Boris Vandanovich Bazarov, Doctor of History, Professor, corresponding member of the RAS, The Institute of Mongolian, Buddhist and Tibetan Studies SB of the RAS (Ulan-Ude, Russia); **Andre Bourget**, Doctor of Sociology, Academician, French National Center for Scientific Research (Paris, France); **Den Tszun**, professor, the Institute of the Russian language at Heilongjiang University (Heilongjiang, China); **Keidzy Ide**, Mission Deputy Head, Ministry of Embassy of Japan in the Russian Federation (Japan); **Zhen Chupu**, Doctor of Philology, Professor (Harbin, China); **Mikhail Ivanovich Epov**, Doctor of Engineering Science, professor, Academician of the RAS, Institute of Petroleum-Gas Geology and Geophysics of the Siberian Branch of the RAS (Novosibirsk, Russia)

Editorial Board

Main Handling Editors:

S. E. Kholodovsky, Doctor of Physics and Mathematics, Professor (Chita, Russia);

S. F. Zabelin, Doctor of Engineering, Professor (Chita, Russia)

Editorial board members:

V. E. Arkhincheev, Doctor of Physics and Mathematics, Professor (Ulan-Ude, Russia);

V. V. Mazalov, Doctor of Physics and Mathematics, Professor (Petrozavodsk, Russia);

Editor-in-chief

I. V. Erofeeva, Doctor of Philology, Associate Professor

Executive Secretary

E. A. Arutyunyan

◆
The journal is a collection of original and review scientific papers on analytical solution of mathematical physics problems in the field, containing film incls and film coating, mathematical theory of game, construction of crystal lattices' mathematical models, work on experimental physics: the study of ice sheets, solid solutions etc., as well as work on various engineering technologies (metal heat treatment) and on computer studies.

Materials will be interesting to the wide scientific community, university professors, postgraduate students, students, workers in culture and education.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Батухтин А. Г., Батухтина И. Ю.</i> О решении одной теплофизической системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами	6
<i>Березин С. Я., Кулеш И. М.</i> Новые возможности использования ультразвука в процессах внутреннего резьбовыдавливания	9
<i>Бордонский Г. С., Гурулёв А. А., Лукьянов П. Ю., Орлов А. О., Цыренжапов С. В.</i> Гидрофизические параметры оз. Доронинское и причины его меромиксии	16
<i>Бордонский Г. С., Рябова Л. Д.</i> Радиочастотный дифференциальный измеритель деформации	26
<i>Быков П. А., Калашников И. Е., Болотова Л. К., Кобелева Л. И., Колмаков А. Г.</i> Определение износа и построение карт трения при трибологических испытаниях алюмоматричных композиционных материалов	30
<i>Ефимова И. А.</i> О решении краевых задач для уравнения Лапласа в полуплоскости с неограниченными граничными функциями. Метод квазиинтегралов Фурье	38
<i>Железняк И. И., Холодовский С. Е.</i> Природа и модель распространения температурных волн в курумах	44
<i>Забелин С. Ф.</i> Решение проблем прочности материалов методами поверхностной нанокристаллизации	48
<i>Зеленский В. А., Забелин С. Ф., Анкудинов А.Б., Трезубова И. В.</i> Исследование механических и технологических свойств дисперсно-упрочнённых электроконтактных материалов на основе композиционных порошков серебра	59
<i>Номоконова О. В.</i> О логико-вероятностном моделировании электроопасных ситуаций в условиях неопределённости	70
<i>Романова Л. С.</i> Исследование влияния компенсирующих способностей резьбонарезных патронов на устойчивость метчиков	75
<i>Степанов Н. П., Степанова Л. Э., Лозовская А. С.</i> Экспериментальное определение статических и оптических времен релаксации в теллуридах висмута и сурьмы	82
<i>Токарева Ю. С.</i> Проблема справедливого дележа пирога с участием арбитра	93
<i>Толпаев В. А., Кравцов А. М.</i> Метод средневзвешенных потенциалов в практических задачах нефтегазодобывающей отрасли	98
<i>Устюхин А. С., Вомпе Т. А., Миляев И. М., Зеленский В. А.</i> Исследование магнитных гистерезисных свойств $Fe - 26Cr - 16Co$ порошковых сплавов в зависимости от условий спекания и термообработки	112
<i>Холодовский В. Е., Краюшкина Е. Ю.</i> Параметры внутриатомных диполей кристаллов твёрдых растворов со структурой $CsCl$	120
<i>Холодовский С. Е.</i> Краевые задачи в областях с наноструктурными границами (покрытиями). Теорема двойственности	130
<i>Яковлева Г. М.</i> О динамических процессах в плоских областях с плёночным включением	135

ПОЛЕМИКА. ЛЮДИ. СОБЫТИЯ

<i>Бордонская Л. А., Серебрякова С. С.</i> К 150-летию создания Джеймсом Клерком Максвеллом теории электромагнитного поля	143
---	-----

CONTENTS

<i>Batukhtin A. G., Batukhtina I. Ju.</i> On the Solution of Thermo-Physical System of Linear First Order Differential Equations with Constant Coefficients.....	6
<i>Berezin S. Ya., Kulesh I. M.</i> New New Areas Using of the Powerful Ultrasonic During Internal Tapping Screw.....	9
<i>Bordonskiy G. S., Gurulev A. A., Lukyanov P. Yu., Orlov A. O., Tsyrenzhapov S. V.</i> Hydrophysical Parameters of the Doroninskoe Lake and the Origins of its Meromixis.....	17
<i>Bordonskiy G. S., Ryabova L. D.</i> The RF Differential Strain Gauge.....	26
<i>Bykov P. A., Kalashnikov I. E., Bolotova L. K., Kobeleva L. I., Kolmakov A. G.</i> Determination of Wear and Compilaiton of Wear Maps in Tribological Test of Aluminum-Matrix Composites.....	31
<i>Efimova I. A.</i> On the Solution of Boundary Value Problems for the Laplace Equation in the Half-Plane with Unbounded Boundary Functions. The Method of Quasi-Integrals of Fourier.....	38
<i>Zheleznyak I. I., Kholodovskii S. Ye.</i> Nature and Model of Temperature Waves' Propagation in Kurumas.....	44
<i>Zabelin S. F.</i> Solving of Problems of Coating Materials with the Methods of Superficial Nanocrystallization.....	48
<i>Zelensky V. A., Zabelin S. F., Ankudinov A. B., Tregubova I. V.</i> The Study of Mechanical and Technological Properties of Dispersion-Strengthened Electric-Based Materials on the Base of Composite Powders Argent.....	60
<i>Nomokonova O. V.</i> On Logical-Probabilistic Simulation of Electrical Danger Situations within Uncertainty.....	70
<i>Romanova L. S.</i> Study on the Effect of Compensating Abilities of Screw-Forming Tapping on the Stability of Tapes.....	75
<i>Stepanov N. P., Stepanova L. E., Lozovskaya A. S.</i> Experimental Determination of the Static and Optical Relaxation Times in Bismuth Telluride and Antimony.....	82
<i>Tokareva Yu. S.</i> The Problem of Fair Sharing of the Cake with the Arbitrator.....	93
<i>Tolpaev V. A., Kravtsov A. M.</i> The Method of Average Weighted Potential in Practical Problems of Oil and Gas Industry.....	98
<i>Ustyuhin A. S., Vompe T. A., Milyaev I. M., Zelensky V. A.</i> Investigation of $Fe - 26Cr - 16Co$ Powder Alloys Magnetic Hysteresis Properties Depending on Sintering and Thermal Treatment Conditions.....	113
<i>Kholodovskii V. Ye., Krayushkina E. Yu.</i> Parameters of Intra Dipoles Solid Solutions with CsCl Structure.....	120
<i>Kholodovskii S. Ye.</i> Boundary Value Problems in Areas with Nano-structured Boundaries (Coatings). The Duality Theorem.....	130
<i>Yakovleva G. M.</i> Dynamical Processes in Flat Areas with Film Inclusion.....	135

POLEMIC. PEOPLE. EVENTS

<i>Bordonskaya L. A., Serebryakova S. S.</i> On the 150th Anniversary of James Clerk Maxwell's Theory of Electromagnetic Field.....	143
---	-----

УДК 517.9
ББК 22.116.6

Андрей Геннадьевич Батухтин,
кандидат технических наук, доцент,
Забайкальский государственный университет,
672039, Россия, г. Чита, ул. Александро-Заводская, 30,
e-mail: batuhina_ir@mail.ru

Ирина Юрьевна Батухтина,
кандидат физико-математических наук, доцент,
Забайкальский государственный университет,
672039, Россия, г. Чита, ул. Александро-Заводская, 30,
e-mail: batuxlina_irina@mail.ru

**О решении одной теплофизической системы линейных
дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными
коэффициентами**

Рассмотрена теплофизическая система линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами. Получено решение в виде конечной суммы экспоненциальных функций с коэффициентами, которые определяются из рекуррентных соотношений. Полученное решение может быть использовано при решении определённого класса инженерных и экономических задач (теплотехнических, транспортных, информационных).

Ключевые слова: линейные дифференциальные уравнения первого порядка, рекуррентное соотношение, задачи теплофизики.

Andrey Gennadevich Batukhtin,
Candidate of Technical Science, Associate Professor,
Transbaikal State University,
30 Aleksandro-Zavodskaya St., Chita, Russia, 672039
e-mail: batuhina_ir@mail.ru

Irina Yuryevna Batukhtina,
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Transbaikal State University,
30 Aleksandro-Zavodskaya St., Chita, Russia, 672039
e-mail: batuxlina_irina@mail.ru

**On the Solution of Thermo-Physical System of Linear First Order
Differential Equations with Constant Coefficients**

Thermo-physical system of linear first order differential equations with constant coefficients is considered. It was obtained by the solution as a finite sum of exponential functions with coefficients that are determined by the recurrence relations. The resulting solution can be used in solving a certain class engineering and economic problems (thermal, transport, information).

Keywords: linear differential equations of the first order, recurrence relations, problem of thermo-physics.

Известно [1–5], что достаточно широкий класс инженерных и экономических задач (теплотехнических, транспортных, информационных, задач технико-экономической оптимизации) сводится к системе дифференциальных уравнений вида

3. Батухтин А. Г., Калугин А. В. Моделирование современных систем централизованного теплоснабжения // Вестник ИрГТУ, 2011. Т. 55. № 8. С. 84–91.

4. Батухтин А. Г. Оптимизация отпуска теплоты от ТЭЦ на основе математического моделирования с учётом функционирования различных типов потребителей: автореф. дис. ... канд. техн. наук: Улан-Удэ.: ВСГТУ, 2005. 16 с.

5. Батухтин А. Г., Маккавеев В. В. Применение оптимизационных моделей функционирования систем теплоснабжения для снижения себестоимости тепловой энергии и увеличения располагаемой мощности станции // Промышленная энергетика. 2010. № 3. С. 7–8.

References

1. Goryachikh N. V., Batukhtin A. G. Ispol'zovanie faktornogo analiza dlya optimizatsii rezhimov raboty sistem teplosnabzheniya // Promyshlennaya energetika. 2013. № 9. S. 26–30.

2. Bass M. S., Batukhtin A. G., Trebunskikh S. A. Metodicheskie voprosy otsenki effektivnosti sistem tsentralizovannogo teplosnabzheniya // Nauchno-tekhnicheskie vedomosti SPbGPU. 2013. № 2. S. 80–84.

3. Batukhtin A. G., Kalugin A. V. Modelirovanie sovremennykh sistem tsentralizovannogo teplosnabzheniya // Vestnik IrGTU, 2011. Т. 55. № 8. S. 84–91.

4. Batukhtin A. G. Optimizatsiya otpuska teploty ot TETs na osnove matematicheskogo modelirovaniya s uchetom funktsionirovaniya razlichnykh tipov potrebiteli: avtoref. dis. ... kand. tekhn. nauk: Ulan-Ude.: VSGTU, 2005. 16 s.

5. Batukhtin A. G., Makkaveev V. V. Primenenie optimizatsionnykh modelei funktsionirovaniya sistem teplosnabzheniya dlya snizheniya sebestoimosti teplovoi energii i uvelicheniya raspolagaemoi moshchnosti stantsii // Promyshlennaya energetika. 2010. № 3. S. 7–8.

Статья поступила в редакцию 10.04.2015

УДК 621.7/9
ББК 34.63

Сергей Яковлевич Березин,
доктор технических наук, профессор,
Забайкальский государственный университет,
672039, Россия, г. Чита, ул. Александро-Заводская, 30,
e-mail: berlog_berezin2011@mail.ru
Ирина Михайловна Кулеш,
доцент,
Забайкальский государственный университет,
672039, Россия, г. Чита, ул. Александро-Заводская, 30,
e-mail: kulesh.irina22@yandex.ru

Новые возможности использования ультразвука в процессах внутреннего резьбовыдавливания

Рассмотрен опыт применения мощного фокусированного ультразвука для активации процессов внутреннего резьбообразования. Представлены конструкции технологической оснастки с фокусирующими узлами для установки на станках сверлильной группы.

Ключевые слова: ультразвук, метчик, раскатник, резьбонарезание, резьбообразование, фокусировка, акустическая линза, фокусная область, головка резьбонарезная.

Sergey Yakovlevich Berezin,
Doctor of Technical Sciences, Professor,
Transbaikal State University,
30 Aleksandro-Zavodskaya St., Chita, Russia, 672039,
e-mail: berlog_berezin2011@mail.ru
Irina Mikhailovna Kulesh
Associate Professor,
Transbaikal State University,
30 Aleksandro-Zavodskaya St., Chita, Russia, 672039,
e-mail: kulesh.irina22@yandex.ru

New New Areas Using of the Powerful Ultrasonic During Internal Tapping Screw

The experience of the application of high-power focused ultrasonic to activate the processes of internal threading is considered. The constructions of tooling with focusing units for installation on drilling machines are presented.

Keywords: ultrasonic, tap, forming tap, threading, tapping screw, focusing, acoustic lens, focal area, thread-cutting block.

Несмотря на достаточно полное исследование резьбонарезных процессов, интенсифицированных ультразвуком, в настоящее время интерес к данной проблеме не ослабевает. Как в России, так и за рубежом появляются новые работы по данной тематике. Исследуются возможности новых схем подведения ультразвуковой (УЗ) энергии к зоне обработки, возможности активации переходов ориентирования и наживления крепежных деталей, эффективность применения УЗ для труднообрабатываемых материалов, возможности использования

модулированного УЗ, разрабатываются новые виды и конфигурации волноводов и другие направления. Одним из перспективных методов активизации технологических процессов различного назначения является применение фокусированного ультразвука. Способы и теоретические основы фокусирования ультразвуковых волн исследовались Л. Д. Розенбергом, И. Н. Каневским и др. для использования в процессах абразивной обработки, очистки от масел и обезжиривания. Фокусирование ультразвука широко используется в медицинской технике, фармакологии и других областях [1; 2].

Эффективность фокусированного ультразвука определяется тем, что в зону его воздействия попадает большее количество акустической энергии, которая концентрируется линзой или другой системой. Таким образом, если в зоне обработки выполняется работа $A(H \cdot m)$ и при этом зона находится в области акустического фокуса, то эффективность можно оценить коэффициентом

$$K_1^\Phi = \frac{A}{I_\Phi}, \left[\frac{H \cdot m \cdot \text{см}^2}{\text{Вт}} \right] \quad (1)$$

где I_Φ – интенсивность УЗ в фокальной области. Если акустическая система не имеет фокусирующих устройств, то значительная доля энергии УЗ рассеивается, а в зону обработки попадает только незначительная её часть с интенсивностью I . Тогда коэффициент эффективности нефокусированного УЗ будет оценен по формуле

$$K_1 = \frac{A}{I}, \quad (2)$$

При этом будет справедливым условие $K_1 > K_1^\Phi$.

На кафедре автоматизации производственных процессов ЗабГУ разработаны конструкции ультразвуковой технологической оснастки с фокусирующими устройствами, позволяющими передавать концентрированную акустическую энергию через систему волноводов на метчик, или на деталь с отверстием. Волноводы выполнены из материалов с разной плотностью, что позволяет кроме фокусирования получать в зоне обработки сложную интерференционную картину УЗ колебаний, избегая попадания режущих кромок метчика в зону с нулевой пучностью [3].

На рис. 1 представлена конструкция ультразвуковой головки для нарезания резьбы метчиками или выдавливания раскатниками. Она имеет невращающийся корпус 1 с щётчным токоподводящим устройством 2 и опорами качения 3, на которых установлена приводная часть с хвостовиком 4, стаканом 5 и крышкой 6, на которой в свою очередь внутри стакана, закреплён пьезоэлектрический преобразователь 7 с частотопонижающей накладкой 8, а снаружи крышка 6 выполнена заодно со стержневым концентратором 9, вокруг основания которого, в крышке 6, изготовлено сферическое вогнутое углубление 10, для установки в него ответной части фокусирующего концентратора 11. Стержневой концентратор 9 имеет гнездо 12 для приводной части инструмента 13, а фокусирующий концентратор 11 заканчивается цангой 14 для зажима стержневой части инструмента.

На рис. 2 представлена схема фокусирующей области, D – фокусирующей области (линзы), d – диаметр резьбы, Z – осевая координата, R – геометрический радиус линзы, Θ_m – плоскостный угол раскрытия волнового фронта, Z_Φ – зона сфокусированной акустической энергии, f_n – акустическое фокусное расстояние, J_1 – интенсивность ультразвуковых колебаний пьезоэлектрического преобразователя, J_Φ – интенсивность ультразвуковых колебаний в зоне фокуса.

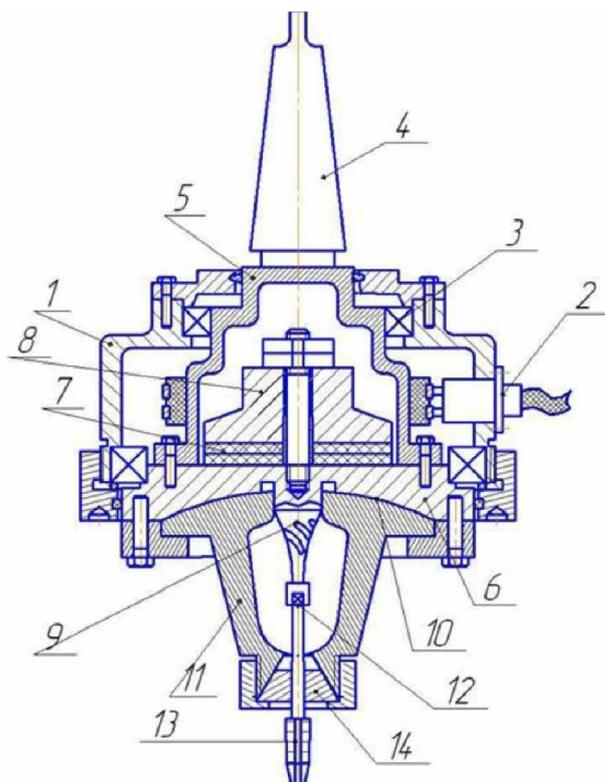


Рис. 1. Ультразвуковая головка с фокусирующей системой

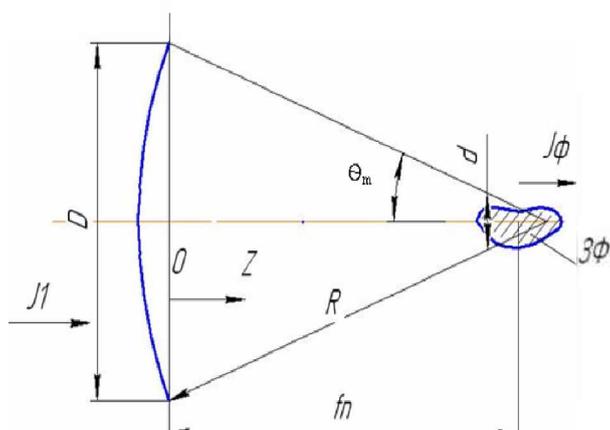


Рис. 2. Схема формирования фокусированного пучка акустической энергии

Согласно рис. 1 головка работает следующим образом: пьезоэлектрический преобразователь 7 совместно с частотопонижающим элементом 8 создают ультразвуковые колебания, передаваемые на крышку 9 и фокусирующий концентратор 11. В силу наличия винтовых пазов на образующей поверхности концентратора 9 создаются продольно-крутильные колебания, которые передаются через наконечник 12 инструменту 13. Они снижают силы фрикционного и деформационного характера, возникающие при резбообразовании. В тяжёлых условиях нарезания резьб (резьбы с крупным шагом, обработка вязких материалов, титановых сплавов и т. д.) энергии колебаний, передаваемых только через приводную часть может оказаться недостаточно для преодоления сил сопротивления и обеспечения стойкости инструмента. Это связано с потерями акустической энергии в контакте инструмента с обрабатываемой деталью за счёт поглощения и рассеивания. Чем глубже инструмент входит в отверстие, тем меньше интенсивность колебательной энергии ($\text{Вт}/\text{см}^2$), приходящейся на единицу площади режущей кромки.

Наличие фокусирующего концентратора 11 позволяет сконцентрировать большую часть энергии в зоне резбообразования и удержать её от рассеивания в объеме обрабатываемой детали. Сфокусированная акустическая энергия передаётся от линзы 10, крышки 6, концентратору 11 и цанге 14, надёжно удерживающей стержень инструмента 13.

Общий вид ультразвуковой головки для резбонарезных операций представлен на рис. 3. Она закрепляется на пиноли шпинделя, имеет выходной конус для крепления вспомогательного инструмента и токоподводящую систему связи с ультразвуковым генератором.

Применение фокусирующего концентратора ведёт к росту интенсивности звуковой волны по мере приближения к акустической фокусной зоне ЗФ (фиг. 2). Известно, что мощность звукового фронта W связана с интенсивностью ультразвука J следующим отношением [2]

$$J = \frac{W}{F_2}, \quad (3)$$

где F_2 – площадь сечения звукового фронта в сфокусированной области по координате Z , равная, в соответствии с рис. 2.



Рис. 3. Ультразвуковая резбонарезная головка с фокусирующей системой на станке 2E53

$$F_2 = \frac{\pi D^2}{4} \left(\frac{R - z}{R} \right). \quad (4)$$

Таким образом, интенсивность в соответствии со значением F_2 будет равна

$$J = \frac{4WR}{\pi D^2 (R - z)} \quad (5)$$

Это означает, что по мере приближения фокусного расстояния к геометрическому радиусу R интенсивность будет возрастать.

В силу того, что акустический фокус определяется коэффициентом преломления волн на границе раздела материалов линзы, его положение отличается от геометрического фокуса системы. Например, значение крайнего акустического расстояния равно [2].

$$\frac{F_n}{R} = N(N^2 - 1) \pm 1, \quad (6)$$

где N – коэффициент преломления фокусирующей системы $N = k/k_0$,

k, k_0 – волновые числа материалов линзы (крышки и фокусирующего концентратора соответственно);

знак (+) при $N < 1$, (–) при $N > 1$.

Наличие фокусирующего концентратора позволяет получать более высокую, по сравнению с прототипом, концентрацию акустической энергии в небольшом объёме. Фокусирование ультразвука снижает рассеивание звуковой энергии и обеспечивает перенос максимума интенсивности колебаний в фокальную область, которая за счёт геометрии акустической линзы направляет сконцентрированную энергию ультразвука в зону резбообразования. Для передачи сфокусированной энергии полый концентратор снабжен цангой, охватывающей стержневую часть инструмента, обеспечивая плотный акустический контакт.

Стержневой концентратор, имеющий винтовые пазы и гнездо для приводной части инструмента, обеспечивает передачу крутящего момента с наложенными на него крутильно-осевыми колебаниями с длиной волны, отличной от длины волны колебаний, передаваемых фокусирующим концентратором. Такая схема передачи акустической энергии приводит к появлению в зоне резбообразования сложной дифракционной картины колебаний от наложения друг на друга двух волн различной длины, но одинаковой частоты. Разные длины стоячих волн определяются различной плотностью материалов обоих концентраторов, а, соответственно и различной скоростью распространения в них ультразвуковых колебаний.

Наложение двух стоячих волн различной длины перекрывает узловые точки с нулевой амплитудой, что делает предлагаемую систему независимой от координат их расположения. В случае прототипа мы имеем дело с одной стоячей волной, причем с неустойчивым положением нулевых точек (узлов) в силу зависимости от напряженного состояния элементов звукопередающей системы.

В случае резбовываывания механизм действия ультразвука особенно актуален, т. к. его действие приводит к снижению силовой напряженности процесса, а следовательно и к повышению его надежности. Исследовать действие ультразвука на процесс пластического течения металла возможно путем измерения микротвердости, а также деформационной составляющей крутящего момента при завинчивании образцов, несущих только заходную часть, применением рентгеноструктурного и микроструктурного анализа [4].

Величина крутящего момента резбообразования может быть описана следующей степенной функцией

$$M_{кр} = C_{MT} \cdot \delta^x \cdot V^y \cdot \frac{d^z}{p} \cdot n, \quad (7)$$

где C_{MT} – коэффициент, учитывающий физико-механические свойства обрабатываемого материала, аппроксимируемый функцией следующего вида

$$C_{MT} = C_{бу} - \alpha \cdot A \cdot \sqrt{K_1} \left(\pi + \frac{\pi^3}{3} + \frac{\pi^5}{5} + \frac{\pi^7}{7} + \dots \right), \quad (8)$$

где $C_{бу}$ – коэффициент, учитывающий физико-механические свойства обрабатываемого материала в случае применения несфокусированного УЗ; α – коэффициент пропорциональности;

A – амплитуда УЗ;

K_I — коэффициент усиления по интенсивности УЗ в зоне фокуса, в соответствии с рис. 2, равный [1; 5];

$$K_1 = 4\pi^2 \frac{h^2}{\lambda^2} \cdot \cos^2 \frac{\theta_m}{2}, \quad (9)$$

h — глубина излучения;

λ — длина волны;

Θ_m — плоскостной угол раскбрытия волнового фронта и далее по формуле (3):

δ — припуск под резьбу;

V — скорость резьбонарезания;

d, P — диаметр и шаг резьбы соответственно;

x, y, z — экспериментальные показатели степенной функции;

n — число ниток нарезаемой резьбы.

В процессе исследования силовой напряженности процесса внутреннего резьбообразования проводились измерения крутящего момента в трех режимах: при простом нарезании резьбы без ультразвука, при нарезании с нефокусированным ультразвуком и, соответственно, с фокусированным. Сравнение средних значений крутящих моментов позволяет оценить эффективность действия ультразвука двух последних режимов по значениям коэффициентов

$$K_{\mathfrak{E}}^{\text{У}} = \frac{M_{\text{КР}}^{\text{У}}}{M_{\text{КР}}}; \quad K_{\mathfrak{E}}^{\text{УФ}} = \frac{M_{\text{КР}}^{\text{УФ}}}{M_{\text{КР}}}, \quad (10)$$

где $M_{\text{КР}}$ — крутящий момент по средним экспериментальным значениям при обычном резьбообразовании;

$M_{\text{КР}}^{\text{У}}$ — аналогичные значения в режиме нефокусированного ультразвука;

$M_{\text{КР}}^{\text{УФ}}$ — то же, для фокусированного ультразвука.

Значения первых коэффициентов $K_{\mathfrak{E}}^{\text{У}}$ известны по результатам предыдущих работы [4]. Значения коэффициентов $K_{\mathfrak{E}}^{\text{УФ}}$ представляют интерес не столько для оценки эффективности ультразвука, сколько для получения конструктивных данных при разработке фокусирующих устройств. Зная уровни оценки этих коэффициентов, можно установить диапазон изменения предельные их значения. Выбрав желаемый уровень коэффициента $K_{\mathfrak{E}}^{\text{УФ}}$, можно с помощью приведенных выше формул, установить значение соответствующего коэффициента K_I , а по нему и размерные параметры фокусирующей линзы.

Экспериментальные данные показывают, что уровень снижения крутящих моментов в случае фокусированного ультразвука в среднем на 8 — 12 % ниже, чем в режиме обычного ультразвука для резьб М8—М12, образуемых в деталях их алюминиевых сплавов.

Применение фокусирующих устройств приводит и заметному росту температуры в зоне резьбообразования, что свидетельствует о процессах с более значительной концентрацией акустической энергии.

Фокусирующие элементы можно располагать не только в шпиндельной оснастке, но и применять специальные конструкции волноводов, передающие энергию ультразвуковых колебаний непосредственно к деталям с гнездами под резьбу.

Список литературы

1. Физика и техника мощного ультразвука: Монография. В 3 т. Т. 2. Источники мощного ультразвука / под ред. Л. Д. Розенберга. М.: Наука, 1967. 379 с.
2. Каневский И.Н. Фокусирование звуковых и ультразвуковых волн: Монография. М: Наука, 1977. 336 с.

3. Патент на полезную модель № 111790 РФ. МПК В23G 1/16. Устройство для нарезания внутренней резьбы с наложением ультразвуковых колебаний / С. Я. Березин, В. Н. Леонов, И. М. Кулеш. ГОУ ВПО ЗабГУ. Заявка 2011109991/02, заявл. 16.03.2011; опубл. 27.12.2011. Бюл. № 36.

4. Березин С. Я., Кулеш И. М. Влияние ультразвука на контактные напряжения деформации материала в процессах сборки соединений с крепежно-резьбообразующими деталями // Сборка в машиностроении, приборостроении. 2014. № 9. С. 13–17.

5. Березин С. Я., Кулеш И. М. Динамические особенности процесса трения в резьбовом контакте с активацией фокусированным ультразвуком // Вестник ИрГТУ. № 9. 2011. С. 16–23.

References

1. Fizika i tekhnika moshchnogo ul'trazvuka: Monografiya. V 3 t. T. 2. Istochniki moshchnogo ul'trazvuka / pod red. L. D. Rozenberga. M.: Nauka, 1967. 379 s.

2. Kanevskii I.N. Fokusirovanie zvukovykh i ul'trazvukovykh voln: Monografiya. M: Nauka, 1977. 336 s.

3. Patent na poleznuyu model' № 111790 RF. MПК В23G 1/16. Ustroistvo dlya narezaniya vnutrennei rez'by s nalozheniem ul'trazvukovykh kolebaniy / S. Ya. Berezin, V. N. Leonov, I. M. Kulesh. GOU VPO ZabGU. Zayavka 2011109991/02, zayavl. 16.03.2011; opubl. 27.12.2011. Byul. № 36.

4. Berezin S. Ya., Kulesh I. M. Vliyanie ul'trazvuka na kontaktnye napryazheniya deformatsii materiala v protsessakh sborki soedinenii s krepzhno-rez'boobrazuyushchimi detalyami // Sborka v mashinostroenii, priborostroenii. 2014. № 9. S. 13–17.

5. Berezin S. Ya., Kulesh I. M. Dinamicheskie osobennosti protsessa treniya v rez'bovom kontakte s aktivatsiei fokusirovannym ul'trazvukom // Vestnik IrGTU. № 9. 2011. S. 16–23.

Статья поступила в редакцию 25.05.2015

УДК 556.047(571.54/55)
ББК 22.3(2Рос-4Чит)

Георгий Степанович Бордонский,
доктор физико-математических наук, профессор
заведующий лабораторией геофизики криогенеза,
Институт природных ресурсов, экологии и криологии СО РАН,
672000, Россия, г. Чита, ул. Бутина, 26,
e-mail: lgc255@mail.ru

Александр Александрович Гурулёв,
кандидат физико-математических наук,
старший научный сотрудник,
Институт природных ресурсов, экологии и криологии СО РАН,
672000, Россия, г. Чита, ул. Бутина, 26,
e-mail: lgc255@mail.ru

Алексей Олегович Орлов,
младший научный сотрудник,
Институт природных ресурсов, экологии и криологии СО РАН,
672000, Россия, г. Чита, ул. Бутина, 26,
e-mail: Orlov_A_O@mail.ru

Павел Юрьевич Лукьянов,
кандидат технических наук,
ведущий программист,
Институт природных ресурсов, экологии и криологии СО РАН,
672000, Россия, г. Чита, ул. Бутина, 26,
e-mail: lgc255@mail.ru

Сергей Васильевич Цыренжапов,
младший научный сотрудник,
Институт природных ресурсов, экологии и криологии СО РАН,
672000, Россия, г. Чита, ул. Бутина, 26,
e-mail: lgc255@mail.ru

Гидрофизические параметры оз. Доронинское и причины его меромиксии

В статье рассмотрен ряд гидрофизических параметров меромиктического содового оз. Доронинское (Забайкальский край), минерализация которого достигает 36 г/л. Измерена температурная зависимость плотности воды озера. Оказалось, что плотность для данной минерализации имеет максимум при +1.5 °С, в отличие от морской воды, для которой эта особенность отсутствует. Указаны причины меромиксии, определяемые особой зависимостью плотности воды от температуры, низкой её прозрачностью и опреснением верхнего слоя неглубокого водоёма после таяния ледяного покрова.

Ключевые слова: озеро Доронинское, меромиктический водоём, термоклин, хемоклин.

Georgy Stepanovich Bordonskiy,
Doctor of Physics and Mathematics,
Chief of the Laboratory of Cryogenesis Geophysics,
Institute of Natural Resources, Ecology and Cryology SB RAS
26, Butina st, Chita, Russia, 672000,
e-mail: lgc255@mail.ru

Alexandr Alexandrovich Gurulev,
Candidate of Physics and Mathematics,
Senior Scientific Employee,
Institute of Natural Resources, Ecology and Cryology SB RAS,
26, Butina st, Chita, Russia, 672000,
e-mail: lgc255@mail.ru

Pavel Yuryevich Lukyanov,
Candidate of Technical Sciences,
Leading Programmer,
Institute of Natural Resources, Ecology and Cryology SB RAS,
26, Butina st, Chita, Russia, 672000,
e-mail: lgc255@mail.ru

Aleksey Olegovich Orlov,
Researcher,
Institute of Natural Resources, Ecology and Cryology SB RAS,
26, Butina st, Chita, Russia, 672000, e-mail: Orlov_A_O@mail.ru

Sergey Vasilevich Tsyrenzhapov,
Researcher,
Institute of Natural Resources, Ecology and Cryology SB RAS,
26, Butina st, Chita, Russia, 672000,
e-mail: lgc255@mail.ru

Hydrophysical Parameters of the Doroninskoe Lake and the Origins of its Meromixis

The paper discusses some hydrophysical parameters of meromictic soda in the lake Doroninskoe (Zabaikalsky Region), where mineralization reached 36 g/l. The temperature dependence of the water density was measured. It is turned up, that density for this salinity has maximum at $+1.5^{\circ}\text{C}$ in contrast to sea water for which this peculiarity is absent. The origins of the meromixis is founded: there are special temperature dependence of water density, low water transparency and effect of desalination of top water layer in superficial pond after the ice cover melting.

Keywords: the Doroninskoye Lake, meromictic basin, thermocline, chemocline.

Введение

Озеро Доронинское, расположенное в Забайкальском крае, привлекает внимание исследователей в связи с относительно редким химическим составом вод, в которых преобладающими компонентами являются карбонаты и гидрокарбонаты [1; 2; 3]. Его изучение было начато достаточно давно в связи с промышленным использованием по добыче соды в начале прошлого столетия [1]. Несколько десятилетий назад к оз. Доронинское вновь было привлечено внимание в связи с гипотезой академика Г. А. Заварзина о возможной роли содовых водоёмов в происхождении жизни [4]. Были развёрнуты исследования озера и обнаружена меромиксия – отсутствие вертикального перемешивания вод.

Химический состав воды озера изучали в ряде работ, например, [5; 6]. Было установлено существование в воде растворённого сероводорода и кислорода, что оказалось связанным с динамическим равновесием, определяемым жизнедеятельностью сульфат-редуцирующих микроорганизмов.

Геофизические исследования выполняли в работах [2; 7], где впервые изучали микроволновые свойства ледяного покрова, в связи с возможностью дистанционного изучения водоёма [8] и процесса накопления солей на верхней границе льда.

Отсутствие циркуляции вод характерно для пресных водоёмов зимой в период ледостава, что определяется максимумом их плотности при температуре вблизи $+4\text{ }^{\circ}\text{C}$. При отсутствии льда ветровые, сейшевые, температурные воздействия приводят к перемешиванию пресноводных водоёмов. Эффект стратификации отсутствует для морской воды, так как для неё исчезает аномалия плотности и имеет место её монотонное возрастание вплоть до температуры кристаллизации около $-1.9\text{ }^{\circ}\text{C}$. Вместе с тем, солёность вод оз. Доронинское близка к солёности морской воды 35 ‰. Поэтому до настоящего времени обнаруженная меромиксия вод оз. Доронинское не объяснена, так как неявно предполагалось отсутствие аномалии плотности от температуры. Описание различных меромиктических водоёмов представлено в [9], где, однако, отсутствует информация о водоёме, близком по параметрам к содовому оз. Доронинское.

Цель настоящей работы – на основе имеющихся данных комплексных исследований физических, химических и биологических особенностей оз. Доронинское, а также новых результатов дать качественное объяснение меромиксии данного конкретного водоёма. Свойства содовых водоёмов так же представляют интерес для геохимических исследований [10].

Структурные особенности озера

В литературных источниках отсутствуют полные данные о гидрологических особенностях водоёма и причинах накопления в нём гидрокарбонатов. Не изучена детально и стратификация солей в снежно-ледяном покрове, а также температурная зависимость плотности воды вблизи температуры замерзания. Не исследована важная характеристика – прозрачность воды по глубине, определяющая её разогрев солнечной радиацией и, следовательно, возможности циркуляции вод.

Поэтому, прежде всего, были выполнены измерения ряда гидрофизических параметров и составлена подробная карта глубин водоёма. Выполнены измерения распределения температуры и солёности по глубине и по акватории озера. Ранее аналогичные измерения другими исследователями выполнялись только в отдельных точках [5; 6]. Впервые проведены измерения прозрачности вод по глубине в трёх различных спектральных интервалах. При измерениях прозрачности был обнаружен слой с экстремально низкой прозрачностью толщиной порядка десяти сантиметров, находящийся вблизи хемоклина. Положение этого слоя было исследовано с помощью эхолота по акватории озера. Кроме того, проведены микроволновые радиометрические исследования снежно-ледяного покрова, а также получены радиолокационные изображения с разрешением 3 м для поиска возможных источников подтока вод и особенностей структуры льда.

Результаты измерений

На рис. 1 представлена карта глубин озера, полученная с использованием эхолота при его установке на моторную лодку.



Рис. 1. Батиметрическая карта оз. Доронинское по состоянию на сентябрь 2013 г.

В наиболее глубокой части озера установлена особенность в виде вытянутого образования увеличенной глубины приблизительно на 0,5 м. Возможно, что озеро в данной области питается подземными водами.

Неожиданной оказалась зависимость плотности воды оз. Доронинское от температуры для значения солёности $S = 36.6 \text{ ‰}$. Результаты измерений приведены на рис. 2.

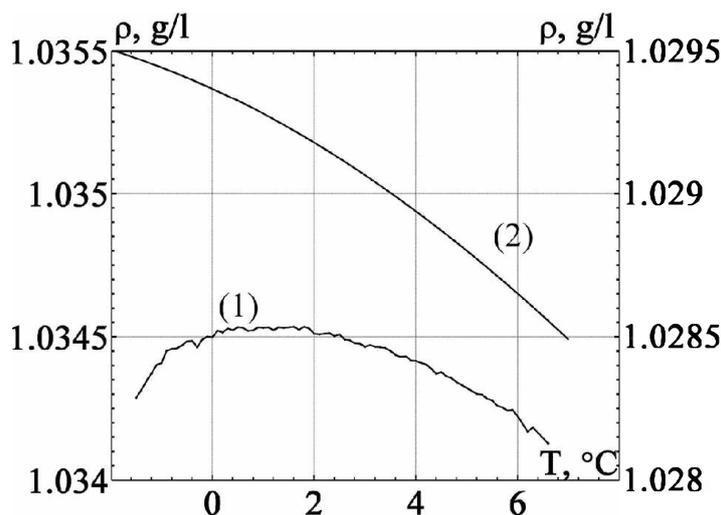


Рис. 2. Температурная зависимость плотности воды (ρ) для оз. Доронинское (1) и морской воды (2) при близких солёностях. Слева шкала для плотности воды оз. Доронинское, справа для морской

Для сравнения на рисунке приведены аналогичные зависимости для морской воды ($S \sim 35 \text{ ‰}$). Как известно, температура замерзания раствора уменьшается с ростом концентрации соли, как $\Delta T \sim k \cdot m$ [11], где ΔT – понижение температуры фазового перехода

воды, k – криоскопическая константа воды, m – моляльность раствора. В случае воды оз. Доронинское и морской воды ΔT оказываются близкими, однако вода содового водоёма, как следует из измерений, имеет существенное отличие другого свойства – её плотность имеет максимум при $+1,5^\circ\text{C}$ и слабо изменяется в интервале $0 \div +2^\circ\text{C}$. Основной состав воды содового озера по данным [6] следующий: Na^+ – 23 %; CO_3^{2-} – 23 %; HCO_3^- – 22 %; Cl^- – 17 %.

Содовая вода оз. Доронинское с установленной плотностной зависимостью от температуры создаёт конвекцию при охлаждении водоёма – близкой к водоёму с пресной водой. Однако особенностью этой воды является больший перепад значения плотности от максимальной до её значения в точке фазового перехода. Этот перепад в 1,5 раза больше, чем для случая пресной воды; то есть содовая вода более устойчива в стратифицированном состоянии, чем пресная.

Выполненное лабораторное измерение плотности находится в согласии с натурными измерениями температуры водоёма в течение года – рис. 3, её температура не понижается в придонном слое ниже $+0,5^\circ\text{C}$.

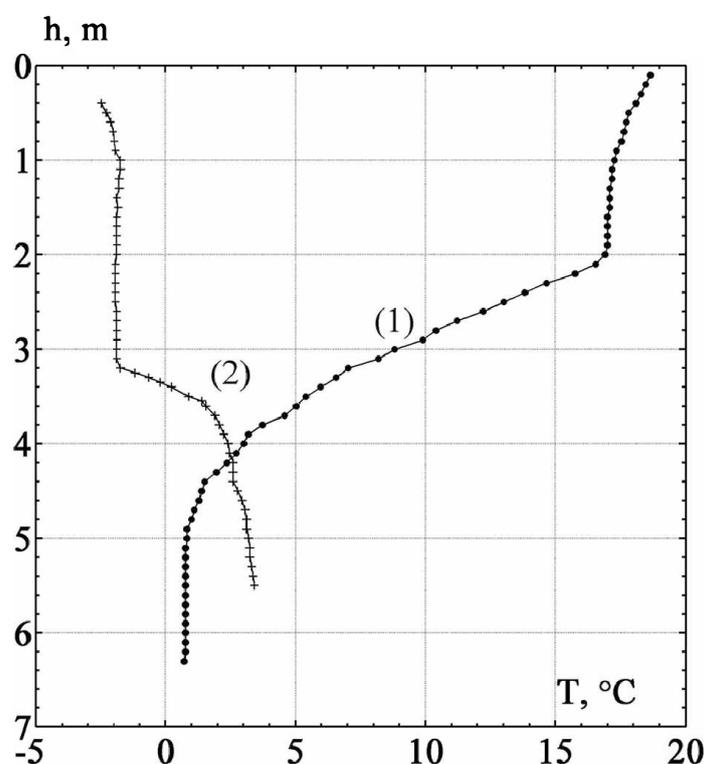


Рис. 3. Распределение температуры (Т) воды от глубины (h)
Даты измерений 1 – 17.06.2013; 2 – 20.12.2013.

Причём в летнее время наблюдается характерный резкий переход температуры от более высоких к более низким значениям, который слабее выражен в зимнее время. Такая резкая стратификация отсутствует в пресноводных водоёмах.

Другая причина, определяющая стратификацию, связана с характером прозрачности вод озера. На рис. 4 представлены результаты измерений прозрачности воды по методике, приведённой в [12].

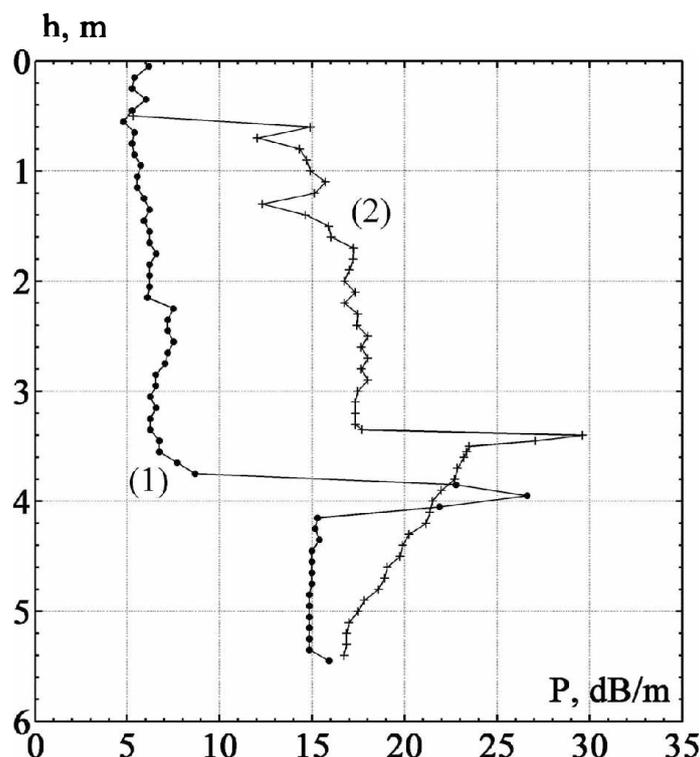


Рис. 4. Зависимость погонного затухания интенсивности светового излучения в воде оз. Доронинское (P) от глубины (h). Даты измерений: 1 – 11.07.2013; 2 – 12.02.2014.

В ней использовался погружаемый датчик с источником света на светодиодах и фотодатчики. Расстояние между датчиками составляло 5 см. На графиках рис. 4 приведено отношение интенсивности света в воде на данной глубине к измеренной интенсивности света в воздухе, пересчитанное на длину пути в 1 м (погонное затухание). Затухание приведено в децибелах. Общее затухание (ослабление) падающего из верхнего полупространства света с глубиной определяется интегрированием по этому параметру. Графики показывают низкую прозрачность воды. На глубине менее 3 м, где наблюдали хемоклин (резкое изменение солёности), общее ослабление солнечного излучения достигает 17 дБ, то есть интенсивность падающего сверху света ослаблена в 50 раз. В зимнее время это ослабление ещё больше. Очевидно, что основная доля солнечного излучения поглощается в верхнем слое до хемоклина.

При нагревании верхнего слоя воды его плотность уменьшается, что и приводит к отсутствию перемешивания, то же имеет место при охлаждении воды ниже $+0.5$ °C. Причина низкой прозрачности оз. Доронинское связана с наличием в воде частиц органического происхождения, а также с гидрогенным минералообразованием [13; 14]. Слой повышенной концентрации взвеси органического происхождения представлен на рис. 5 по данным эхолокационных измерений.

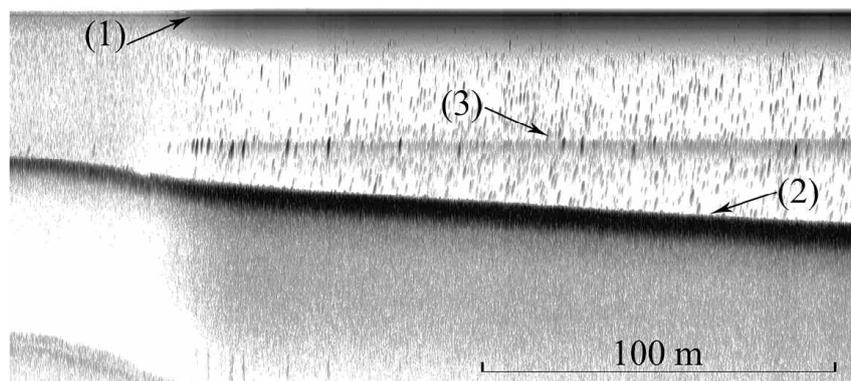


Рис. 5. Пример записи эхолота: (1) – поверхность воды; (2) – дно; (3) – область повышенного отражения по данным эхолота вблизи хемоклина. Дата измерений: 05.09.2013.

Интересно отметить, что его расположение от поверхности не зависело от глубины озера, а сигнал эхолота убывал при продвижении к береговой зоне, где глубина озера сравнивалась с глубиной хемоклина. Отсюда можно сделать вывод, что главный фактор нахождения этих слоёв – температура воды, которая, в свою очередь, определяется потоком проникающей солнечной радиации.

Выполнено также исследование распределения соли по высоте ледяного и снежного покровов. В течение зимы наблюдали существенное изменение концентрации солей в слое между снегом и льдом. К концу периода ледостава в марте в слое льда толщиной ~ 1 см содержание соли достигало ~ 10 г/кг, в снежном покрове ~ 100 г/кг при относительно постоянном среднем содержании соли во льду ~ 3 г/кг. Эти данные также указывают на значительную роль тепловых потоков, создаваемых солнечной радиацией, на структурирование верхних слоёв содового озера.

Обсуждение полученных результатов

Результаты исследований гидрофизических, химических и биологических параметров показывают, что оз. Доронинское характеризуется выраженными процессами структурообразования, характерными особенностями которого является стратификация слоёв по минерализации – меромиксия с повышенной концентрацией солей в более глубокой части водоёма, а также движение кристаллов солей в верхний слой ледяного покрова в зимнее время.

Общая причина такой ситуации – существование переменного потока энергии, поступающей в систему извне, определяемого суточными и сезонными вариациями интенсивности приземной солнечной радиации. Поступающая радиация нагревает преимущественно верхние слои водной среды, подавляя циркуляцию вод, так как плотность её, как показали наши измерения, максимальна в интервале $0 \div +2$ °C. Мутность воды определяется как минералообразованием, так и фотосинтетическими процессами, приводящими к особой биоте озера.

Небольшие глубины озера (до 6 м) оказываются сравнимыми с толщиной ледяного покрова, который может достигать 1.5 м в холодные зимы. Образование льда приводит к росту подлёдной минерализации и появлению второго хемоклина. При этом минерализация озера выравнивается по глубине, однако нарушения меромиксии не происходит, так как температура замерзания содовой воды при концентрациях солей $25 \div 30$ г/л ниже 0 °C, а при такой солёности и температурах плотность не является максимальной (рис. 2), то есть этот подлёдный слой не опускается ко дну.

Если бы состав соли соответствовал составу морской воды, то в этот период возникала бы гравитационная циркуляция вод. Нарушение меромиксии возможно в короткий период начала таяния льда, когда подлёдная температура может превысить значение около 0 °C,

когда плотность воды выравнивается по глубине. Этот эффект наблюдали в апреле в некоторые годы. При таянии льда в весенний период верхний слой оказывается распреснённым, его плотность понижается по сравнению с солёной нижележащей водой, что приводит к восстановлению меромиксии. Последующий разогрев верхнего слоя воды $\sim 2 - 3$ м стабилизирует меромиксию.

Выводы

Отсутствие перемешивания воды оз. Доронинское по глубине связывается со следующими основными причинами:

1. Существованием особого характера температурной зависимости плотности воды озера, в химическом составе которого преобладают карбонаты и гидрокарбонаты (масса их анионов составляет ~ 70 % массы всех анионов), с экстремумом плотности воды в интервале температур $0 \div +2^\circ\text{C}$ (при 1.5°C $\rho = 1.029$ г/л для концентрации солей 36.6 г/л).

2. Геологическим строением водоема – его небольшими глубинами до 6 м, плоским дном, а также климатическими особенностями региона – образованием ледяного покрова, толщина которого сравнима с глубиной водоёма. При образовании льда и его последующим таянием возникает распреснённый более лёгкий слой воды $\sim 2 \div 3$ м (в соответствии с полученными результатами измерений – рис. 2).

3. Высокой мутностью воды озера, сформированной процессами жизнедеятельности микроорганизмов и гидрогенным минералообразованием. Погонное затухание солнечного излучения составляет по измерениям в летнее время 5–10 дБ/м (интенсивность падает в 3–10 раз на метр), в результате чего солнечная радиация практически полностью поглощается в слое воды ~ 3 м. Разогрев верхних распреснённых слоёв воды подавляет влияние ветрового перемешивания (высота волн ~ 0.5 м) и стабилизирует плотностную стратификацию вод озера.

Таким образом, полученные результаты позволяют дополнить качественную оценку возможности появления меромиксии в водоёмах различных климатических зон. В первую очередь меромиксия зависит от наличия максимума плотности воды вблизи температуры её замерзания. Однако этого фактора ещё недостаточно для устойчивой стратификации водоёмов, что видно на примере пресноводных озёр небольших глубин. По-видимому, дополнительными факторами являются:

1) разность плотности в экстремальной точке и точке замерзания (что определяется химическим составом воды);

2) отношение глубины и толщины ледяного покрова (для водоёмов с ледяным покровом в зимний период), что создаёт опреснение верхнего слоя воды после таяния льда;

3) пониженная прозрачность воды, определяемая биологическими и гидрохимическими процессами, приводящая к нагреванию слоя водоёма выше хемоклина.

Авторы выражают благодарность сотрудникам лаборатории водных экосистем ИПР-ЭК СО РАН за оказанную помощь при проведении натурных исследований.

Список литературы

1. Франк-Каменецкий А. Г. Промышленная эксплуатация Доронинского содового озера. Сибирский краевой научно-исследовательский съезд. Т. II. Доклады секции «Недра». Новосибирск, 1928. С. 271–279.

2. Бордонский Г. С., Крылов С. Д. Миграция солевых включений в ледяных покровах озёр Забайкалья // Известия АН. Серия географическая. 2000. № 4. С. 98–102.

3. Lukyanov P. Y., Petrov O. I., Gurulev A. A., Orlov A. O. et al. All Season Observations of Meromictic Regime at Lake Doroninskoye // *Acta Geologica Sinica (English Edition)*. 2014. V. 88. Supp. 1. P. 20–22.
4. Заварзин Г. А., Жилина Т. Н. Содовые озёра – природная модель древней биосферы континентов // *Природа*. 2000. № 2. С. 45–55.
5. Замана Л. В., Борзенко С. В., Бордонский Г. С., Крылов С. Д. [и др.]. Кремний в ледяном покрове озер Забайкалья // *Доклады РАН*. 2005. Т. 401. № 2. С. 248–251.
6. Борзенко С. В., Замана Л. В. Восстановленные формы серы в рапе содового озера Доронинское (Восточное Забайкалье) // *Геохимия*. 2011. № 3. С. 268–276.
7. Бордонский Г. С., Гурулев А.А., Кантемиров Ю.И., Орлов А.О. [и др.]. Радиолокационное исследование ледяного покрова озера Доронинского // *Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса*. 2013. Т. 10. № 4. С. 289–297.
8. Бордонский Г. С. Тепловое излучение ледяного покрова пресных водоёмов. Новосибирск. Наука. 1990. 104 с.
9. Boehrer V., Schultze M. Stratification of lakes // *Reviews of Geophysics*. V. 46. Iss. 2. 27 p.
10. Шварцев С. Л., Исупов В. П., Владимиров А. Г., Колпакова М. Н. [и др.]. Литий и уран в бессточных озёрах Западной Монголии // *Химия в интересах устойчивого развития*. 2012. Т. 20. № 1. С. 43–48.
11. Слейбо У., Персонс Т. *Общая химия*. М.: Наука, 1976. 552 с.
12. Lukyanov P. Y., Petrov O. I., Schegrina K. A. Synergistic structures of meromictic lakes ice covers of Transbaikalia // *Issues of Geography and Geocology*. 2014. № 2. P. 20–25.
13. Belkova N. L., Matyugina E. B. Vertical distribution of bacteria in Doroninskoe lake (Zabaikalie, Russia): Paradigm of Dominance // *Acta Geologica Sinica (English Edition)*. 2014. V. 88. Supp. 1. P. 53–55.
14. Юргенсон Г. А., Серебренникова Н. В., Котова Е. Н. Гейлюссит Доронинского содового озера, Восточное Забайкалье, Россия // *Литосфера*. 2011. № 2. С. 128–134.

References

1. Frank-Kamenetskii A. G. Promyshlennaya ekspluatatsiya Doroninskogo sodovogo ozera. Sibirskii kraevoi nauchno-issledovatel'skii s"ezd. T. II. Doklady sektsii «Nedra». Novosibirsk, 1928. S. 271–279.
2. Bordonskii G. S., Krylov S. D. Migratsiya solevykh vklyuchenii v ledyanykh pokrovakh ozer Zabaikal'ya // *Izvestiya AN. Seriya geograficheskaya*. 2000. № 4. S. 98–102.
3. Lukyanov P. Y., Petrov O. I., Gurulev A. A., Orlov A. O. et al. All Season Observations of Meromictic Regime at Lake Doroninskoye // *Acta Geologica Sinica (English Edition)*. 2014. V. 88. Supp. 1. P. 20–22.
4. Zavarzin G. A., Zhilina T. N. Sodovye ozera – prirodnyaya model' drevnei biosfery kontinentov // *Priroda*. 2000. № 2. S. 45–55.

5. Zamana L. V., Borzenko S. V., Bordonskii G. S., Krylov S. D. [i dr.]. Kremnii v ledyanom pokrove ozer Zabaikal'ya // Doklady RAN. 2005. T. 401. № 2. S. 248–251.
6. Borzenko S. V., Zamana L. V. Vosstanovlennye formy sery v rape sodovogo ozera Doroninskoe (Vostochnoe Zabaikal'e) // Geokhimiya. 2011. № 3. S. 268–276.
7. Bordonskii G. S., Gurulev A.A., Kantemirov Yu.I., Orlov A.O. [i dr.]. Radiolokatsionnoe issledovanie ledyanogo pokrova ozera Doroninskogo // Sovremennye problemy distantsionnogo zondirovaniya Zemli iz kosmosa. 2013. T. 10. № 4. S. 289–297.
8. Bordonskii G. S. Teplovoe izluchenie ledyanogo pokrova presnykh vodoemov. Novosibirsk. Nauka, 1990. 104 s.
9. Boehrer B., Schultze M. Stratification of lakes // Reviews of Geophysics. V. 46. Iss. 2. 27 p.
10. Shvartsev S. L., Isupov V. P., Vladimirov A. G., Kolpakova M. N. [i dr.]. Litii i uran v besstochnykh ozerakh Zapadnoi Mongolii // Khimiya v interesakh ustoichivogo razvitiya. 2012. T. 20. № 1. S. 43–48.
11. Sleibo U., Persons T. Obshchaya khimiya. M.: Nauka. 1976. 552 s.
12. Lukyanov P. Y., Petrov O. I., Schegrina K. A. Synergistic structures of meromictic lakes ice covers of Transbaikalia // Issues of Geography and Geocology. 2014. № 2. P. 20–25.
13. Belkova N. L., Matyugina E. B. Vertical distribution of bacteria in Doroninskoe lake (Zabaikalie, Russia): Paradigm of Dominance // Acta Geologica Sinica (English Edition). 2014. V. 88. Supp. 1. P. 53–55.
14. Yurgenson G. A., Serebrennikova N. V., Kotova E. N. Geilyussit Doroninskogo sodovogo ozera, Vostochnoe Zabaikal'e, Rossiya // Litosfera. 2011. № 2. S. 128–134.

Статья поступила в редакцию 19.04.2015

УДК 528.082, 531.714.2
ББК 22.3с

Георгий Степанович Бордонский,
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий лабораторией геофизики криогенеза,
Институт природных ресурсов, экологии и криологии СО РАН,
672000, Россия, г. Чита, ул. Бутина, 26,
e-mail: lgc255@mail.ru

Любовь Дмитриевна Рябова,
ведущий инженер,
Институт природных ресурсов, экологии и криологии СО РАН,
672000, Россия, г. Чита, ул. Бутина, 26,
e-mail: lgc255@mail.ru

Радиочастотный дифференциальный измеритель деформации

Представлен вариант схемы измерителя деформации, использующий радиочастотный способ измерений. Применение кварцевого генератора и дифференциальной схемы измерения при перемещении ферритового сердечника в катушке индуктивности позволили получить высокую стабильность измерителя. Благодаря простоте, большому значению измеряемой деформации (до ± 15 мм) и высокой чувствительности (~ 1 мкм) измеритель удобен для различных измерений.

Ключевые слова: измеритель деформации, радиочастоты, дифференциальный метод.

Georgy Stepanovich Bordonskiy,
Doctor of Physics and Mathematics,
Chief of the Laboratory of Cryogenesis Geophysics,
Institute of Natural Resources, Ecology and Cryology SB RAS,
26, Butina st, Chita, Russia, 672000,
e-mail: lgc255@mail.ru

Lubov Dmitrievna Ryabova,
Lead Engineer,
Institute of Natural Resources, Ecology and Cryology SB RAS,
26, Butina st, Chita, Russia, 672000,
e-mail: lgc255@mail.ru

The RF Differential Strain Gauge

The version of the scheme strain gauge using the RF measurement method is presented. Use of the crystal oscillator circuit and differential measurement when moving ferrite core in inductor do possible to obtain a high stability of the meter. Due to its simplicity, the large value of the measured strain (up to ± 15 mm) and high sensitivity (~ 1 micron) the meter is suitable for measuring different measurement.

Keywords: strain gauge, radio frequencies, differential method.

Для измерения деформации применяются разнообразные датчики, вид которых определяется характером задачи [1; 2]. В частности, используются радиочастотные датчики, в которых деформации связывают с изменением частоты, фазы и амплитуды резонансных

систем [3]. Преимущество таких датчиков, например по сравнению с датчиками механического типа, заключается в том, что для них, как правило, не требуются значительные усилия на закреплённые опоры, они могут использоваться в бесконтактных системах, обладают высокой чувствительностью и большим интервалом измеряемой величины. Однако радиочастотные датчики более сложны по конструкции, требуют температурной стабилизации элементов схемы.

От таких недостатков в значительной степени свободны дифференциальные датчики. В настоящей работе представлен вариант радиочастотного датчика деформации, в котором для достижения стабильности использована специальная дифференциальная схема регистрации деформации при перемещении ферритового сердечника в катушке индуктивности. Особенности функционирования устройства поясняются на рис. 1.

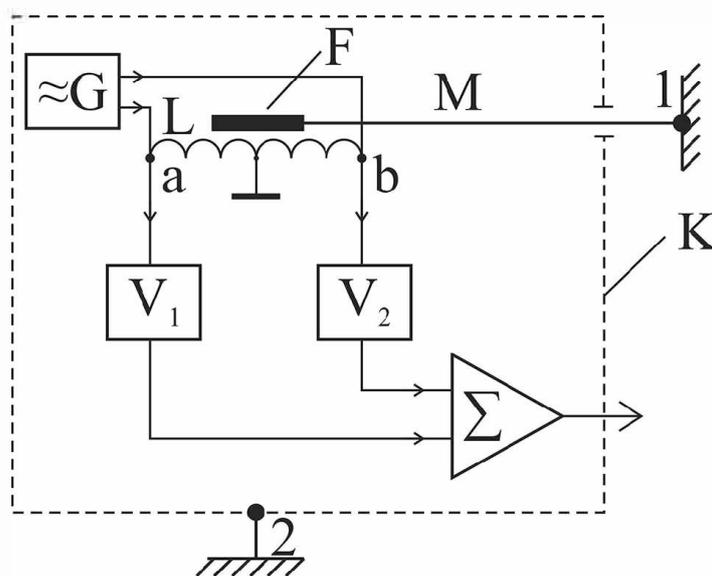


Рис. 1. Принципиальная схема дифференциального радиочастотного измерителя деформации. G – кварцевый генератор, L – катушка индуктивности, F – ферритовый сердечник, M – тонкий стальной стержень, $V_{1,2}$ – противофазные выпрямители, Σ – суммирующий усилитель, 1, 2 – точки крепления корпуса измерителя и точка опоры, между которыми выполняется измерение деформации

Сигнал от высокочастотного генератора G, стабилизированного кварцевым резонатором, с симметричного выхода подаётся на катушку индуктивности L, средняя точка которой заземлена. В катушке вблизи её средней части расположен ферритовый сердечник F, который может в ней свободно перемещаться. Сердечник соединён с опорой 1 тонким стальным стержнем M. Катушка индуктивности вместе с платой и корпусом прибора крепится в точке 2 изучаемого объекта.

Деформация измеряется между точками 1 и 2 при перемещении сердечника в катушке, что приводит к изменениям индуктивности частей катушки при сохранении её суммы. В результате сдвига сердечника и изменения импеданса частей катушки в точках (a) и (b) на её концах, по отношению к заземлённой центральной точке, происходит изменение амплитуды переменного синусоидального напряжения. Высокочастотное напряжение далее детектируется выпрямительными узлами V_1 и V_2 , которые формируют постоянное напряжение различного знака. Выпрямленные напряжения поступают на суммирующий усилитель Σ . Усиленное напряжение, пропорциональное деформации изучаемого объекта между точками 1 и 2, поступает на выход измерителя.

Реализация описываемого измерителя выполнена на стандартных схемах [4]. Формирователь синусоидального напряжения состоит из кварцевого генератора на частоту 9 МГц, развязывающего каскада на транзисторе с симметричным выходом и катушки, на которой происходит преобразование перемещения сердечника в приращение амплитуд переменного напряжения, которые далее сравниваются с использованием низкочастотной схемы. Выходные напряжения с точек а и б поступают на развязывающие каскады на полевых транзисторах. Выпрямители $V_{1,2}$ выполнены на детекторных диодах. Далее, выпрямленные напряжения различной полярности поступают на суммирующий усилитель на микросхеме операционного усилителя.

В устройстве могут быть применены любые высокочастотные транзисторы, детекторные диоды и операционный усилитель. Параметр L – не критичен. Частота кварцевого генератора может выбираться в пределах 5–15 МГц. В конструкции была использована катушка, намотанная на пластмассовом каркасе с канавками с шагом 0,6 мм проводом в эмалевой изоляции диаметром 0,2 мм. Диаметр каркаса 15,5 мм, длина намотки 31 мм, число витков 52. В катушку вставляли ферритовый стержень длиной 15 мм и диаметром 6 мм, начальная магнитная проницаемость феррита 1000. На стержень надевали гибкую трубку с таким расчётом, чтобы он мог свободно перемещаться внутри катушки. Трубка соединялась со стальным стержнем диаметром 1,5 мм. Длина стержня выбирается исходя из размеров изучаемого объекта, он может быть изготовлен и из диэлектрического материала с низким коэффициентом теплового расширения. Корпус измерителя изготовлен из оцинкованного железа для экранирования от внешних полей и защиты схемы от внешних воздействий.

Для выбранных параметров установки пределы линейной связи выходного напряжения и смещения сердечника составляли ± 4 мм. Работоспособность датчика сохранялась в интервале смещений ± 15 мм. Чувствительность датчика составляла 660 мВ/мм, уровень собственных флуктуаций (стандартное отклонение) при постоянной времени внешней измерительной системы 0,2 с составил 0,5 мВ, что позволяло измерять быстрые изменения деформации до 0,8 мкм (без учёта изменения длины стержня M при колебаниях температуры окружающей среды). Температурный дрейф выходного напряжения без подбора диодов $D_{1,2}$ по идентичности вольтамперной характеристики при комнатной температуре составил 5 мВ/град, т. е. при изменении температуры измерителя на 10°C дополнительная ошибка измерения составит 8 мкм, поэтому для достижения точности 1 мкм требуется стабилизация температуры на уровне $\pm 0,10^\circ\text{C}$ или учёт её вариаций. Требуемая стабильность напряжений питания 0,1 %.

Установка измерителя заключается в подборе положения ферритового стержня, при котором выходное напряжение близко к нулю. Для контроля баланса при закреплении стержня в точке 1 используют вольтметр, подключая его к выходу измерителя.

Устройство было использовано для измерений в полевых условиях деформаций ледяного покрова пресного озера в течение нескольких недель в конце зимнего периода. При расстоянии между опорными точками 0,5 м уверенно регистрировались суточные и скачкообразные деформации ледяного покрова, достигающие на этой длине $\sim 0,3$ мм. В неблагоприятных погодных условиях (снегопады, оттепели) датчик показал более надёжную работу, чем механический датчик с натянутой струной из-за её натяжения и дрейфа точек крепления при подтаивании льда. На рис. 2. приведён пример записи деформаций.

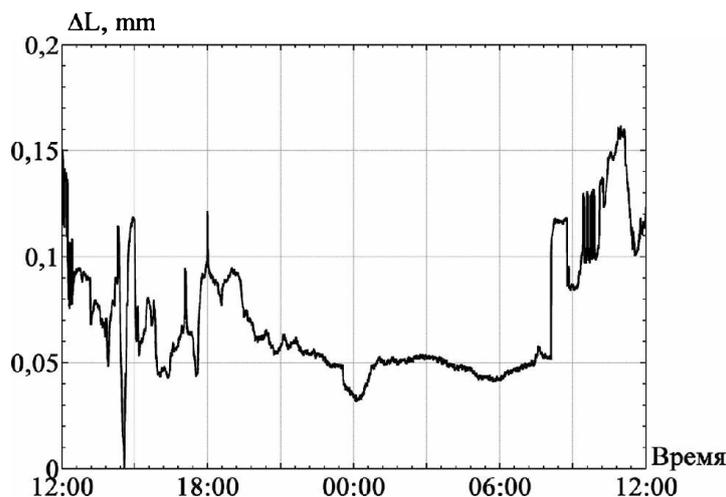


Рис. 2. Запись деформации ледяного покрова оз. Арахлей. 03-04 апреля 2012 г.

Преимущество разработанного датчика заключается также в отсутствии повреждений при возникновении деформаций, существенно превышающих пределы его измерений.

Список литературы

1. Харт Х. Введение в измерительную технику. М.: Мир, 1999. 391 с.
2. Дивин А. Г., Пономарёв С. В., Мозгова Г. В. Методы и средства испытаний и контроля. Тамбов: Изд-во ТГТУ, 2012. Ч. 2. 108 с.
3. Арш Э. И. Автогенераторные методы и средства измерений. М.: Машиностроение, 1979. 256 с.
4. Хоровиц П., Хилл У. Искусство схемотехники. М.: Мир, 1984. Т. 1. 598 с.

References

1. Khart Kh. Vvedenie v izmeritel'nyuyu tekhniku. M.: Mir, 1999. 391 s.
2. Divin A. G., Ponomarev S. V., Mozgova G. V. Metody i sredstva ispytaniy i kontrolya. Tambov: Izd-vo TGTU, 2012. Ch. 2. 108 s.
3. Arsh E. I. Avtogeneratednyye metody i sredstva izmereniy. M.: Mashinostroenie, 1979. 256 s.
4. Khorovits P., Khill U. Iskusstvo skhemotekhniki. M.: Mir, 1984. T. 1. 598 s.

Статья поступила в редакцию 19.04.2015

УДК 621.89:669.018.715
ББК 34:38.3

Павел Андреевич Быков,
младший научный сотрудник,
Институт металлургии и материаловедения им. А. А. Байкова
Российской академии наук,
119991, Россия, г. Москва, Ленинский просп., 49,
e-mail: pavel_imet@mail.ru

Игорь Евгеньевич Калашников,
доктор технических наук, ведущий научный сотрудник,
Институт металлургии и материаловедения им. А. А. Байкова
Российской академии наук,
119991, Россия, г. Москва, Ленинский просп., 49,
e-mail: kalash2605@mail.ru

Людмила Константиновна Болотова,
старший научный сотрудник,
Институт металлургии и материаловедения им. А. А. Байкова
Российской академии наук,
119991, Россия, г. Москва, Ленинский просп., 49,
e-mail: l.bolotova@mail.ru

Любовь Ивановна Кобелева,
кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник,
Институт металлургии и материаловедения им. А. А. Байкова
Российской академии наук,
119991, Россия, г. Москва, Ленинский просп., 49, e-mail: likob@mail.ru

Алексей Георгиевич Колмаков,
доктор технических наук, заместитель директора,
Институт металлургии и материаловедения им. А. А. Байкова
Российской академии наук,
119991, Россия, г. Москва, Ленинский просп., 49,
e-mail: kolmakov@imet.ac.ru

Определение износа и построение карт трения при трибологических испытаниях алюмоматричных композиционных материалов¹

В статье представлены результаты испытаний дисперсно-упрочнённых алюмоматричных композиционных материалов в условиях сухого трения скольжения. Определена интенсивность изнашивания образцов разных составов в зависимости от нагрузки и скорости скольжения. Составлены карты трения, определяющие механизмы изнашивания в процессе испытания.

Ключевые слова: композиционные материалы, керамические частицы, интерметаллидные фазы, сухое трение скольжения, интенсивность изнашивания, карты трения.

¹Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ (грант № 14-08-90011 Бел_а).

Pavel Andreyevich Bykov,

Researcher,

*Institute of Metallurgy and Material Science A. A. Baykov,
the Russian Academy of Science,
119991, Moscow, Leninsky Pr., 49,
e-mail: pavel_imet@mail.ru*

Igor Evgenyevich Kalashnikov,

Doctor of Technical Sciences, Leading Researcher,

*Institute of Metallurgy and Material Science A. A. Baykov,
the Russian Academy of Science,
119991, Moscow, Leninsky Pr., 49,
e-mail: kalash2605@mail.ru*

Lyudmila Konstantinovna Bolotova,

Senior Researcher,

*Institute of Metallurgy and Material Science A. A. Baykov,
the Russian Academy of Science,
119991, Moscow, Leninsky Pr., 49,
e-mail: l.bolotova@mail.ru*

Lubov Ivanovna Kobeleva,

Candidate of Technical Sciences, Leading Researcher,

*Institute of Metallurgy and Material Science A. A. Baykov,
the Russian Academy of Science,
119991, Moscow, Leninsky Pr., 49,
e-mail: likob@mail.ru*

Alexey Georgievich Kolmakov,

Doctor of Technical Sciences, Deputy Director,

*Institute of Metallurgy and Material Science A. A. Baykov,
the Russian Academy of Science,
119991, Moscow, Leninsky Pr., 49,
e-mail: kolmakov@imet.ac.ru*

Determination of Wear and Compilaiton of Wear Maps in Tribological Test of Aluminum-Matrix Composites¹

The article presents the results of tests of dispersion reinforced aluminum matrix composites under dry sliding friction. There was determined the wear rate of the samples of different compositions in depending on the load and sliding velocity. There were compiled the wear maps determining the mechanisms of wear during the test.

Keywords: composite materials, ceramic particles, inter-metallic phases, dry sliding friction, wear intensity, wear maps.

Введение. Одно из перспективных направлений в разработке новых конструкционных материалов – создание гетерогенных структур, представляющих собой различным образом организованные композиции из армирующих наполнителей и связующих. Объединение в одном материале веществ различного химического состава и свойств, в частности пластичных металлических матриц и высокомодульных керамических наполнителей, позволяет выйти на принципиально новый уровень эксплуатационных характеристик.

Последние годы характеризуются заметным успехом в совершенствовании технологий и промышленном освоении композиционных материалов (КМ). Это касается в первую очередь дисперсно-армированных КМ на базе алюминиевых сплавов [1]. Помимо специальных

¹The research is performed with the financial support of RFFR (project # 14-08-90011 Bel_a).

свойств достоинством таких КМ является малый удельный вес, возможность многократного восстановления путём поверхностной обработки или повторных переплавов, относительная дешевизна. Так, стоимость алюмоматричных антифрикционных КМ примерно в 5 раз ниже стоимости подшипниковых сплавов на основе меди, а вес подшипниковых вкладышей из КМ в 2,5 раза ниже медных. Номенклатура ответственных изделий машиностроения, где целесообразна замена традиционных антифрикционных материалов на КМ, включает детали подвижных сопряжений, к которым предъявляются требования высокой несущей способности и износостойкости: втулки, вкладыши, опорные подшипники и пр. Однако при использовании КМ в узлах трения скольжения целенаправленному выбору состава и технологии КМ должно предшествовать исследование закономерностей трибологического поведения материалов при различных видах нагружения, позволяющее осуществить прогнозирование работоспособности узлов трения [7]. Согласно [3], изнашивание деталей машин в результате процесса трения является причиной выхода из строя более 80 % деталей механизмов. Изнашивание КМ имеет ряд особенностей [6]. В общем случае наличие в пластичных металлических матрицах твёрдых дисперсных частиц повышает износостойкость сплавов. Увеличение содержания и размера армирующих частиц в КМ ведёт к уменьшению в общей поверхности трения площади участков матрицы, склонной к схватыванию. Высокопрочные частицы защищают матрицу от механического уноса материала, что ведёт к уменьшению изнашивания КМ. Гетерогенность КМ способствует расширению области существования во фрикционном контакте так называемых вторичных структур, обеспечивающих протекание процессов трения и изнашивания в широком диапазоне параметров нагружения [2]. В зависимости от свойств контактирующих тел, состава окружающей среды, характера и режима нагружения, трущиеся элементы деталей подвергаются тому или другому виду изнашивания. При выборе материалов для триботехнического сопряжения важно выделить ведущий вид изнашивания, реализующийся при определённых характерных для него соотношениях взаимодействия между контактирующими телами, поверхностями трения и окружающей средой. Согласно [8], весь процесс трения КМ разделён на несколько этапов. На первом этапе происходит приработка, для которой в большинстве случаев характерно абразивное изнашивание за счёт неровностей контртела и выкрашивающихся из матрицы армирующих частиц. Далее характер трения зависит от нагрузок. В общем случае введение в сплавы частиц увеличивает критическую нагрузку и скорость скольжения, при которых изнашивание изменяется от умеренного абразивного или окислительного к интенсивному усталостному или адгезионному. При невысоких нагрузках это «мягкое трение» – окислительный механизм изнашивания, при котором происходит образование и отслаивание окисных плёнок. В области высоких нагрузок возникает «жёсткое трение», для которого характерны усталостное разрушение, развитие адгезии. При этом режиме возникают металлические связи между матрицей КМ и контртелом, что вызывает интенсивную пластическую деформацию сдвигом и схватывание.

Данные исследования проводили для изучения влияния нагрузки и скорости скольжения на смену режимов трения КМ различного состава на основе алюминиевой матрицы. Метод карт применяли для отображения изменений механизмов изнашивания.

Материалы и методы исследования. Исследования проводили на образцах из технически чистого алюминия и КМ на его основе, упрочнённых частицами керамики и интерметаллидными фазами, сформированными в процессе реакционного литья [5]. КМ изготавливали механическим замешиванием дискретных наполнителей и реакционно-активных металлических порошков в алюминиевый расплав. В качестве наполнителя использовали частицы карбида кремния зелёного размером 40 мкм (ГОСТ 26327-84), в качестве реакционно-активных добавок применяли порошок титана размером 200–400 мкм. При изготовлении образцов КМ, армированных интерметаллидными фазами, в расплав алюминия вводили

порошок титана, перемешивали в течение 1 мин и выдерживали 20 мин. Согласно [4] этого времени достаточно для протекания экзотермической реакции и образования *in-situ* блочных интерметаллидов, преимущественно состава Al_3Ti . При изготовлении образцов состава $Al+5 \text{ мас. \% } Ti + 5 \text{ мас. \% } SiC$ порошки титана и частицы карбида кремния перемешивали в массообменном аппарате и подготовленную смесь вводили в расплав. Технологические режимы изготовления образцов КМ имели следующие параметры: температура расплава $850 \text{ }^\circ C$, время перемешивания 1 мин, скорость вращения импеллера 300 об/мин. После удаления окисной плёнки композиционные расплавы разливали в графитовые формы, диаметром 30 мм. Для проведения трибологических испытаний были изготовлены образцы: Al (технически чистый алюминий); $Al - Al_3Ti$ (при введении в Al расплав 5 мас. % Ti порошка); $Al - SiC$ (армирование 5 мас. % карбидом кремния) и полиармированные образцы $Al - Al_3Ti - SiC$ (с шихтовым составом $Al+5 \text{ мас. \% } Ti + 5 \text{ мас. \% } SiC$).

Микроструктуру КМ анализировали на оптическом микроскопе Лейка *DM ILM*, оснащённом программой *Qwin* для определения объёмного содержания и размера фаз.

Образцы КМ испытывали в условиях сухого трения скольжения на установке МТУ-01 (ТУ 4271-001-29034600-2004) по схеме осевого нагружения: вращающаяся втулка (контртело) из стали 45 ($HRC > 45$) против неподвижного диска (КМ) с коэффициентом перекрытия 1. Размеры стальной втулки: внутренний диаметр 11,8 мм, наружный диаметр 15,8 мм. Диск из КМ вырезали из отливки. Размер диска: диаметр 30 мм, толщина 10 мм. Скорость вращения втулки составляла 280, 540 и 870 об/мин, что соответствует скоростям скольжения 0,19, 0,37 и 0,59 м/с. Осевую нагрузку P изменяли от 18 до 140 Н (0,212 — 1,65 МПа). Время испытаний при каждой нагрузке составляло 10 мин. Испытания проводили на воздухе при температуре $20 \pm 1 \text{ }^\circ C$ и влажности $60 \pm 4 \text{ \%}$.

Потерю массы Δm определяли по изменению веса испытываемого образца и контртела путём взвешивания до и после испытания на аналитических весах с точностью $\pm 0,00005$ г. Для исключения систематических ошибок все измерения выполняли на одном и том же приборе. Интенсивность изнашивания определяли по формуле $Im = \Delta m/L$, где L — путь трения.

Результаты и обсуждение. На рис. 1 представлены структуры образцов КМ с различными армирующими наполнителями. Видно, что структура образцов КМ с шихтовым составом $Al-5 \text{ мас. \% } Ti$ состоит из матричного твёрдого раствора и включений интерметаллидов Al_3Ti , которые при выдержке расплава до разлива 20 мин приобретают блочную форму со средним размером 10 мкм и расположены в центре зерна матрицы. Полученные реакционным литьём КМ имеют максимальный уровень связи по поверхностям раздела, обусловленный малым решёточным несоответствием фаз и наличием полукогерентных межфазных границ, термическую стабильность, лучшее распределение и дисперсность армирующих фаз. Структура КМ с шихтовым составом $Al+5 \text{ мас. \% } SiC$ состоит из матричного твёрдого раствора и частиц карбида кремния, которые благодаря предварительному прокаливанию, выдержке с перемешиванием в расплаве относительно равномерно распределены в матрице. В КМ с шихтовым составом $Al+5 \text{ мас. \% } Ti + 5 \text{ мас. \% } SiC$ присутствуют интерметаллидные включения Al_3Ti ($\sim 15 \text{ об. \%}$) и частицы карбида кремния. Распределение наполнителей в матрице определяется схемой кристаллизации КМ: сформированные в реакции *in-situ* интерметаллиды — в центре зёрен алюминиевой матрицы; частицы SiC , оттесняемые растущими кристаллами $\alpha - Al$ — на границах зёрен. Известно, что экзотермические реакции, происходящие при синтезировании новых фаз в процессах реакционного литья, улучшают смачивание и тем самым позволяют улучшить усвоение и распределение армирующих керамических наполнителей в КМ.

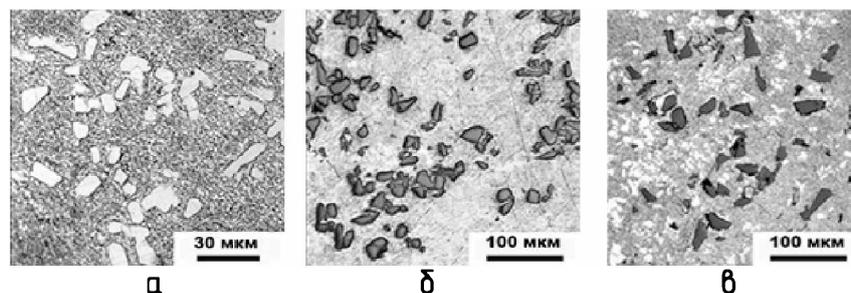


Рис. 1. Микроструктура образцов шихтового состава:
 а – Al+5 мас. %Ti, б – Al+5 мас. %SiC, в – Al+5 мас. %Ti + 5 мас. %SiC

На рис. 2 приведены результаты определения интенсивности изнашивания при испытании образцов на трение скольжения в зависимости от приложенной нагрузки. При всех скоростях скольжения интенсивность изнашивания возрастает с увеличением нагрузки. При достижении определённой критической нагрузки происходит резкое увеличение интенсивности изнашивания, причём при увеличении скорости скольжения для такого изменения требуется меньшая нагрузка. На рис. 2 этот процесс обозначен знаком «стрелка». Такое резкое увеличение интенсивности изнашивания говорит об изменении режима изнашивания. Введение в матрицу армирующих частиц увеличивает критическую нагрузку во всем диапазоне скоростей, причём наилучшим образом на сопротивлении изнашиванию сказывается полиармирование, т. е. одновременное упрочнение матричного сплава частицами SiC и интерметаллидными фазами. Так, при скорости скольжения 0,19 м/с критическая нагрузка для образца из алюминия составляет 28 Н (рис. 2а), армирование матрицы 5 мас. % частиц SiC сдвигает её значение до 80 Н (рис. 2, б). При введении в расплав 5 мас. % порошка Ti , образование в матрице интерметаллидных фаз (около 15 об. %) увеличивает значение критической нагрузки до 90 Н (рис. 2в). Присутствие в КМ двух наполнителей SiC и Al_3Ti увеличивает её значение до 130 Н (рис. 2г). Такая же тенденция изменения интенсивности изнашивания наблюдается и при других скоростях скольжения.

Различия в величине износостойкости определяются объёмным содержанием армирующих фаз, их размером, распределением в матрице, качеством связи с матрицей и твёрдостью. Твёрдые частицы SiC (3600 HV) размером 40 мкм в процессе трения выступают в качестве опор, эффективно воспринимающих осевую нагрузку и защищающих матрицу от схватывания и механического разрушения. С другой стороны, низкая прочность связи по межфазным границам SiC /матрица приводит к выкрашиванию керамических частиц, что отражается на уровне Im. Интерметаллидные включения Al_3Ti (300 HV [8]), образовавшиеся в результате реакции *in-situ* при введении титана в матрицу, также препятствуют изнашиванию алюминиевой матрицы [9]. Их большое объёмное содержание, однородность распределения в матрице и прочная связь по межфазным границам обеспечивают низкий уровень интенсивности изнашивания при малых скоростях скольжения. Наиболее высокая износостойкость отмечена на полиармированных образцах (Al – Al_3Ti – SiC).

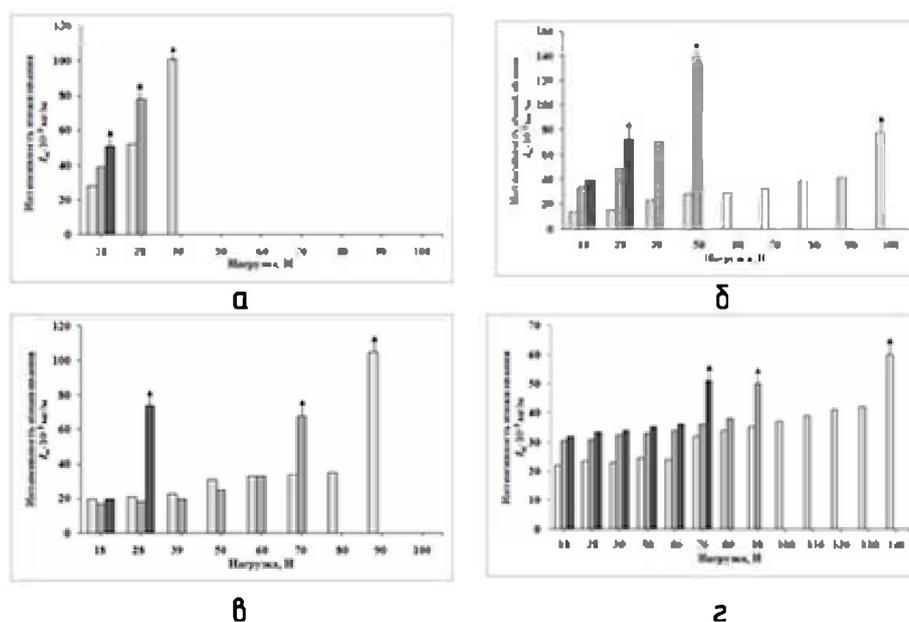


Рис. 2. Интенсивность изнашивания I_m в зависимости от нагрузки при трении образцов: Al (а), $Al - Al_3Ti$ (б), $Al - SiC$ (в), $Al - Al_3Ti - SiC$ (г). Скорости скольжения $v - 0,19$ м/с, $v - 0,37$ м/с, $v - 0,59$ м/с. Стрелкой обозначен переход в задиp

Различия в величине износостойкости определяются объёмным содержанием армирующих фаз, их размером, распределением в матрице, качеством связи с матрицей и твёрдостью. Твёрдые частицы SiC ($3600 HV$) размером $40 \mu\text{m}$ в процессе трения выступают в качестве опор, эффективно воспринимающих осевую нагрузку и защищающих матрицу от схватывания и механического разрушения. С другой стороны, низкая прочность связи по межфазным границам SiC /матрица приводит к выкрашиванию керамических частиц, что отражается на уровне I_m . Интерметаллидные включения Al_3Ti ($300 HV$ [8]), образовавшиеся в результате реакции *in-situ* при введении титана в матрицу, также препятствуют изнашиванию алюминиевой матрицы [9]. Их большое объёмное содержание, однородность распределения в матрице и прочная связь по межфазным границам обеспечивают низкий уровень интенсивности изнашивания при малых скоростях скольжения. Наиболее высокая износостойкость отмечена на полиармированных образцах ($Al - Al_3Ti - SiC$).

По результатам испытаний процесс трения КМ можно разделить на два режима трения, а именно режим мягкого и жёсткого трения. Эти режимы могут быть представлены с помощью карты трения (рис. 3). Карта построена в координатах осевой нагрузки и скорости скольжения. Для построения границ перехода от мягкого режима к жёсткому были использованы данные по критическим нагрузкам при оценке изнашивания (рис. 2). Видны условия, которые обеспечивают режимы мягкого трения при испытании КМ различных составов. Важно отметить, что смена режимов для каждого представленного состава КМ происходит при одном и том же значении интенсивности изнашивания при различных комбинациях прилагаемой нагрузки и скорости скольжения (рис. 3). Очевидно также, что армирование частицами SiC более эффективно в плане расширения диапазона трибонагружения, чем армирование интерметаллидными фазами.

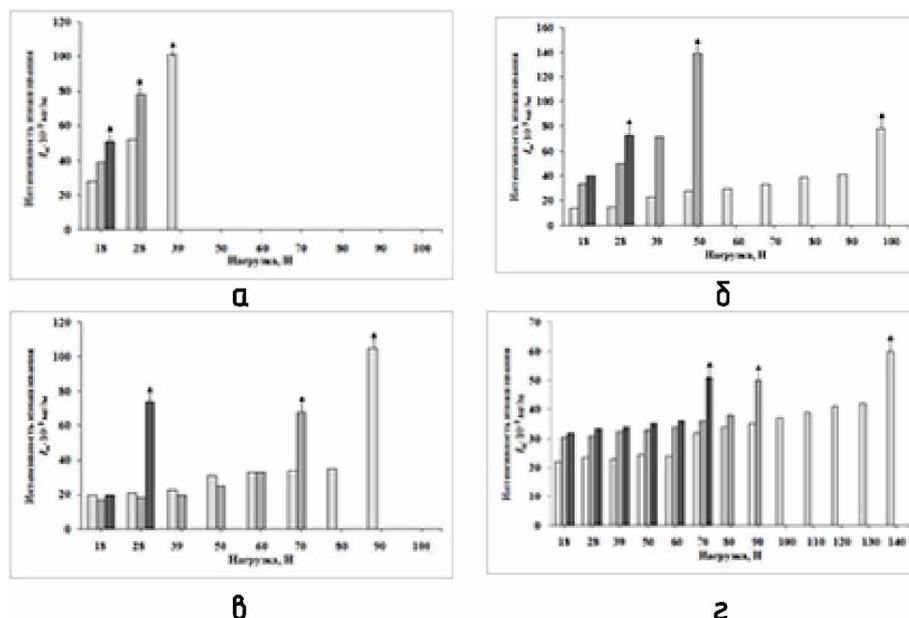


Рис. 3. Карта трения образцов КМ. Цифры при точках на карте показывают величину интенсивности изнашивания $I_m \cdot 10^{-3}$ мг/м

Заключение. Проведены испытания на сухое трение скольжения образцов из технического чистого алюминия и КМ на его основе, упрочнённых частицами керамики и интерметаллидными фазами. Исходя из результатов испытаний, процесс сухого трения скольжения КМ против контртела из стали 45 характеризуется двумя основными режимами, определяемыми как мягкое и жёсткое трение. Об изменении режима трения с мягкого на жёсткий можно судить по резкому возрастанию интенсивности изнашивания. Переход от режима мягкого трения к жёсткому режиму сопровождается резким возрастанием интенсивности изнашивания. Введение в матричный сплав твёрдых тугоплавких частиц сдвигает точку смены режимов изнашивания в область более высоких нагрузок. Армирование керамическими частицами SiC более эффективно расширяет диапазон трибонагружения, чем армирование интерметаллидными фазами. Наибольшее сопротивление изнашиванию имеют образцы КМ с полиармированием. Определены области режимов трения и условия трибонагружения, которые предпочтительны при использовании КМ исследованных составов.

Список литературы

1. Калашников И. Е., Чернышова Т. А., Болотова Л. К.. Применение жидкофазных технологий и принципов многоуровневого упрочнения при создании композиционных материалов функционального назначения // Институту металлургии и материаловедения им. А. А. Байкова РАН – 75 лет: сб. науч. тр. под ред. академика К. А. Солнцева. М.: Интерконтакт Наука, 2013. С. 343–354.
2. Костецкий Б. И. Трение, смазка и износ в машинах. Киев: Техника, 1970. 396 с.
3. Ксеневич И. П. Триботехника и проблемы прикладной механики наземных мобильных машин // Приводная техника. 2003. Т. 45. №5. С. 2–5.
4. Чернышова Т. А., Болотова Л. К., Калашников И. Е., Кобелева Л. И., Быков П. А. Влияние тугоплавких наночастиц на модификацию структуры металлматричных композитов // Металлы. 2007. №3. С. 79–84.
5. Чернышова Т. А., Калашников И. Е. Реакционное литье и модифицирование алюмоматричных композиционных материалов // Литейщик России. 2012.

№ 9. С. 19–22.

6. Чернышова Т. А., Кобелева Л. И., Калашников И. Е., Болотова Л. К. Новые алюмоматричные композиционные материалы триботехнического назначения: принципы создания и перспективы // Институту металлургии и материаловедения 70 лет: сб. науч. тр. под ред. ак. К. А. Солнцева. М.: Интерконтакт Наука, 2008. С. 385–404.

7. Чернышова Т. А., Михеев Р. С., Калашников И. Е., Акимов И. В., Харламов Е.И. Разработка и апробация композиционных материалов систем $Al - SiC$, $Al - TiC$ в узлах трения нефтедобывающего оборудования // Физика и химия обработки материалов. 2010. № 5. С. 78–86.

8. Axen N., Jacobson S. A model for the Abrasive Wear Resistanse of Multiphase Materials // Wear. 1994. V. 174. P. 127–199.

9. Tee K. L., Lu, Lai M. O. Wear performance of in situ Al-TiB₂ composit. // Wear. 2000. V. 240. P. 59–64.

References

1. Kalashnikov I. E., Chernyshova T. A., Bolotova L. K.. Primenenie zhidkofaznykh tekhnologii i printsipov mnogourovneвого uprochneniya pri sozdanii kompozitsionnykh materialov funktsional'nogo naznacheniya // Institut metallurgii i materialovedeniya im. A. A. Baikova RAN – 75 let: sb. nauch. tr. pod red. akademika K. A. Solntseva. M.: Interkontakt Nauka, 2013. S. 343–354.

2. Kostetskii B. I. Trenie, smazka i iznos v mashinakh. Kiev: Tekhnika, 1970. 396 s.

3. Ksenevich I. P. Tribotekhnika i problemy prikladnoi mekhaniki nazemnykh mobil'nykh mashin // Privodnaya tekhnika. 2003. T. 45. №5. S. 2–5.

4. Chernyshova T. A., Bolotova L. K., Kalashnikov I. E., Kobleva L. I., Bykov P. A. Vliyanie tugoplavkikh nanochastits na modifikatsiyu struktury metallomatrichnykh kompozitov // Metally. 2007. №3. S. 79–84.

5. Chernyshova T. A., Kalashnikov I. E. Reaktsionnoe lit'e i modifitsirovanie alyumomatrichnykh kompozitsionnykh materialov // Liteishchik Rossii. 2012. № 9. S. 19–22.

6. Chernyshova T. A., Kobleva L. I., Kalashnikov I. E., Bolotova L. K. Novye alyumomatrichnye kompozitsionnye materialy tribotekhnicheskogo naznacheniya: printsipy sozdaniya i perspektivy // Institutu metallurgii i materialovedeniya 70 le»: sb. nauch. tr. pod red. ak. K. A. Solntseva. M.: Interkontakt Nauka, 2008. S. 385–404.

7. Chernyshova T. A., Mikheev R. S., Kalashnikov I. E., Akimov I. V., Kharlamov E.I. Razrabotka i aprobatsiya kompozitsionnykh materialov sistem $Al - SiC$, $Al - TiC$ v uzлах treniya nefte dobyvayushchego oborudovaniya // Fizika i ximiya obrabotki materialov. 2010. № 5. S. 78–86.

8. Axen N., Jacobson S. A model for the Abrasive Wear Resistanse of Multiphase Materials // Wear. 1994. V. 174. R. 127–199.

9. Tee K. L., Lu, Lai M. O. Wear performance of in situ Al-TiB₂ composit. // Wear. 2000. V. 240. R. 59–64.

Статья поступила в редакцию 05.05.2015

Ирина Анатольевна Ефимова,
кандидат физико-математических наук, доцент,
Забайкальский институт предпринимательства,
672086, Россия, г. Чита, ул. Ленинградская, 16,
e-mail: yefimova79@yandex.ru

**О решении краевых задач для уравнения Лапласа
в полуплоскости с неограниченными граничными функциями.
Метод квазиинтегралов Фурье¹**

Рассмотрена третья краевая задача в полуплоскости с достаточно гладкой граничной функцией, которая в бесконечности имеет произвольный степенной рост. Решение задачи получено в виде квазиинтеграла Фурье с классическими коэффициентами Фурье от n -ой производной граничной функции. Полученные результаты позволяют решать краевые задачи с особыми точками в бесконечности.

Ключевые слова: краевые задачи с неограниченными граничными функциями, метод квазиинтегралов Фурье.

Irina Anatolyevna Efimova,
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor,
Transbaikal Institute of Entrepreneurship
16, Leningradskaya St., Chita, Russia, 672086,
e-mail: yefimova79@yandex.ru

**On the Solution of Boundary Value Problems for the Laplace
Equation in the Half-Plane with Unbounded Boundary Functions.
The Method of Quasi-Integrals of Fourier²**

The third boundary value problem in the half-plane with sufficiently smooth boundary function which at infinity is an arbitrary polynomial growth was considered. The solution of the problem is obtained in the form of quasi-integral Fourier with classical Fourier coefficients of the n -th derivative of the boundary function. The results allow solving boundary value problems with singular points at infinity.

Keywords: boundary value problems with unbounded boundary functions, method of quasi-integrals of Fourier.

Одним из мощных методов решения краевых задач математической физики является метод разделения переменных – метод Фурье, позволяющая представлять заданные и искомые функции по единым формулам с последующим определением коэффициентов Фурье искомого решения из граничных условий, условий сопряжения и т. д. Однако при решении задач методом Фурье в неограниченных областях заданные функции должны удовлетворять достаточно сильным ограничениям в бесконечности [1, с. 524], что сужает класс решаемых задач. Например, граничная функция $f(x)$, стремящаяся к различным конечным

¹Работа выполнена в рамках Государственного задания вузу Министерства образования и науки Российской Федерации (проект 2014/255 НИР 2603.14).

²The work was performed as part of the State Task to University of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (project 2014/255 research 2603.14).

или бесконечным пределам при $x \rightarrow -\infty$ и $x \rightarrow +\infty$, не разлагается в интеграл Фурье. Кроме того, потенциал простейшего поступательного потока, а также потенциалы основных особых точек (источников, стоков, вихрей и т. д.), индуцирующих движение, имеют в бесконечности особенности и также не разлагаются в классический интеграл Фурье.

В данной статье на основании понятия квазиинтеграла Фурье [2; 3] решена третья краевая задача для достаточно гладких граничных функций, имеющих в бесконечности рост не выше произвольной степени. Решения получены в обычных функциях и содержат не более двукратных квадратур, как и при применении классического метода Фурье.

Рассмотрим для потенциала $\varphi(x, y)$ в полуплоскости $y < 0$ третью краевую задачу вида

$$\Delta\varphi = 0, \quad \partial_y\varphi + h\varphi|_{y=0} = f(x), \quad (1)$$

где $h > 0$ – постоянная, Δ – оператор Лапласа по переменным x, y ; граничная функция $f(x)$ не ограничена в бесконечности и имеет особенность типа полюса произвольного порядка: $f(x) = O(x^n)$ при $|x| \rightarrow \infty$; аналогичную особенность в ∞ имеет φ . Поскольку производная от функций понижает порядок полюсов в бесконечности, то предположим, что n -я производная от граничной функции $f(x)$ разлагается в классический интеграл Фурье [1, с. 524]:

$$f^{(n)}(x) = \int_0^{\infty} [f_1(\lambda) \sin \lambda x + f_2(\lambda) \cos \lambda x] d\lambda, \\ \begin{pmatrix} f_1(\lambda) \\ f_2(\lambda) \end{pmatrix} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \begin{pmatrix} \sin \lambda x \\ \cos \lambda x \end{pmatrix} dx. \quad (2)$$

Дифференцируя задачу (1) n раз по свободной переменной x , для функции $\Phi = \partial_n\varphi$ получим аналогичную задачу с граничной функцией $f^{(n)}(x)$:

$$\Delta\Phi = 0, \quad y < 0; \quad \partial_y\Phi + h\Phi|_{y=0} = f^{(n)}(x), \quad (3)$$

здесь и далее нижний числовой индекс n при ∂_n означает производную n -го порядка по x , а буквенный индекс – производную по этой переменной. Применяя метод разделения переменных, найдём ограниченное в полуплоскости $y < 0$ решение задачи (3) в виде

$$\Phi(x, y) \equiv \partial_n\varphi = \int_0^{\infty} e^{\lambda y} [F_1(\lambda) \sin \lambda x + F_2(\lambda) \cos \lambda x] d\lambda, \quad y < 0, \quad (4)$$

где

$$F_i(\lambda) = \frac{f_i(\lambda)}{\lambda + h},$$

$f_i(\lambda)$ – коэффициенты Фурье функции $f^{(n)}(x)$ (2). Входящие в (4) функции $e^{\lambda y} \sin \lambda x$ и $e^{\lambda y} \cos \lambda x$ являются сопряжёнными гармоническими функциями.

Отсюда для потенциала $\varphi(x, y)$ имеем задачу о восстановлении гармонической функции по одной её n -й производной $\Phi(x, y) = \partial_n\varphi$ вида (4). Гармоническая функция, сопряжённая функции Φ (4), имеет вид

$$\Psi(x, y) = \int_0^{\infty} e^{\lambda y} [F_1(\lambda) \cos \lambda x - F_2(\lambda) \sin \lambda x] d\lambda, \quad y < 0. \quad (5)$$

Пусть $\psi(x, y)$ – гармоническая функция, сопряжённая потенциалу $\varphi(x, y)$, т. е.

$$\partial_x \varphi = \partial_y \psi, \quad \partial_y \varphi = -\partial_x \psi.$$

Дифференцируя последние условия Коши-Римана k раз по x , получим

$$\partial_x(\partial_k \varphi) = \partial_y(\partial_k \psi), \quad \partial_y(\partial_k \varphi) = -\partial_x(\partial_k \psi), \quad (6)$$

т. е. $\partial_k \varphi$ и $\partial_k \psi$ являются сопряжёнными гармоническими функциями. Из равенств (6) следует, что если известны функции $\partial_k \varphi$ и $\partial_k \psi$, то известны обе частные производные функции $\partial_{k-1} \varphi$: $\partial_x(\partial_{k-1} \varphi) = \partial_k \varphi$, $\partial_y(\partial_{k-1} \varphi) = -\partial_k \psi$, при этом

$$\partial_{k-1} \varphi(x_1, y_1) = \int_{(0,0)}^{(x_1, y_1)} \partial_k \varphi dx - \partial_k \psi dy + \partial_{k-1} \varphi(0, 0). \quad (7)$$

Отсюда при $k = n$ найдём

$$\begin{aligned} \Phi_1 \equiv \partial_{n-1} \varphi(x_1, y_1) &= \int_{(0,0)}^{(x_1, y_1)} \Phi dx - \Psi dy = \int_0^{x_1} \Phi|_{y=y_1} dx - \int_0^{y_1} \Psi|_{x=0} dy = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda} (F_1 P_1 + F_2 Q_1) d\lambda + \partial_{n-1} \varphi(0, 0), \end{aligned} \quad (8)$$

где в окончательном результате $x_1 = x$, $y_1 = y$ (во внутренних равенствах аддитивное слагаемое опущено),

$$P_1 = 1 - e^{\lambda y} \cos \lambda x, \quad Q_1 = e^{\lambda y} \sin \lambda x, \quad (9)$$

$P_1 = Q_1 = 0$ при $x = y = 0$, функция $\Psi = \partial_n \psi$ – сопряжённая функции Φ (4), (5), при этом $P_1(x, y)$ и $Q_1(x, y)$ (9) – сопряженные гармонические функции.

Функция $\Psi_1 = \partial_{n-1} \psi$, сопряжённая функции Φ_1 (8), с учётом (6) имеет вид

$$\Psi_1 = -\partial_{n-2, y} \varphi = \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda} (F_1 Q_1 - F_2 P_1) d\lambda - \partial_{n-2, y} \varphi(0, 0).$$

Вычисляя соответствующий криволинейный интеграл (7), находим

$$\begin{aligned}\Phi_2 \equiv \partial_{n-2}\varphi &= \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} (F_1 P_2 + F_2 Q_2) d\lambda + x \partial_{n-1}\varphi(0,0) + \\ &+ y \partial_{n-2,y}\varphi(0,0) + \partial_{n-2}\varphi(0,0),\end{aligned}$$

где

$$P_2 = x - \frac{Q_1}{\lambda}, \quad Q_2 = y + \frac{P_1}{\lambda},$$

Q_1, P_1 имеют вид (9), P_2 и Q_2 – сопряжённые гармонические функции, равные нулю при $x = y = 0$. Далее указанную процедуру повторяем.

На k -м шаге получим формулу, которая доказывается по индукции,

$$\begin{aligned}\Phi_k \equiv \partial_{n-k}\varphi &= \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} (F_1 P_k + F_2 Q_k) d\lambda + \\ &+ \sum_{m=1}^{k-1} [R_m \partial_{n-k+m}\varphi(0,0) + I_m \partial_{n-k+m-1,y}\varphi(0,0)] + \partial_{n-k}\varphi(0,0),\end{aligned}\quad (10)$$

где

$$R_m = \frac{\operatorname{Re} z^m}{m!}, \quad I_m = \frac{\operatorname{Im} z^m}{m!}, \quad z = x + iy;\quad (11)$$

сопряжённые гармонические функции P_k и Q_k строятся по рекуррентным формулам

$$P_{k+1} = R_k - \frac{Q_k}{\lambda}, \quad Q_{k+1} = I_k + \frac{P_k}{\lambda},$$

P_1, Q_1 имеют вид (9), причём $P_k = Q_k = 0$ при $x = y = 0$. Отсюда с учётом $P_{k+1} = (R_k \lambda^2 - I_{k-1} \lambda - P_{k-1}) \lambda^{-2}$, $Q_{k+1} = (I_k \lambda^2 + R_{k-1} \lambda - Q_{k-1}) \lambda^{-2}$ следуют формулы непосредственного вычисления функций P_k, Q_k (без рекуррентных формул):

$$\begin{aligned}P_{2k} &= \frac{1}{\lambda^{2k-1}} \left[\sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{k-j-1} (R_{2j+1} \lambda^{2j+1} - I_{2j} \lambda^{2j}) - (-1)^k (R_1 \lambda - Q_1) \right], \\ Q_{2k} &= \frac{1}{\lambda^{2k-1}} \left[\sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{k-j-1} (I_{2j+1} \lambda^{2j+1} + R_{2j} \lambda^{2j}) - (-1)^k (I_1 \lambda + P_1) \right], \\ P_{2k+1} &= \frac{1}{\lambda^{2k}} \left[\sum_{j=1}^k (-1)^{k-j} (R_{2j} \lambda^{2j} - I_{2j-1} \lambda^{2j-1}) + (-1)^k P_1 \right], \\ Q_{2k+1} &= \frac{1}{\lambda^{2k}} \left[\sum_{j=1}^k (-1)^{k-j} (I_{2j} \lambda^{2j} + R_{2j-1} \lambda^{2j-1}) + (-1)^k Q_1 \right],\end{aligned}\quad (12)$$

где при $k = 1$ в первых двух равенствах суммы $\Sigma = 0$.

Отсюда по формуле (10) при $k = n$ найдём решение исходной задачи (1) в виде

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) = & \int_0^{\infty} \frac{f_1 P_n + f_2 Q_n}{\lambda(\lambda + h)} d\lambda + \\ & + \sum_{k=1}^{n-1} [R_k \partial_k \varphi(0, 0) + I_k \partial_{k-1, y} \varphi(0, 0)] + \varphi(0, 0), \end{aligned} \quad (13)$$

где f_i, P_n, Q_n, R_k, I_k определены в (2), (12), (11), при этом из граничного условия (1) следует $\partial_{k, y} \varphi(0, 0) = f^{(k)}(0) - h \partial_k \varphi(0, 0)$.

Подынтегральная функция (13) в особой точке $\lambda = 0$ имеет конечный предел, что доказывается по индукции с помощью правила Лопиталя, при этом

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{P_n}{\lambda} = -I_n, \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{Q_n}{\lambda} = R_n.$$

При $\lambda \rightarrow \infty$ интеграл (13) сходится равномерно по x, y , т. к. функции P_k/λ и Q_k/λ имеют порядок $O(1/\lambda)$ и $f_i \rightarrow 0$ (2), при этом интеграл (13) мажорируется сходящимся интегралом (4) при $y = 0$.

Функция (13) в силу гармоничности функций P_n, Q_n, R_k, I_k удовлетворяет уравнению Лапласа в полуплоскости $y < 0$ (1).

Граничное условие (1) для функции (13) примет вид

$$\begin{aligned} \partial_k \varphi + h \varphi|_{y=0} = & \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda(\lambda + h)} [f_1 (h p_n - q_{n-1}) + f_2 (p_{n-1} + h q_n)] d\lambda + \\ & + \sum_{k=1}^{n-1} [X_{k-1} \partial_{k-1, y} \varphi(0, 0) + h X_k \partial_k \varphi(0, 0)] + h \varphi(0, 0) = \\ = & \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda} (f_1 p_n + f_2 q_n) d\lambda + \sum_{k=0}^{n-1} X_k (\partial_{k, y} \varphi + h \partial_k \varphi)|_{x=y=0} = \\ = & \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda} (f_1 p_n + f_2 q_n) d\lambda + \sum_{k=0}^{n-1} X_k f^{(k)}(0), \end{aligned} \quad (14)$$

где $q_1 = \sin \lambda x, p_1 = 1 - \cos \lambda x, X_k = x^k/k!$,

$$p_{2k} = \frac{1}{\lambda^{2k-1}} \left[(-1)^k q_1 + \sum_{i=1}^k (-1)^{k-i} X_{2i-1} \lambda^{2i-1} \right],$$

$$p_{2k+1} = \frac{1}{\lambda^{2k}} \left[(-1)^k p_1 + \sum_{i=1}^k (-1)^{k-i} X_{2i} \lambda^{2i} \right],$$

$$q_{2k} = \frac{1}{\lambda^{2k-1}} \left[(-1)^{k+1} p_1 + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{k-i-1} X_{2i} \lambda^{2i} \right],$$

$$q_{2k+1} = \frac{1}{\lambda^{2k}} \left[(-1)^k q_1 + \sum_{i=1}^k (-1)^{k-i} X_{2i-1} \lambda^{2i-1} \right],$$

(здесь полагаем $\sum_{i=a}^b = 0$ при $b < a$). Правая часть равенства (14) представляет собой разложение граничной функции $f(x)$ (1) в квазиинтеграл Фурье [2; 3], т. е. граничное условие (1) для функции (13) выполняется. Итак, доказана теорема.

Теорема. Если граничная функция $f(x) \in C^{n+1}(R)$, $f^{(n+1)}(x)$ – абсолютно интегрируема при $x \in R$ и $f^{(n)}(x)$ разлагается в интеграл Фурье, то решение третьей граничной задачи (1) строится по формуле (13) с точностью до n постоянных $\partial_k \varphi(0, 0)$, $k = 0, \dots, n-1$.

Таким образом, для единственности решения задачи (1) следует, кроме граничной функции $f(x)$, задать значения указанных производных искомого решения по переменной x в одной точке.

Список литературы

1. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3. М.: Наука, 1962. 656 с.
2. Холодовский С. Е. О разложении функций в квазиинтегралы Фурье и их приложения // Обзрении прикладной и промышленной математики. 2003. Т. 10. Вып. 1. С. 247–248.
3. Kholodovskii A. S. and Kholodovskii S. E. Fourier quasi-integral expansions of functions and their applications to the solution of boundary value problems // Differential Equations. 2004. Vol. 40. №. 10. P. 1491–1495.

References

1. Fikhtengol'ts G. M. Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya. T. 3. M.: Nauka, 1962. 656 s.
2. Kholodovskii S. E. O razlozhenii funktsii v kvaziintegraly Fur'e i ikh prilozhenii // Obozrenii prikladnoi i promyshlennoi matematiki. 2003. T. 10. Vyp. 1. S. 247–248.
3. Kholodovskii A. S. and Kholodovskii S. E. Fourier quasi-integral expansions of functions and their applications to the solution of boundary value problems // Differential Equations. 2004. Vol. 40. №. 10. P. 1491–1495.

Статья поступила в редакцию 15.05.2015

УДК 551.435.587
ББК 26.823

Илья Иосифович Железняк,
доктор технических наук,
старший научный сотрудник,
Институт природных ресурсов, экологии и криологии СО РАН,
672000, Россия, г. Чита, ул. Бутина, 26,
e-mail: lgc255@mail.ru

Святослав Евгеньевич Холодовский,
доктор физико-математических наук, профессор,
Забайкальский государственный университет,
672039, Россия, г. Чита, ул.Александро-Заводская, 30,
e-mail: hol47@yandex.ru

Природа и модель распространения температурных волн в курумах¹

Приведены сведения о природе образования курумов и видах льда в них. Представлена математическая модель распространения температурных волн в курумах. Решена одномерная краевая задача теплопроводности в кусочно-однородных средах с синусоидальной граничной функцией, зависящей от времени, что моделирует колебания температуры на поверхности курумов.

Ключевые слова: краевые задачи теплопроводности, кусочно-однородные среды, курумы, температурные волны.

Ilya Iosiphovich Zheleznyak,
Doctor of Technical Sciences,
Senior Scientific Employee,
Institute of Natural Resources, Ecology and Cryology SB RAS,
26, Butina st, Chita, Russia, 672000,
e-mail: lgc255@mail.ru

Svyatoslav Yevgenyevich Kholodovskii,
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
Transbaikal State University,
30 Aleksandro-Zavodskaya St., Chita, Russia, 672039,
e-mail: hol47@yandex.ru

Nature and Model of Temperature Waves' Propagation in Kurumas²

The knowledge of the nature formation kurumas and types of ice into it's bodies are provided. Mathematical model of temperature waves propagation in kurumas under convective heat exchange is presented.

Keywords: boundary value problem of heat conduction, piecewise-homogeneous medium, kurums, temperature waves.

¹Работа выполнена в рамках Государственного задания вузу Министерства образования и науки Российской Федерации (проект 2014/255 НИР 2603.14).

²The work was performed as part of the State job university Ministry of Education and Science of the Russian Federation (project 2014/255 research 2603.14).

Курумы – скопления на склонах и у подножий гор глыбовых и крупных обломков скальных горных пород, образовавшиеся в результате интенсивного выветривания обнаженных скальных массивов. Курумы залегают в виде площадных или вытянутых в плане отложений. В Забайкалье мощность курумов составляет от нескольких десятков сантиметров до нескольких десятков метров. Основанием курумов служат сплошные массивы скальных пород. Результаты исследований, посвященных закономерностям распространения и строения курумов в зависимости от их фациальных признаков, приведены в обобщающей работе [1]. Оценка формирования теплового и водного режима крупнообломочных склоновых отложений по результатам экспериментальных и теоретических исследований выполнена в работе [2]. Исследованиям условий образования и накопления льда, формирования температурного режима курумов и использования их в качестве оснований сооружений различного назначения посвящена работа [3].

В настоящее время инженерно-геологическая оценка курумов для целей их использования в качестве оснований сооружений не представляется возможной. В первую очередь это связано с тем, что их пустотность, хаотичность контактов между обломками и неправильность геометрических очертаний обломков характеризуют курумы как не сплошное тело. По этой причине к курумам не применимы законы механики и теплофизики горных пород, основанные на законах физики твердого тела, обладающего сплошностью. В курумах содержится вода в жидкой фазе лишь в нижней части разреза, заполненной мелкоземом. В верхней и средней частях разреза курумов в пустотах между обломками вода содержится в парообразном состоянии при положительных температурах, а при отрицательных – в виде льда, инея или снега.

Одной из наиболее актуальных задач инженерно-геологической оценки курумов, как природных объектов и оснований сооружений, является задача о распространении температурных волн в курумах. Решение этой задачи возможно на основе математических моделей, разработанных А.И.Янушаускасом [3, глава 6].

Рассмотрим модель распространения температурных волн в куруме $D_1(0 < z < h)$ малой мощности h , $D_2(h < z < \infty)$ – подстилающий пласт скальных пород (ось z направлена вертикально вниз). При этом учитываем различие коэффициентов теплопроводности в куруме k_1 и в подстилающем грунте k_2 . В данной модели полагаем, что в каждом вертикальном сечении процесс теплообмена одинаков, т. е. рассматриваем одномерную задачу теплопроводности по пространственной переменной z . Пусть на внешней границе курума при $z = 0$ задано изменение температуры (потенциала) по синусоидальному закону от временем t , что моделирует суточные или сезонные колебания температуры. Задачу рассматриваем без начальных условий, т. е. $-\infty < t < \infty$. Отсюда для тепловых потенциалов $u_i(z, t)$ в D_i задача имеет вид

$$\partial_t u_i = a_i^2 \partial_z^2 u_i, \quad i = 1, 2; \quad u_1(0, t) = A \sin \omega t, \quad (1)$$

$$z = h : \quad u_1 = u_2, \quad k_1 \partial_z u_1 = k_2 \partial_z u_2, \quad (2)$$

где $\partial_z^n = \partial^n / \partial z^n$, $a_i^2 = k_i / (\alpha_i \rho_i)$, постоянные α_i и ρ_i – соответственно теплоёмкость и плотность материала зоны D_i [4]. Условия сопряжения (2) выражают непрерывность потенциалов и тепловых потоков на общей границе $z = h$ зон D_i . Аналогичная задача с другими условиями сопряжения рассмотрена А. И. Янушаускасом в работе [3, с. 159]. Следуя работе [4, с. 243], представим решение задачи (1), (2) в виде комбинаций экспоненциальных и тригонометрических функций:

$$u_1(z, t) = b_1 e^{-\nu_1 z} \sin(\omega t - \nu_1 z) + (A - b_1) e^{\nu_1 z} \sin(\omega t + \nu_1 z) +$$

$$+b_2e^{-\nu_1 z} \cos(\omega t - \nu_1 z) - b_2e^{\nu_1 z} \cos(\omega t + \nu_1 z), \quad 0 < z < h, \quad (3)$$

$$u_2(z, t) = b_3e^{-\nu_2(z-h)} \sin(\omega t - \nu_2 z) + b_4e^{-\nu_2(z-h)} \cos(\omega t - \nu_2 z), \quad z > h, \quad (4)$$

где

$$\nu_i = \sqrt{\frac{\omega}{2a_i^2}}.$$

Отсюда функции (3), (4) удовлетворяют соответствующему уравнению и граничному условию (1), что проверяется непосредственно. Из условий сопряжения (2) для четырех параметров b_i получим замкнутую систему линейных алгебраических уравнений вида

$$\begin{aligned} s_h b_1 - c_h b_2 + c_2 b_3 + s_2 b_4 &= f_1, & c_h b_1 + s_h b_2 - s_2 b_3 + c_2 b_4 &= f_2, \\ r_1 b_1 - r_2 b_2 - d_1 b_3 + d_2 b_4 &= f_3, & r_2 b_1 + r_1 b_2 - d_2 b_3 - d_1 b_4 &= f_4, \end{aligned} \quad (5)$$

где постоянные $s_h = 2c_1 \operatorname{sh}(\nu_1 h)$, $c_h = 2s_1 \operatorname{ch}(\nu_1 h)$, $c_i = \cos(\nu_i h)$, $s_i = \sin(\nu_i h)$, $r_1 = e^{\nu_1 h} \sigma_1^- + e^{-\nu_1 h} \sigma_1^+$, $r_2 = e^{\nu_1 h} \sigma_1^+ + e^{-\nu_1 h} \sigma_1^-$, $\sigma_i^+ = c_i + s_i$, $\sigma_i^- = c_i - s_i$, $d_1 = k\sigma_2^+$, $d_2 = k\sigma_2^-$, $k = k_2 a_1 / (k_1 a_2)$, $f_1 = A_0 c_1$, $f_2 = A_0 s_1$, $f_3 = A_0 \sigma_1^-$, $f_4 = A_0 \sigma_1^+$, $A_0 = Ae^{\nu_1 h}$. С учетом знаков коэффициентов системы (5) можно показать, что для малых мощностей курумов h эта система однозначно разрешима. При этом решение системы (5) строится по правилу Крамера:

$$b_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad (6)$$

где определитель системы $\Delta \neq 0$.

Таким образом, решение задачи (1), (2) строится в конечном виде в элементарных функциях по формулам (3), (4), (6), что допускает всестороннее исследование рассмотренного процесса по различным параметрам.

Список литературы

1. Романовский Н. Н., Тюрин А. И., Сергеев Д. О. Курумы гольцового пояса гор. М.: Наука, 1989. 148 с.
2. Банцеккина Т. В., Михайлов В. М. К оценке роли внутригрунтовой конденсации водяных паров в формировании водного и теплового режимов крупнообломочных склоновых отложений // Криосфера Земли. 2009. Т. 13. № 1. С. 40–45.
3. Железняк И. И., Мальчикова И. Ю., Шполянская Н. А., Янушаускас А. И. Курумы Северного Забайкалья. Новосибирск: Наука (Сибирское отделение), 1992. 179 с.
4. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 736 с.

References

1. Romanovskij N. N., Tjurin A. I., Sergeev D. O. Kurumy gol'covogo pojasa gor. M.: Nauka, 1989. 148 s.
2. Bancekina T. V., Mihajlov V. M. K ocenke roli vnutrigruntovoj kondensacii vodjanyh parov v formirovanii vodnogo i teplovogo rezhimov krupnooblomochnyh sklonovyh otlozhenij // Kriosfera Zemli. 2009. T. 13. № 1. S. 40–45.
3. Zheleznjak I. I., Mal'chikova I. Ju., Shpoljanskaja N. A., Janushauskas A. I. Kurumy Severnogo Zabajkal'ja. Novosibirsk: Nauka (Sibirskoe otdelenie), 1992. 179 s.
4. Tihonov A. N., Samarskij A. A. Uravnenija matematicheskoj fiziki. M.: Nauka, 1977. 736 s.

Статья поступила в редакцию 29.04.2015

УДК 621.791
ББК 34.4

*Сергей Фёдорович Забелин,
доктор технических наук, профессор, член корреспондент РАН,
Забайкальский государственный университет,
672039, Россия, г. Чита, ул. Александро-Заводская, 30,
e-mail:s.zabelin2012@yandex.ru*

Решение проблем прочности материалов методами поверхностной нанокристаллизации

Проведен анализ и классификация методов силового и физического воздействия, дана оценка их влияния на строение и свойства поверхностного слоя материала с целью получения высоких механических и трибологических характеристик. Предложены механизмы и модель процессов формирования нанофазных систем (НФС) при различных методах воздействия.

Ключевые слова: силовые и физические методы воздействия, поверхность материала, нанофазные системы, механизмы и модель формирования нанофазных систем.

*Sergey Fyodorovich Zabelin,
Doctor of Technical Sciences, Professor,
Corresponding Member of the Russian Academy of Natural Sciences,
Transbaikal State University
30, Alexander-Zavodskay st., Chita, Russia, 672039,
e-mail:s.zabelin2012@yandex.ru*

Solving of Problems of Coating Materials with the Methods of Superficial Nanocrystallization

The analysis and classification of methods of power and physical influence is lead, the estimation of their influence on structure and properties of superficial layer of material with the purpose of reception high mechanicals and tribologies characteristics is given. Mechanisms are offered to model of processes of formation NPS at various methods of influence.

Keywords: power and physical methods of influence, a surface of a material, nanophase systems, mechanisms and model of formation nanophase systems.

В последнее время появилось достаточно много обсуждений результатов исследований по упрочняющим технологиям различных материалов и изделий, в которых рассматриваются способы создания наноструктурированного состояния металлических материалов путём активации процесса нанокристаллизации и синтеза наноструктур различными методами внешнего силового или физического воздействия [1–7; 11–16]. Анализ таких разработок показал, что эффект достижения уникальных физико-механических и функциональных свойств упрочняемых материалов обусловлен созданием характерного структурного размера зёрен и формированием нанофазных систем (НФС) в строении по объёму всего или только поверхностного слоя материала [1–3; 15; 16]. Большое разнообразие технологических способов и методов нанокристаллизации материалов, различие подходов междисциплинарного характера к объяснению механизмов формирования НФС не позволяют выявить полную картину кинетики структурообразования и морфологии физико-химических процессов нанокристаллизации, затрудняют систематизацию и моделирование этих процессов, что на

сегодня составляет одну из актуальных проблем практического материаловедения и технологии наноструктурированных материалов (НСМ) [1].

Классификация технологий и методов наноструктурирования металлических материалов

Методы и технологии наноструктурирования материалов, в том числе и формирования НФС в строении материала, осуществляемые как в процессе их производства, так и в процессе эксплуатации, можно классифицировать по четырем технологическим направлениям [1–3] (см. табл. 1).

Таблица 1

Технологии и методы нанокристаллизации металлических материалов

№	Технологии	Методы
1	Объёмная нанокристаллизация	<ul style="list-style-type: none"> – Порошковой металлургии (ПМ): синтез и консолидация (компактирование и спекание) нанодисперсных порошковых материалов. – Интенсивной пластической деформации (ИПД): равноканальное угловое прессование и винтовая деформация под давлением. – Контролируемой кристаллизации из аморфного состояния (ККАС): изотермический отжиг или физическое воздействие. – Газовой атомизации (метод Глейтера). – Гальванический метод
2	Поверхностная нанокристаллизация	<p>Внешнего силового воздействия на поверхность материала при</p> <ul style="list-style-type: none"> – фрикционной обработке; – ударном наклёпе; – прокатке; – гидроэктрузии. <p>Внешнего физического воздействия на поверхность материала при:</p> <ul style="list-style-type: none"> – ультразвуковой обработке; – лазерной обработке; – плазменной обработке; – ионной имплантации; – термической, химико-термической или термомеханической обработке
3	Нанокристаллизация путём самоорганизующейся поверхности	<p>С использованием:</p> <ul style="list-style-type: none"> – ремонтно-восстановительных смесей (РВС) в суспензиях и средах с наночастицами; – поверхностно-активируемых веществ (ПАВ) с наночастицами; – фазового наклёпа материала поверхности
4	Нанесение наноструктурированных покрытий и плёнок	<p>При использовании:</p> <ul style="list-style-type: none"> – физических (PVD) методов (молекулярно-лучевая эпитаксия); – химических (CVD) методов (химическое осаждение из газовой фазы); – электроосаждения

Не снижая значимости первого технологического направления, связанного с синтезом НСМ, и четвёртого, связанного с нанесением покрытий, отметим, что практический интерес представляют технологии второго и третьего направления, напрямую связанные с поверхностно-упрочняющими технологиями, используемыми как на подготовительной стадии производства, так и в процессе эксплуатации изделий.

Большинство технологий, обеспечивающих формирование НФС в поверхностном слое металлов и сплавов, предназначены для улучшения трибологических характеристик изделий пар-трения. Согласно классической теории износа, низкий абразивный износ и высокая усталостная прочность, а также стойкость к деформации и разрушению связаны с высокой твёрдостью материала, которая является структурно зависимой характеристикой и связана

с упругими и пластическими свойствами материала [1–3]. Например, для оценки стойкости материала к упругой деформации разрушения используют величину отношения твёрдости H к модулю упругости E , т. е. H^3/E^2 — индекс пластичности материала, а для оценки сопротивления материала пластической деформации параметр — H^3/E^2 . Из этого следует, что требуемый материал должен обладать высокой твёрдостью при низком модуле упругости, что и обеспечивается созданием наноструктурированного состояния поверхностного слоя упрочняемого материала [1].

Технологии внешнего силового воздействия

Износостойкость и трибологические свойства материала определяются не только исходной структурой и соответствующими ей физико-механическими свойствами контактирующих металлов, но и в значительной степени характером изменения структурного состояния и комплекса свойств в формирующемся в поверхностном слое материала в процессе их контактного взаимодействия. При этом формирование нанокристаллических структур трения обусловлено спецификой напряжённого состояния возникающего в зоне трения скольжения твёрдых тел [4].

Установлено [5–7], что при трении скольжения практически любых металлических материалов, в их тонком (меньше 10 мкм) поверхностном слое формируются нанокристаллические структуры, возникновение которых связано с действием в рассматриваемом слое ротационных механизмов пластической деформации. Основным фактором, обуславливающим развитие процессов упруго-пластической деформации и разрушения поверхностного слоя материала при трении скольжения, являются высокие локальные внешние напряжения, возникающие в зоне контакта. По сути, в процессе трения каждая отдельно движущаяся микронеровность одного тела создаёт в поверхностном слое сопряжённого тела две разные по знаку зоны напряжений [5], вследствие чего микрообъёмы материала поверхностного слоя трущихся тел подвергаются последовательному воздействию сжимающих и растягивающих (сдвигающих) контактных напряжений [8].

Сравнительный анализ методами металлографии, просвечивающей электронной микроскопии (ПЭМ) и рентгеноструктурного анализа (РСА) структурных изменений, развития фазовых превращений в сплавах и сталях при трении скольжения [9], деформировании сдвигом под давлением (в наковальнях Бриджмена) [10] и прокатке позволили получить данные о величине возникающих в зоне трения исследуемых материалов контактных напряжений, а также о специфике их влияния на фазовый состав, прочностные (микротвёрдость, сопротивление сдвигу) и трибологические свойства формирующихся нанокристаллических структур (см. табл. 2).

Таблица 2

Фазовый состав, прочностные и трибологические свойства нанокристаллических структур, возникающих при сухом трении скольжения сплавов железа (трение на воздухе в паре со сталью 45, нагрузка 294 Н, скорость скольжения 0,07 м/с)

Марка сплава	Фазовый состав	Микротвёрдость, ГПа	Сопротивление сдвигу, ГПа	Коэффициент трения F	Интенсивность изнашивания $Ih, 10^{-7}$
Г21	Е	5,6	1,6	0,28	3,1
Г30	Е+У(25 %)	6,2	1,7	0,27	1,6
Г40	У	6,2	2,5	0,40	11,0
120Г13	У	8,0	4,0	0,50	1,0
40Х12Г8	А(>80 %)	8,9	4,9	0,55	1,8
140Г4	У+(30 %А)	9,3	5,6	0,60	0,4

Кристаллиты (фрагменты), образующие нанофазные структуры, по данным электронно-микроскопических исследований [8–9], характеризуются значительной взаимной разориентацией и неоднородны по величине — их размер лежит в диапазоне от

нескольких до сотен нанометров. Ниже нанокристаллического слоя — на расстоянии 10 мкм от поверхности трения — формируется ультрадисперсная структура, в которой присутствует ярко выраженная текстура [9].

Реальные величины контактных сжимающих напряжений примерно соответствуют значениям микротвёрдости поверхности трения. Например, при трении стали У13 возникают контактные сжимающие напряжения, которые достигают уровня 10–12 ГПа [8]. Высокие сжимающие контактные напряжения препятствуют возникновению и развитию микротрещин в поверхностном слое, создавая условия для реализации больших пластических деформаций, которые осуществляются ротационными механизмами пластичности, что и обуславливает формирование нанокристаллических структур трения. Преимущественный характер развития фазовых превращений в поверхностном слое обеспечивает низкий коэффициент трения (менее 0,3) и значительное сопротивление адгезионному изнашиванию (см. табл. 2), а формирование нанофазного слоя способствует росту прочности и износостойкости стальных изделий.

Технологии методов физического воздействия

Проблема поверхностной нанокристаллизации массивных деталей и изделий из конструкционных и инструментальных материалов может быть решена использованием различных методов физического воздействия на поверхность материала (см. табл. 1). Рассмотрим ряд примеров таких технологий. Одним из способов улучшения качественных характеристик изделий из сталей и сплавов является плазменная обработка в высокочастотной (ВЧ) плазме индукционного и ёмкостного разрядов при пониженном давлении (13,3–133 Па) [11]. В результате воздействия ВЧ плазмы при пониженном давлении с продувом газа на поверхности сталей, титановых и твёрдых сплавов образуются нанофазные слои толщиной до 30 нм. Исследования с помощью рентгеновского микроанализатора, дифрактометра и электронного магнитного спектрометра показали, что при взаимодействии ВЧ плазмы с металлами и сплавами происходит диффузионное внедрение атомов плазмообразующих газов (Ag, N, O, C) в поверхностные слои, образуя на них нанофазные системы из оксидов, нитридов и карбидов элементов, входящих в состав материала. Изменения структуры и свойств материала происходят на глубине 100–200 мкм. При этом повышается коррозионная стойкость, прочность, микротвёрдость, износостойкость изделий из этих материалов, а причиной установленных изменений являются низкоэнергетичная (10–100 эВ) ионная бомбардировка поверхности твёрдых тел [11].

Не менее эффективно применение методов ионно-лучевой обработки (ИЛО) металлов и сплавов [12], которые приводят к формированию на поверхности модифицированного слоя, физико-механические свойства которого значительно отличаются от свойств основного материала. В зависимости от флюенса ионов возможно образование в поверхностных слоях метастабильных (пересыщенных) твёрдых растворов, выделений новых фаз, а также потери дальнего порядка в расположении атомов, образующих кристаллическую решётку твёрдого тела.

Например, ИЛО аустенитной нержавеющей стали 12 × 18 Н10Т проводилась на вакуумной установке УВН-2М с использованием ленточного ионного источника с азотированием полиэнергетическим потоком ионов с энергией 2,5 кэВ и плотностью ионного тока — 2 мА/см², до набора дозы внедренных ионов 3×10^{19} см⁻² при температурах 350 ÷ 500 °С и получили модифицированные слои соответственно 5–20 мкм. Рентгенофазовый анализ показал, что упрочнённый слой состоит из нитридной фазы на основе ГЦК решётки с гексагональными (400 °С) и тетрагональными (450 °С) искажениями. При температурах свыше 420 °С в слое формируются частицы CrN и наноразмерные частицы ферромагнитного α – Fe, размер которых 3–8 нм в зависимости от температуры. Кроме того, в слое

обнаружены следы присутствия новой фазы, которая предварительно идентифицирована как гексагональный нитрид $(Fe, Cr)_2N$. Данная технология ионно-лучевого азотирования аустенитных нержавеющей сталей применяется для производства медицинских инструментов, но может найти широкое применение в машиностроительном производстве.

Другим примером технологии физического воздействия на поверхность материала изделий с целью формирования наночастиц является электронно-пучковая обработка (ЭПО). Использование импульсных электронных пучков как способ модификации металлов и сплавов позволяет существенно повысить коррозионную стойкость, износостойкость и микротвёрдость поверхностных слоев материала, в том числе и конструкционных сталей [13]. Достижимый эффект объясняется закономерностями эволюций строения структуры на различных структурно-масштабных уровнях фазового состава и дефектной субструктуры материала, в условиях высокоскоростного нагрева и охлаждения, инициированных облучением сильнофокусированным электронным пучком микросекундной длительности. Релаксация полей напряжений, формирующихся в стали при ЭПО, осуществляется путём их взаимной аккомодации при образовании кристаллов мартенсита.

Большой практический интерес представляют технологии получения нанокристаллического состояния материала в поверхностном слое массивных изделий (валы прокатного стана, инструмент, штампы и др.) из конструкционных и инструментальных сталей и изделий из титановых сплавов (BT22) методом ультразвуковой ударной обработки (УЗУО) [14]. Её эффективность связана с многократным ударным нагружением металлов и протекающими при этом различными физико-химическими процессами. Наиболее важными из них являются снижение деформирующих усилий и ударных нагрузок и существенное повышение подвижности атомов, что приводит к аномальному массопереносу. Высокая степень пластической деформации при УЗУО локализуется в тонких поверхностных слоях, что в совокупности с повышением температуры при ударах способствует протеканию различных структурно-фазовых превращений в металлах и сплавах. В результате УЗУО массивных изделий из закалённых инструментальных и штамповых сталей (4Х5МФ1С) методом ПЭМ высокого разрешения ($\times 10^6$) установлено образование на глубине 15–25 мкм от поверхности нанокристаллических структур (наночастиц) с размером зерна 5–10 нм, а на глубине 250–300 мкм – субмикрочастиц субструктуры [4]. При этом наблюдается рост микротвёрдости в 1,3–1,6 раза.

Рентгеновские методы показали, что уровень внутренних сжимающих напряжений возрастает до 800–850 МПа на глубине до 150 мкм. При этом возрастает плотность дефектов кристаллического строения, являющихся центрами зарождения новых фаз. Кроме того, высокая степень пластической деформации материала поверхностного слоя позволяет ускорить распад метастабильных фаз и ускорить время процесса старения. Весьма перспективным является использование лазерной обработки металлических материалов, с целью получения высокого уровня их эксплуатационных свойств. Это связано с возможностью целенаправленной организации структуры поверхностного слоя материала за счёт контролируемой нанокристаллизации, формирования НФС, дисперсного упрочнения, химико-термической обработки и, как следствие, получения высокого комплекса физических, химических и механических свойств [17].

Эффект структурообразования в поверхностном слое материалов под влиянием импульсного лазерного воздействия обусловлен возникновением значительных микронапряжений и пластической деформации в микрообъёмах материала. Это подтверждают результаты рентгено- и микроструктурного анализа зон лазерного воздействия на различных материалах (стали У10А, Х12Ф1, Р6М5, 08Х13, никель и техническое железо) [18], когда выявлены зубчатость границ зёрен и присутствие полос скольжения, что может быть связано с протеканием процессов, аналогичных динамической высокотемпературной деформации [17; 18].

Следовательно, процесс практически мгновенного поглощения энергии при импульсно-лазерном воздействии приводит к генерации волн напряжений и высокоскоростной локальной пластической деформации микрообъёмов поверхностного слоя материалов, что способствует фрагментации структуры, инициированию процессов массопереноса (диффузии) элементов сплавов и полиморфных превращений в них. В совокупности это приводит к особым условиям структурообразования и формированию НФС в строении поверхностного слоя и оказывает влияние на свойства материала. Например, лазерная обработка поверхности аустенитно-ферритной стали 03X14N10K5M2Ю2Т [17] способствует значительному повышению твёрдости поверхностного слоя (до 600-650HV) при сохранении вязкой сердцевины. Управляющим параметром процесса воздействия являются градиенты колебательного давления на границах раздела фаз, градиенты температур и концентраций, контролируемые аномальные диффузионные потоки и диспергирование растущих нанокристаллов (нанофаз). Формирование НФС с фрагментированной (мозаичной) структурой, субграницы которой, являясь барьерами, приводят к релаксации напряжений, уменьшает опасность трещинообразования.

Другим перспективным способом улучшения физико-механических и функциональных свойств поверхности материала (сопротивление износу, коррозии, радиационному разрушению и др.) является метод ионной имплантации (МИИ). Обобщённые сведения о физико-химических процессах и эффектах структурообразования при МИИ показали ряд преимуществ этого метода [17–19]: 1) процесс не имеет термодинамических ограничений – существует возможность создания твёрдых растворов с содержанием легирующих элементов, значительно превышающих пределы растворимости; составы сплавов не ограничены рамками равновесных диаграмм состояния, поэтому могут быть получены новые метастабильные составы; 2) при МИИ модифицируются внешние поверхности и внутренние границы раздела; 3) параметры размеров и шероховатости не изменяются в процессе ионной обработки и др. Улучшение эксплуатационных характеристик имплантированных материалов происходит вследствие модификации структурно-фазового и элементного состояния поверхностных слоёв металлических материалов, где в условиях ионного облучения наблюдается формирование твёрдых растворов высокой концентрации, наноразмерных фаз внедрения, неравновесных фаз и интерметаллидных соединений. Возможность синтеза и формирования наноинтерметаллидных фаз и соединений в поверхностных слоях металлических материалов при МИИ приводит к их существенному упрочнению за счёт обеспечения высокой твёрдости, сопротивления трению, износу и высокотемпературной стойкости.

Морфологические схемы процессов и модель механизмов формирования нанофазных систем

Анализ представленных технологий и других результатов исследований показал, что основную роль в процессе формирования НФС играют структурные изменения в поверхностном слое материала при создании в нём особо активированного состояния. Такое состояние материала обусловлено не только структурными изменениями (измельчение зерна и фрагментация, образование кластерных структур и нанофаз), но и спецификой напряжённого состояния и процессов релаксационной деформации, возникающих в зонах концентраторов напряжений (ЗКН) локального взаимодействия твёрдых тел (внешнее силовое воздействие) или в результате взаимодействия элементов структуры с потоками энергии, ионов или диффундирующих атомов (физическое воздействие). Системный анализ технологий различных видов воздействий на процессы формирования НФС в поверхностном слое материала (конструкционные стали и сплавы) показал, что физическая сущность процессов и механизмы формирования НФС различны, но морфологические схемы технологий различаются незначительно [15; 16].

При внешнем силовом воздействии на поверхность материала, а это методы механической, термомеханической и фрикционной обработки, ударного наклёпа и прокатки, протекают процессы контактного взаимодействия твёрдых тел, и морфологическая схема технологии имеет следующий вид:

Контактное взаимодействие → **Напряжения** → **Образование ЗКН** → **Упруго-пластическая деформация** → **Релаксация напряжений** → **Структурные изменения** – фрагментация (формирование НФС в поверхностном слое).

При физическом воздействии на поверхность материала, а это методы плазменной, лазерной, ультразвуковой, ионно-лучевой, электроискровой, термической и химико-термической обработки, протекают процессы взаимодействия потоков энергии, ионов и/или диффундирующих атомов со структурными элементами материала поверхностного слоя и морфологическая схема таких процессов имеет следующий вид:

Воздействие → **Напряжения** → **Образования ЗКН** → **Микродеформация и диффузия** → **Структурные изменения** – фрагментация, кластерные и нанофазные образования (избирательное изменение фазового состояния и кинетики фазовых превращений при формировании НФС).

Если считать материал изделия многоуровневой системой, в которой пластическая деформация самосогласованно развивается как потеря сдвиговой устойчивости на различных масштабных уровнях (нано-, микро-, мезо- и макро), то основополагающим механизмом деформации подобных систем является локальное структурное превращение материала в локальных зонах концентраторов напряжений (ЗКН) различного масштаба.

В случаях внешних силовых воздействий возникающие напряжения вызывают большие (интенсивные) пластические деформации (ИПД) структурных составляющих в ЗКН поверхностного слоя материала. В конечном счёте они определяют спектр структурных дефектов и доминирующие микромеханизмы пластичности при контактном деформировании. В этом случае формирование нанофазной структуры в поверхностном слое обусловлено реализацией ротационных механизмов пластической деформации и эффекта фрагментации структуры, под воздействием выделяемой в условиях деформации энергией. В случаях, когда осуществляются физические методы воздействия на поверхностный слой материала (высокочастотные колебания при ультразвуковой обработке, ионная бомбардировка при плазменной или ионно-лучевой обработке), в структуре создаются зоны активированного состояния материала – ЗКН, причём на всех уровнях – нано-, микро-, мезо- и макро-структуры. Воздействие потоков энергии, ионов, градиентов температуры и концентрации, диффузии атомов плазмообразующих газов и атомов элементов приводит к формированию нанофазных систем в поверхностном слое материала.

В зависимости от плотности потоков энергии, частоты колебаний или флюенса ионов в структурном строении материала происходит образование ЗКН, в которых инициировано образование метастабильных (пересыщенных) твёрдых растворов, выделение новых нанофаз, а также наблюдается потеря дальнего порядка в расположении атомов кристаллической решётки твёрдого тела [16]. При физических методах воздействия на материал в его поверхностном слое образуются внутренние напряжения, достаточные для того, чтобы инициировать и диффузионные процессы, которые приводят к избирательному изменению фазового состояния и изменению кинетики фазовых превращений в материале.

С учётом анализа механизмов и представленных морфологических схем процессов формирования нанофазных систем для различных технологических способов внешнего силового и физического воздействия можно предложить обобщённую модель процессов (см. рис. 1).

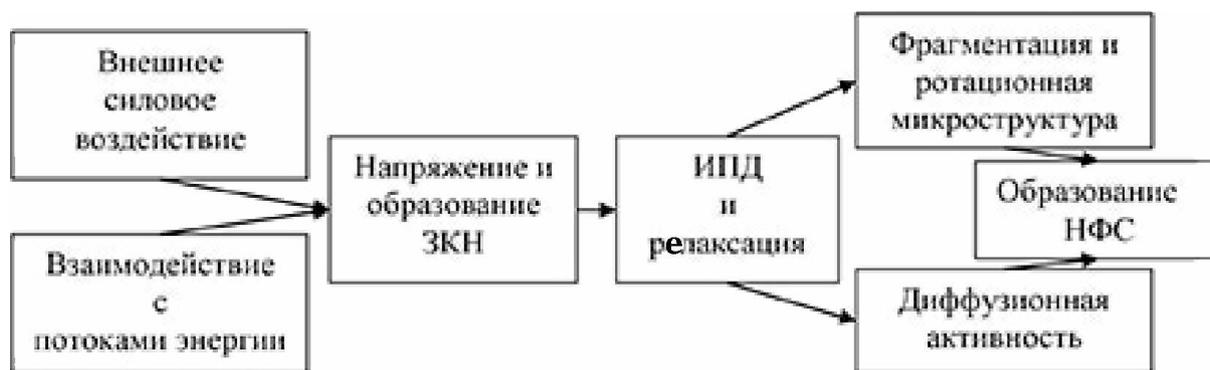


Рис. 1. Модель формирования НФС в поверхностном слое материала

Анализ исследований позволяет сделать вывод, что формирование нанофазных систем в поверхностном слое материалов как в процессе производства, так и в процессе эксплуатации изделия обусловлено реализацией ротационных механизмов пластической деформации, возникающих при внешнем силовом или физическом воздействии, инициирующих процессы диффузии, генерации и релаксации напряжений и преимущественный характер развития фазовых превращений в образующихся зонах локальных внутренних напряжений. Уникальный комплекс конструктивных и функциональных свойств таких материалов объясняется иерархическим изменением структурных образований в поверхностном слое изделия — фрагментацией структуры, образованием кластерных структур и новых нанофаз, в частности карбидных, оксидных, нитридных, в зависимости от состава элементов сплава или технологической среды, возникающей при внешнем силовом или физическом воздействии [20; 21].

Очевидно, результаты примеров научных и практических разработок по трибологическим технологиям с использованием наноматериалов и наноконструирования поверхности деталей и узлов позволит успешно решать проблему борьбы с износом и эффективной эксплуатацией механизмов и машин в условиях регионов холодного климата в различных отраслях промышленности и техники.

Список литературы

1. Забелин С. Ф., Алымов М. И. Материаловедение и технология наноструктурированных материалов. Чита: Изд-во ЗабГГПУ (Гриф УМО ВППО), 2007. 141 с.
2. Забелин С. Ф., Забелин К. С. Системный анализ и критерии классификации наноструктурированных материалов // Технология машиностроения. 2006. № 3. С. 5–10.
3. Забелин С. Ф., Забелин К. С. Системно-технологический анализ процессов синтеза объёмных нанокристаллических материалов // Технология машиностроения. 2007. № 6. С. 5–9.
4. Повышение теплостойкости и износостойкости закалённых углеродистых сталей фрикционной обработкой / А. В. Макаров, Л. Г. Коршунов [и др.] // МиТОМ. 2007. № 3. С. 51–62.
5. Бакли Д. Поверхностные явления при адгезии и фрикционном взаимодействии // пер. с англ. М.: Машиностроение, 1986. 359 с.
6. Korshunov L. G., Makarov A. V., Chernenko N. L. Ultrafine Structures formed upon Friction and Their Effect on the Tribological Properties of Steels : The Physics of Metals and Metallography. 2000. V. 90 S. I. P. 548–558.

7. Макаров А. В., Коршунов Л. Г. Повышение твёрдости и износостойкости закаленных лазером стальных поверхностей с помощью фрикционной обработки // Трение и износ. 2003. Т. 24. № 3. С. 301–306.
8. Коршунов Л. Г. Шабашов В. А., Черненко Н. Л., Пилюгин В. П. Влияние контактных напряжений на фазовый состав, прочностные и трибологические свойства нанокристаллических структур, возникающих в сталях и сплавах при трении скольжения. Тольятти: ТГУ, 2007. С. 166–168.
9. Коршунов Л. Г. Структурные превращения при трении и износостойкость аустенитных сталей // ФММ. 1992. № 8. С. 3–21.
10. Shabashov V. A., Korshunov L. G., Muroseev A. G. et al. Deformation – induced phase transitions in a high-carbon steel // Materials Science and Engineering. A 346. 2003. P. 196–207.
11. Абдулин И. Ш., Желтухин В. С. [и др.]. Формирование нанофазных систем на поверхности металлов в высокочастотной плазме // Материаловедение. 2007. №9. С. 52–56.
12. Белый А. В. Высокоинтенсивная низкоэнергетическая имплантация ионов азота // Физическая мезомеханика. 2002. Т. 5. № 1. С. 95.
13. Формирование наноразмерных кристаллов мартенсита, при электронно-пучковой обработке стали 65Г /И. Б. Целлермаер [и др.]. Тольятти: Изд-во ТГУ, 2007. С. 31–32.
14. Лесюк Е. А. Технология получения нанокристаллической структуры в поверхностных слоях массивных деталей из конструкционных и инструментальных сталей // Технология металлов. 2008. № 7. С. 29–35.
15. Механизмы и модели формирования нанофазных систем на поверхности материала при внешнем силовом и физическом воздействии / С. Ф. Забелин, А. А. Васильев [и др.]: материалы междунар. конф. Невинномысск: Изд-во НИ-ЭУП, 2009. С. 276–278.
16. Забелин С. Ф., Зеленский В. А., Забелин К. С. Морфологическая модель процесса формирования нанофазной системы на поверхности металлов и сплавов: материалы междунар. конф. «Актуальные проблемы прочности». Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2008. С. 125–128.
17. Коллективная монография. Sever plastic deformation: Toward Bulk Production of Nanostructured Materials / Ed. Burhanettin S. Altan (Michigan Technological University). USA: Nova Publishers Inc. 2006. 601 p.
18. Нанокристаллические интерметаллидные и нитридные структуры, формирующиеся при ионно-плазменном воздействии / И. А. Курзина [и др.]. Томск: Изд-во НТЛ, 2008. 324 с.
19. Курзина И. А. Наноразмерные интерметаллидные фазы, формирующиеся в условиях ионной имплантации // Материаловедение. 2010. № 2. С. 49–64.
20. Анализ процессов нанокристаллизации и формирования нанофазных систем в поверхностном слое металлов и сплавов / С. Ф. Забелин [и др.] // Технология машиностроения. 2010. № 11. С. 5–12.
21. Структурные изменения в поверхностных слоях деталей из титановых сплавов ВТ6 И ВТ9 при облучении импульсными электронными пучками / В. А. Шулов [и др.] // Упрочняющие технологии и покрытия. 2009. № 1. С. 29–31.

References

1. Zabelin S. F., Alymov M. I. *Materialovedenie i tekhnologiya nanostrukturirovannykh materialov*. Chita: Izd-vo ZabGGPU (Grif UMO VPP0), 2007. 141 s.
2. Zabelin S. F., Zabelin K. S. *Sistemnyi analiz i kriterii klassifikatsii nanostrukturirovannykh materialov // Tekhnologiya mashinostroeniya*. 2006. № 3. S. 5–10.
3. Zabelin S. F., Zabelin K. S. *Sistemno-tekhnologicheskii analiz protsessov sinteza ob"emnykh nanokristallicheskikh materialov // Tekhnologiya mashinostroeniya*. 2007. № 6. S. 5–9.
4. *Povyshenie teplostoikosti i iznosostoikosti zakalennykh uglerodistykh stalei friktsionnoi obrabotkoi / A. V. Makarov, L. G. Korshunov [i dr.] : MiTOM*. 2007. № 3. S. 51–62.
5. Bakli D., *Poverkhnostnye yavleniya pri adgezii i friktsionnom vzaimodeistvii // per. s angl. M.: Mashinostroenie*, 1986. 359 s.
6. Korshunov L. G., Makarov A. V., Chernenko N. L. *Ultrafine Structures formed upon Friction and Their Effect on the Tribological Properties of Steels // The Physics of Metals and Metallography*. 2000. V. 90 S. I. P. 548–558.
7. Makarov A. V., Korshunov L. G. *Povyshenie tverdosti i iznosostoikosti zakalennykh lazerom stal'nykh poverkhnostei s pomoshch'yu friktsionnoi obrabotki // Trenie i iznos*. 2003. T. 24. № 3. S. 301–306.
8. Korshunov L. G., Shabashov V. A., Chernenko N. L., Pilyugin V. P. *Vliyanie kontaktnykh napryazhenii na fazovyi sostav, prochnostnye i tribologicheskie svoystva nanokristallicheskikh struktur, vznikayushchikh v stalyakh i splavakh pri trenii skol'zheniya*. Tol'yatti: TGU, 2007. S. 166–168.
9. Korshunov L. G. *Strukturnye prevrashcheniya pri trenii i iznosostoikost' austenitnykh stalei // FMM*. 1992. № 8. S. 3–21.
10. Shabashov V. A., Korshunov L. G., Muroseev A. G. et al. *Deformation – induced phase transitions in a high-carbon steel // Materials Science and Engineering. A* 346. 2003. P. 196–207.
11. Abdulin I. Sh., Zheltukhin V. S. [i dr.]. *Formirovanie nanofaznykh sistem na poverkhnosti metallov v vysokochastotnoi plazme // Materialovedenie*. 2007. № 9. S. 52–56.
12. Belyi A. V. *Vysoko intensivnaya nizkoenergeticheskaya implantatsiya ionov azota // Fizicheskaya mezomekhanika*. 2002. T. 5. № 1. S. 95.
13. *Formirovanie nanorazmernykh kristallov martensita, pri elektronno-puchkovoii obrabotke stali 65G /I. B. Tsellermaer [i dr.]*. Tol'yatti: Izd-vo TGU, 2007. S. 31–32.
14. Lesyuk E. A. *Tekhnologiya polucheniya nanokristallicheskoii struktury v poverkhnostnykh sloyakh massivnykh detalei iz konstruktsionnykh i instrumental'nykh stalei // Tekhnologiya metallov*. 2008. № 7. S. 29–35.
15. *Mekhanizmy i modeli formirovaniya nanofaznykh sistem na poverkhnosti materiala pri vneshnem silovom i fizicheskom vozdeistvii / S. F. Zabelin*,

A. A. Vasil'ev [i dr.]: materialy mezhdunar. konf. Nevinnomyssk: Izd-vo NIEUP, 2009. S. 276–278.

16. Zabelin S. F., Zelenskii V. A., Zabelin K. S. Morfologicheskaya model' protsessa formirovaniya nanofaznoi sistemy na poverkhnosti metallov i splavov: materialy mezhdunar. konf. «Aktual'nye problemy prochnosti». N. Novgorod: Izd-vo NNGU, 2008. S. 125–128.

17. Kollektivnaya monografiya. Sever plastic deformation: Toward Bulk Production of Nanostructured Materials / Ed. Burhanettin S. Altan (Michigan Technological University). USA: Nova Publishers Inc. 2006. 601 p.

18. Nanokristallicheskie intermetallidnye i nitridnye struktury, formiruyushchiesya pri ionno-plazmennom vozdeistvii / I. A. Kurzina [i dr.]. Tomsk: Izd-vo NTL, 2008. 324 s.

19. Kurzina I. A. Nanorazmernye intermetallidnye fazy, formiruyushchiesya v usloviyakh ionnoi implantatsii // Materialovedenie. 2010. № 2. S. 49–64.

20. Analiz protsessov nanokristallizatsii i formirovaniya nanofaznykh sistem v poverkhnostnom sloe metallov i splavov / S. F. Zabelin [i dr.] // Tekhnologiya mashinostroeniya. 2010. № 11. S. 5–12.

21. Strukturnye izmeneniya v poverkhnostnykh sloyakh detalei iz titanovykh splavov VT6 I VT9 pri obluchenii impul'snymi elektronnyimi puchkami / V. A. Shulov [i dr.] // Uprochnyayushchie tekhnologii i pokrytiya. 2009. № 1. S. 29–31.

Статья поступила в редакцию 10.05.2015

УДК 544.77
ББК 24.5

Виктор Александрович Зеленский,
кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник,
Институт металлургии и металловедения им. А. А. Байкова РАН,
119991, Россия, г. Москва, Ленинский пр-т, 49,
e-mail: zelensky55@bk.ru

Сергей Фёдорович Забелин,
доктор технических наук, профессор, член корреспондент РАН,
Забайкальский государственный университет,
672039, Россия, г. Чита, ул. Александро-Заводская, 30,
e-mail: s.zabelin2012@yandex.ru

Алексей Борисович Анкудинов,
старший научный сотрудник
Институт металлургии и металловедения им. А. А. Байкова РАН,
119991, Россия, г. Москва, Ленинский пр-т, 49,
E-mail: a-58@bk.ru

Ирина Владимировна Трегубова,
старший научный сотрудник
Институт металлургии и металловедения им. А. А. Байкова РАН,
119991, Россия, г. Москва, Ленинский пр-т, 49,
tregubova.01@bk.ru

Исследование механических и технологических свойств дисперсно-упрочнённых электроконтактных материалов на основе композиционных порошков серебра¹

Методами порошковой металлургии изготовлены экспериментальные образцы из шихты композиционного состава 90 % Ag + 10 % Y₂O₃, а для сравнения, из порошка чистого серебра МДС-1. Исследовано влияние упрочняющей добавки нанопорошка Y₂O₃ на прессуемость и механические свойства дисперсно-упрочнённых компактных материалов на основе серебра. Композиционный порошок по параметрам прессования уступает порошку чистого серебра, при давлении прессования 600 МПа на серебряной шихте плотность — 95,2 %, на композиционной в тех же условиях — 81,7 %. Максимум твёрдости композиционных образцов, спрессованных под давлением 600 МПа и спечённых при температуре 800°С, равен 318 МПа, что превышает твёрдость контрольных компактов из чистого серебра в два раза.

Ключевые слова: электроконтактные материалы, дисперсно-упрочнённые структуры серебра, нанопорошки, механические свойства (плотность, твёрдость) и прессуемость

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 12-08-00124-а).

Victor Aleksandrovich Zelensky,
Candidate of Physics and Mathematics, Leading Researcher,
Institute of Metallurgy and Material Science A. A. Baykov,
the Russian Academy of Science,
49, Leninsky Pr., Moscow, Russia, 119991,
e-mail: zelensky55@bk.ru

Sergey Fyodorovich Zabelin,
Doctor of Technical Sciences, Professor,
Corresponding Member of the Russian Academy of Natural Sciences,
Transbaikal State University
30, Alexander-Zavodskay st., Chita, Russia, 672039,
e-mail: s.zabelin2012@yandex.ru

Alexey Borisovich Ankudinov,
Senior Researcher,
Institute of Metallurgy and Material Science A. A. Baykov,
the Russian Academy of Science,
49, Leninsky Pr., Moscow, Russia, 119991,
E-mail: a-58@bk.ru

Irina Vladimirovna Tregubova,
Senior Researcher,
Institute of Metallurgy and Material Science A. A. Baykov,
the Russian Academy of Science,
49, Leninsky Pr., Moscow, Russia, 119991,
tregubova.01@bk.ru

The Study of Mechanical and Technological Properties of Dispersion-Strengthened Electric-Based Materials on the Base of Composite Powders Argent¹

The experimental samples of furnace charge of composite structure of 9 % of Ag + 10 % of Y_2O_3 , and for comparison, of powder of pure MDS-1 silver were made with methods of powder metallurgy. Influence of the strengthening nanopowder Y_2O_3 additive on a compressibility and mechanical properties of disperse strengthened compact materials on the basis of silver is investigated. Composite powder in parameters of pressing concedes to powder of pure silver, with a pressure of pressing of 600 MPa on silver furnace charge density — 95,2 %, on composite in the same conditions — 81,7 %. The maximum of hardness of the composite samples pressed under pressure of 600 MPa and baked at temperature of 800 ^{circ}C is equal to 318 MPa that twice exceeds the hardness of control compacts from pure silver.

Keywords: electro-contact materials, disperse strengthened structures of silver, nanopowders, mechanical properties (density, hardness), compressibility/

Введение. Около четверти мирового производства серебра расходуется на нужды электроники и электротехники, в основном на изготовление контактов, поэтому даже незначительное улучшение эксплуатационных характеристик приводит к существенной экономии серебра. Повышение надёжности и долговечности контактов может быть достигнуто посредством изменения дисперсного состава структуры материала.

В частности, введение в структуру материала зерен нанодисперсного диапазона повысит твёрдость и износостойкость материалов электроконтактов при сохранении электропроводности [1].

¹This work was supported by RFBR (grant № 12-08-00124- а.

В дисперсно-упрочнённых материалах матрица является основным элементом, несущим нагрузку. Дисперсные частицы тормозят в металле движение дислокаций, увеличивая его прочность при нормальной и повышенных температурах. Высокая прочность достигается при размере частиц упрочнителя 0,001...0,01 мкм. Объёмное содержание частиц зависит от схемы армирования, но обычно не превышает 5...10 объёмных процентов.

В качестве упрочняющих фаз используются частицы тугоплавких фаз — оксидов, нитридов, боридов, карбидов. Дисперсно-упрочнённые композиционные материалы в основном получают методами порошковой металлургии. Совершенствование технологии синтеза нанодисперсных порошков серебра рассмотрено в работе [2].

Цель работы заключается в исследовании влияния упрочняющей добавки нанопорошка Y_2O_3 на прессуемость и механические свойства композиционного материала на основе серебра. Анализ влияния оценивали на каждой стадии технологического процесса получения композиционного материала при: получении нанопорошков оксида иттрия; подготовке порошковой шихты; прессовании; спекании.

Материалы и методика эксперимента. В качестве нанодисперсного компонента, вводимого в состав порошковой шихты из серебра, использовали нанопоршки Y_2O_3 с размером частиц 23–25 нм. Доля наночастиц составляла 10 % масс.

Нанопорошки оксида иттрия получали химико-металлургическим методом, в основу которого положен метод гетерофазного взаимодействия твёрдой соли металла с растворами, содержащими гидроксильные группы и термообработку полученных прекурсоров [3].

Нанопорошки гидроксида иттрия были получены с использованием твёрдой соли треххлористого иттрия шестиводного ($YCl_3 \times 6H_2O$) и концентрированного раствора аммиака. 13 грамм $YCl_3 \times 6H_2O$ всыпали в концентрированный раствор аммиака объёмом 25 мл. Через час отделяли осадок на воронке Бюхнера, промывали дистиллированной водой до pH=7, сушили на воздухе до пыления. Удельную поверхность полученных порошков измеряли на анализаторе удельной поверхности и пористости TriStar-3000 по низкотемпературной адсорбции азота (метод БЭТ). Удельная поверхность полученного полупродукта составляла 105 м²/г. Содержание хлора в осадке определяли титрометрически. По данным химического анализа, содержание хлора в полученном порошке менее 0,01 % масс. На рис. 1 представлены результаты ТГА анализа маловодного гидроксида иттрия. Видно, что процесс перехода гидроксида в оксид заканчивается при температуре приблизительно 450 °С. Поэтому отжиг гидроксидов проводили в муфельной печи на воздухе при температуре 500 °С. После отжига удельная поверхность нанопорошков оксида иттрия равнялась 48 м²/г (размер частиц 23–25 нм). Определение фазового состава анализировали методом рентгенофазового анализа на рентгеновском дифрактометре ДРОН-3 с математической обработкой результатов и использованием информации каталога данных ASTM.

Для изготовления методом порошковой металлургии экспериментальных образцов использовали две шихты – шихта композиционного состава 90 % Ag + 10 % Y_2O_3 и, для сравнительного анализа результатов экспериментов, шихта из порошка чистого серебра МДС-1.

Смешение порошков Ag и Y_2O_3 и получение шихты 90 % Ag + 10 % Y_2O_3 проводили в турбулентном смесителе С 2.0. В стеклянную ёмкость с порошками суммарной массой m=120 г засыпали 200 г стальных шаров диаметром 3 мм из стали ШХ-15, закрывали плотной крышкой и ставили на смешение. Смешение проводили на скорости «7» в течение 324 минут без промежуточных остановок. После смешения на сите вручную отделяли порошок от шаров. Потери порошка при смешении составляли около 0,3 г.

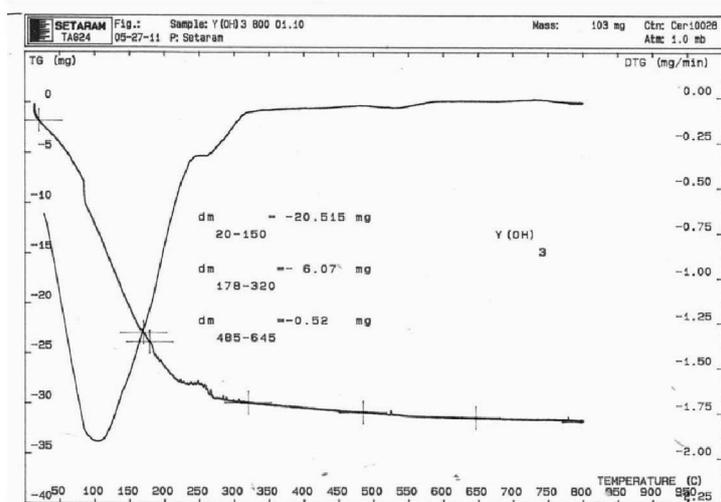


Рис. 1. Результаты ТГА анализа маловодного гидроксида

Данные рентгенофазового анализа полученного нанопорошка оксида иттрия приведены на рис. 2.

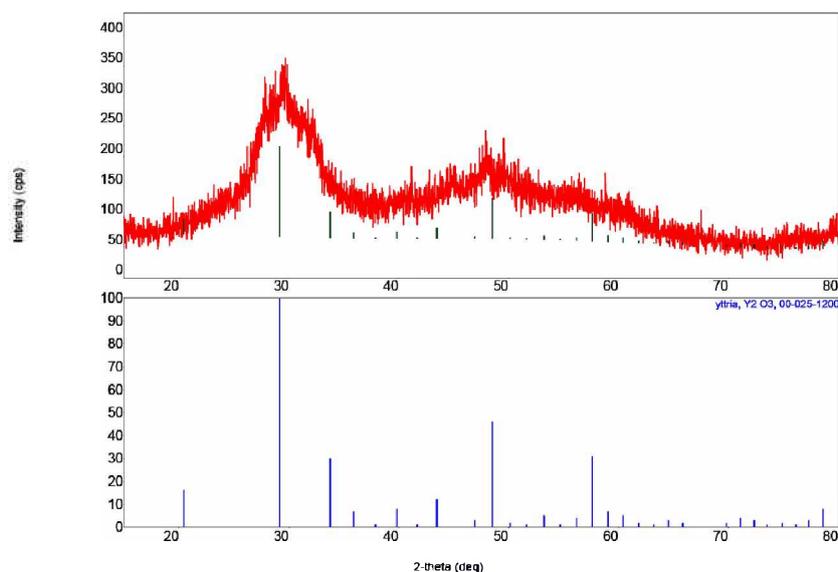


Рис. 2. Рентгенограмма нанопорошка оксида иттрия

Прессование шихт из порошка МДС-1 и композиционной шихты состава 90 % Ag + 10 % Y_2O_3 производили на немецком ручном прессе KNUTH-130042. Прессование всех образцов производилось в разъемной матрице диаметром 13,6 мм при давлении от 37,5 до 600 МПа. Осуществлялось одноосное одностороннее прессование, матрица перед прессованием обрабатывалась порошком стеарата цинка для уменьшения бокового трения. На засыпку брали 8,5 г порошка. Диаметр всех полученных прессовок – 13,6 мм. Высота менялась от образца к образцу – этот параметр зависит от типа шихты и давления прессования. Спекание образцов проводили в печи Nabertherm HT 1616 на воздухе. Температура спекания варьировалась от 500 до 900 °С. В печь закладывали одновременно пять образцов состава 90 % Ag + 10 % Y_2O_3 и два контрольных образца из серебра. Режим спекания был следующим: нагрев за 60 минут до температуры спекания; выдержка 2 часа при температуре спекания; охлаждение образцов с печью до комнатной температуры Тк. Измерение

значений твёрдости производилось на приборе ПМТ-3 с нагрузкой 50 г. Характеристики образцов, спечённых при температуре 500, 700 и 900 °С (геометрические размеры, плотность, твёрдость), представлены в таблице и на рис. 3–12.

Таблица 1

Характеристики прессовок и спечённых образцов серебра и образцов состава 90 %Ag + 10 %Y₂O₃

Хим.состав	Давление прессования, МПа	Температура спекания, °С	m, г	d, мм	h, мм	ρ, г/см ³	ρ, %	Микротвёрдость, кГ/мм ²
90 %Ag + 10 %Y ₂ O ₃	600	прессовка без спекания	8,48	13,6	7,6	7,68	91,7	–
	600		8,51	13,6	8,8	6,66	70,8	–
	150		8,52	13,6	9,9	5,92	63,0	–
	75		8,51	13,6	11,2	5,23	55,6	–
	37,5		8,52	13,6	12,3	4,77	50,7	–
100 % Ag	600		8,47	13,6	6,0	9,72	95,2	–
	75		8,48	13,6	9,2	6,35	60,4	–
90 %Ag + 10 %Y ₂ O ₃	600	500	8,46	13,5	7,5	7,88	83,8	23,9
	300		8,47	13,45	8,7	6,68	72,9	13,8
	150		8,48	13,45	9,85	6,06	64,5	7,65
	75		8,47	13,45	11,1	5,37	57,1	5,50
	37,5		8,47	13,4	12,1	4,96	52,8	2,74
100 % Ag	600		8,47	14,6	6,6	7,67	73,0	9,10
	75		8,48	12,9	9,0	7,21	68,7	13,8
90 %Ag + 10 %Y ₂ O ₃	600	700	8,43	13,5	7,5	7,91	84,2	30,65
	300		8,45	13,45	8,7	6,84	72,7	16,5
	150		8,45	13,45	9,85	6,04	64,2	11,45
	75		8,44	13,45	11,1	5,35	56,9	5,40
	37,5		8,44	13,4	12,1	4,95	52,6	2,92
100 % Ag	600		8,47	14,35	6,5	8,06	76,7	11,2
	75		8,47	12,1	8,6	8,56	81,6	15,25
90 %Ag + 10 %Y ₂ O ₃	600	700	8,33	13,2	7,35	8,28	88,1	29,5
	300		8,33	13,05	8,3	7,49	79,7	23,9
	150		8,32	13,0	9,4	6,68	71,1	9,65
	75		8,33	12,7	10,1	6,50	69,2	5,50
	37,5		8,32	11,85	10,5	7,19	76,5	3,10
100 % Ag	600		8,46	14,9	7,1	6,83	71,8	8,4
	75		8,47	11,65	8,25	9,61	91,5	11,7

Результаты и обсуждение. На рис. 3 представлена зависимость плотности прессовок от давления прессования. Отчётливо видно, что прессуемость шихты состава 90 % Ag + 10 % Y₂O₃ хуже, чем шихты из порошка серебра МДС-1. Разница абсолютных величин плотности прессовок возрастает с увеличением давления прессования. Однако относительная разница остаётся величиной почти постоянной и имеет значение около 10 %. Интересно отметить, что при давлении прессования 600 МПа на серебряной шихте достигается очень высокая плотность – 95,2 %, при этом на композиционной шихте в тех же условиях – 81,7 %. Столь высокие значения объясняются тем, что предел текучести серебра в данном случае превышен в несколько раз.

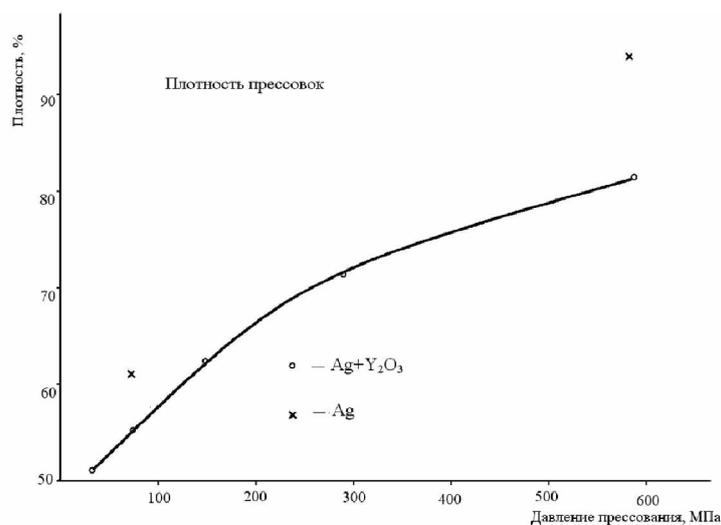


Рис. 3. Плотность прессовок в зависимости от давления прессования

На рис. 4–6 представлены графики зависимостей плотности спечённых при различных температурах образцов от давления прессования. Видно, что для композиционных образцов во всём диапазоне температуры спекания наблюдается существенный рост плотности спечённых компактов при увеличении давления прессования. Для компактов из серебра при температуре 700 °С и 900 °С картина обратная — более плотная прессовка даёт после спекания менее плотный компакт. Вероятно, при значении плотности прессовки 95,2 % в ней уже почти сформирована закрытая пористая структура, которая при спекании не позволяет выходить воздуху в процессе спекания, при этом на поверхности образца видны «вспучины» от внутренних газовых пузырей (см. рис. 7). Спекание при температуре 900 °С приводит к понижению плотности от 76,7 до 71,8 %, что оказывается ниже исходной плотности прессовки. Таким образом, можно констатировать, что при спекании наблюдается распухание образца.

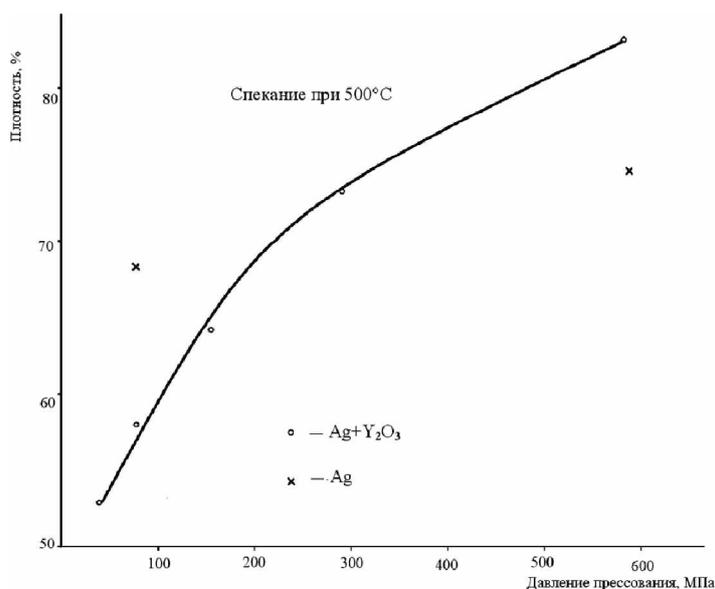


Рис. 4. Плотность спечённых при 500 °С образцов в зависимости от давления прессования

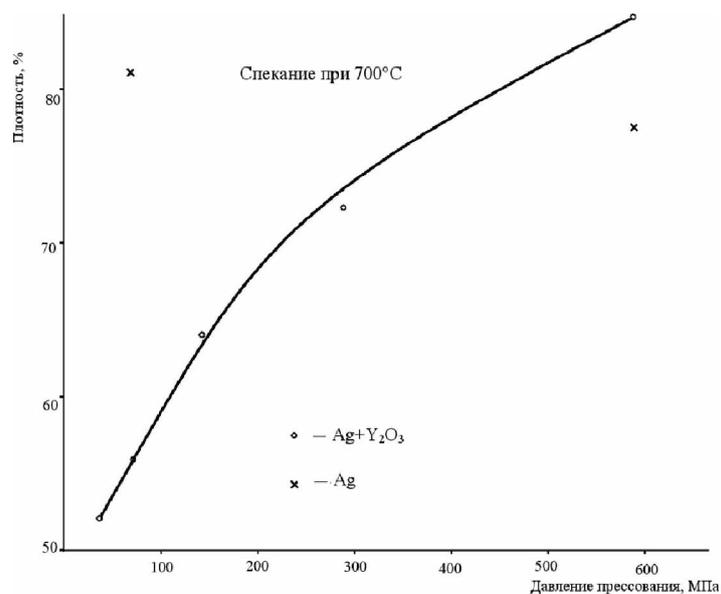


Рис. 5. Плотность спечённых при 700 °С образцов в зависимости от давления прессования

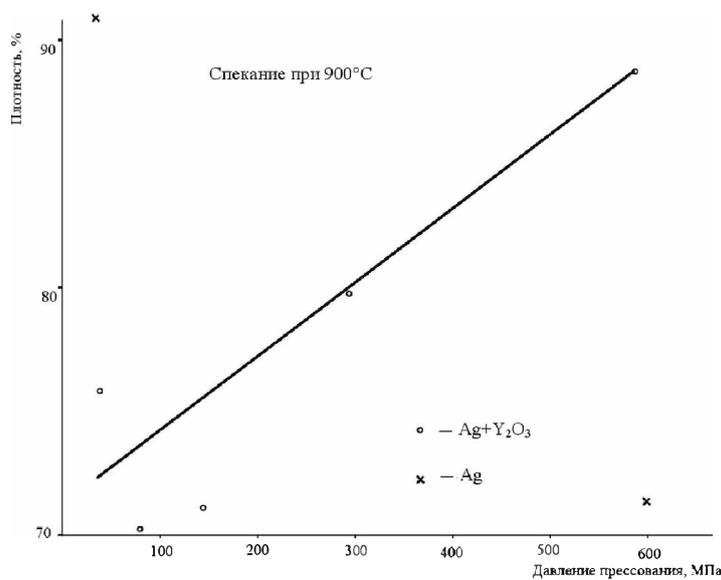


Рис. 6. Плотность спечённых при 900 °С образцов в зависимости от давления прессования



Рис. 7. «Вспучины» на поверхности образца серебра

На рис. 8–10 представлены графики зависимостей твёрдости спечённых при различных температурах образцов от давления прессования. Во всём диапазоне температуры спекания для композиционных образцов наблюдается существенный рост твёрдости спечённых компактов при увеличении давления прессования. При давлении прессования 600 МПа твёрдость оказывается на уровне 250–300 МПа и даже немного выше при спекании при 700 °С.

Образцы из серебра почти не меняют твёрдость при увеличении температуры спекания от 500 °С до 900 °С, напротив при 900 °С обнаруживается небольшое её уменьшение. Последнее, по-видимому, объясняется укрупнением зёрновой структуры за счёт собирательной рекристаллизации и уменьшением предела текучести согласно закону Холла-Петча: $\sigma_T = \sigma_0 + Kd^{-1/2}$, где σ_0 – некоторое напряжение трения, которое необходимо для скольжения дислокаций в монокристалле, а K – индивидуальная для каждого материала константа, также называемая «коэффициентом Холла-Петча».

Твёрдость всех экспериментальных образцов состава 90 % Ag + 10 % Y_2O_3 , спечённых при давлении прессования 600 МПа, оказывается как минимум в два раза выше максимальной твёрдости образцов из серебра.

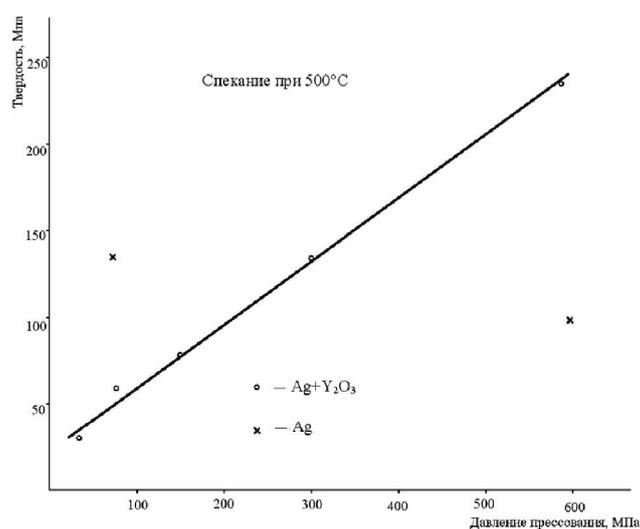


Рис. 8. Твёрдость спечённых при 500 °С образцов в зависимости от давления прессования

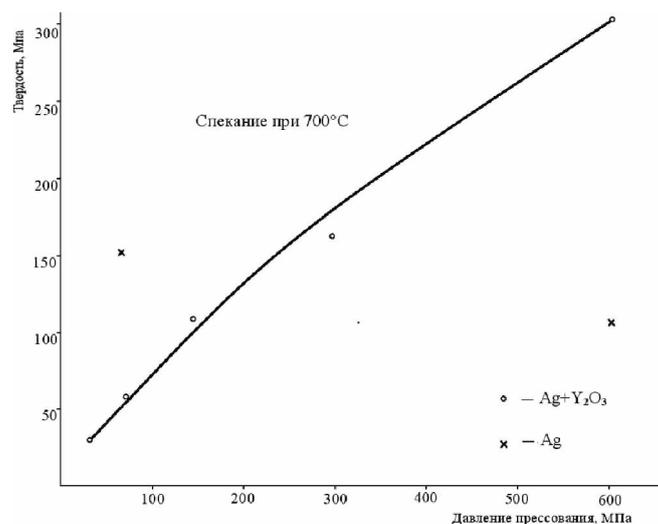


Рис. 9. Твёрдость спечённых при 700 °С образцов в зависимости от давления прессования

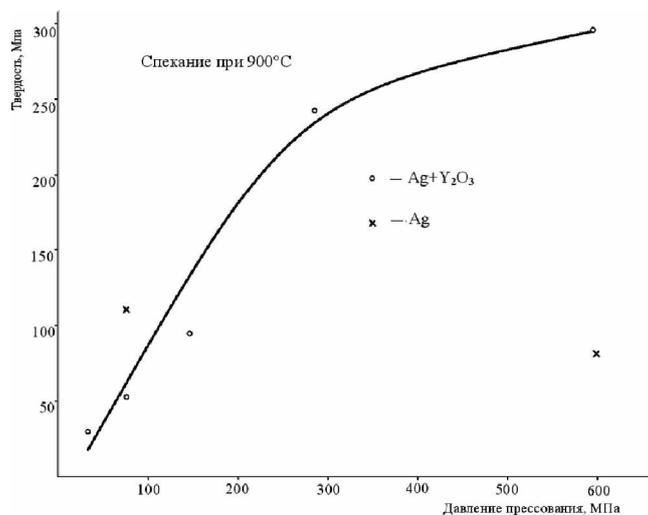


Рис. 10. Твёрдость спечённых при 900 °С образцов в зависимости от давления прессования

На рис. 11 представлены графики зависимостей плотности экспериментальных композиционных образцов от температуры спекания для разных значений давления прессования. Видно, что независимо от давления прессования наблюдается рост плотности спечённых компактов при увеличении температуры. При меньшем значении давления прессования рост оказывается более заметным.

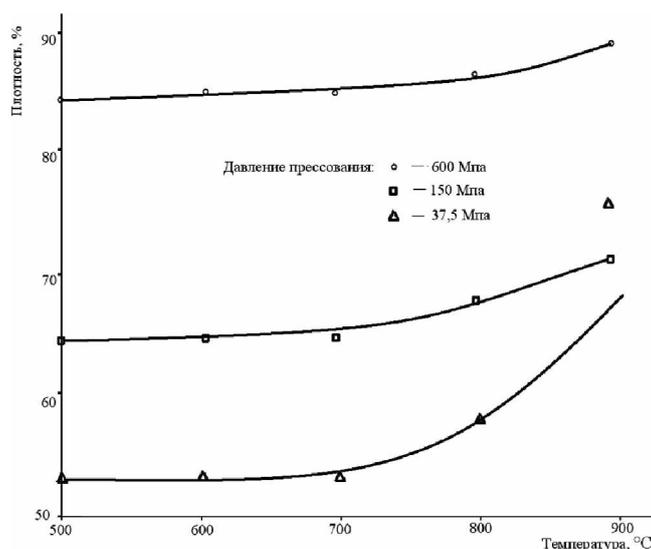


Рис. 11. Зависимости плотности образцов состава 90 %Ag + 10 %Y₂O₃ от температуры спекания при разных давлениях прессования

На рис. 12 представлены графики зависимостей твёрдости экспериментальных композиционных образцов от температуры спекания для разных значений давления прессования. Независимо от давления прессования максимальное значение твёрдости наблюдается при спекании при температуре 800 °С. Причём максимум на кривых твёрдости становится заметнее при увеличении давления прессования. Абсолютный максимум твёрдости достигнут на экспериментальном образце состава 90 %Ag + 10 %Y₂O₃, спрессованном под давлением 600 МПа в условиях спекания при температуре 800 °С. Твёрдость равна 318 МПа, что превышает твёрдость всех контрольных образцов из серебра как минимум в два раза.

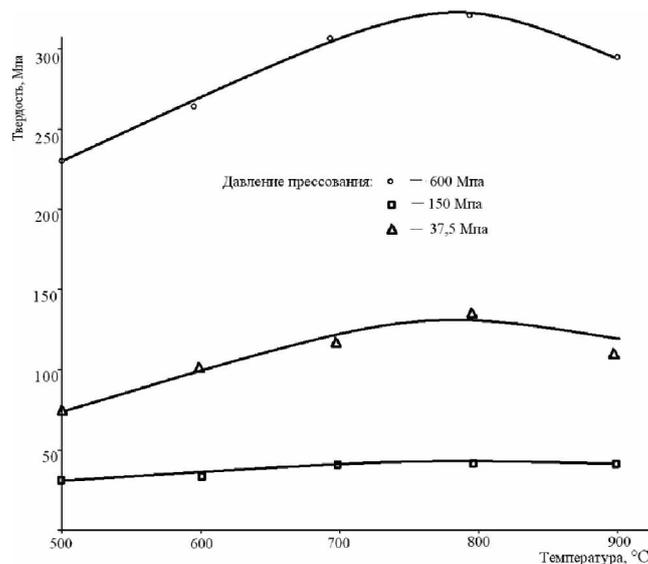


Рис. 12. Зависимости твердости образцов состава 90 % Ag + 10 % Y₂O₃ от температуры спекания при разных давлениях прессования

Выводы. Методами порошковой металлургии изготовлены экспериментальные образцы из шихты композиционного состава 90 % Ag + 10 % Y₂O₃ и, для сравнительного анализа, из порошка чистого серебра МДС-1. Исследовано влияние упрочняющей добавки нанопорошка Y₂O₃ на прессуемость и механические свойства материалов на основе серебра.

Композиционный порошок по параметрам прессования уступает порошку чистого серебра. Разница становится более заметной при увеличении давления прессования до 600 МПа. При давлении прессования 600 МПа на серебряной шихте достигается плотность – 95,2 %, при этом на композиционной шихте в тех же условиях – 81,7 % .

Твердость спечённых серебряных компактов слабо зависит от температуры спекания в диапазоне от 500 °C до 900 °C. Для образцов состава 90 % Ag + 10 % Y₂O₃ наблюдается существенный рост твердости при увеличении температуры спекания. Независимо от давления прессования максимум твердости достигается спеканием при температуре 800 °C. Максимум на кривых твердости становится заметнее при увеличении давления прессования. Абсолютный максимум твердости наблюдается на экспериментальном образце состава 90 % Ag + 10 % Y₂O₃, спрессованном под давлением 600 МПа и спечённом при температуре 800 °C. Твердость равна 318 МПа, что превышает твердость всех контрольных компактов из серебра как минимум в два раза.

Список литературы

1. Перспективные наукоёмкие технологии. Физика и химия новых неорганических материалов / М. Н. Сивков, М. Н. Ермаков, С. Н. Никифоров [и др.] // Научная сессия МИФИ-1999. Ч. 5. М.: МИФИ, 1999. С. 100.
2. Зеленский В. А., Забелин С. Ф. Совершенствование технологии синтеза нанопорошков серебра // Ученые записки ЗабГУ. Сер. «Физика, математика, техника, технологии». 2014. № 3 (56). С. 42–51.
3. Леонтьева О. Н., Трегубова И. В. Способ получения мелкодисперсного, порошка двуокиси титана. Патент РФ № 1770280 МКИ С01С 23/058.

References

1. Perspektivnye naukoemkie tekhnologii. Fizika i khimiya novykh neorganicheskikh materialov / M. N. Sivkov, M. N. Ermakov, S. N. Nikiforov [i dr.] // Nauchnaya sessiya MIFI-1999. Ch. 5. M.: MIFI, 1999. S. 100.
2. Zelenskii V. A., Zabelin S. F. Sovershenstvovanie tekhnologii sinteza nanoporoshkov serebra // Uchenye zapiski ZabGU. Ser. «Fizika, matematika, tekhnika, tekhnologii». 2014. № 3 (56). S. 42–51.
3. Leont'eva O. N., Tregubova I. V. Sposob polucheniya melkodispersnogo, poroshka dvoukisi titana. Patent RF № 1770280 MKI SO1S 23/058.

Статья поступила в редакцию 10.05.2015

УДК 658.382
ББК 30.606

*Ольга Валерьевна Номоконова,
кандидат технических наук, доцент,
Забайкальский институт предпринимательства,
672086, Россия, г. Чита, ул. Ленинградская, 16,
e-mail: ovnom@mail.ru*

О логико-вероятностном моделировании электроопасных ситуаций в условиях неопределённости

Предлагается применение нечётких множеств для учёта неопределённости при построении логико-вероятностных моделей. Описывается логико-вероятностная модель возможности неблагоприятного воздействия электрического поля на персонал, обслуживающий электроустановки сверхвысокого напряжения. Вероятности элементов модели и конечного события представлены как нечёткие числа.

Ключевые слова: логико-вероятностный метод, нечёткое множество, нечёткое число, функция принадлежности.

*Olga Valeryevna Nomokonova,
Candidate of Technical Science, Associate Professor,
Transbaikal Institute of Business,
16, Leningradskaya St., Chita, Russia, 672086,
e-mail: ovnom@mail.ru*

On Logical-Probabilistic Simulation of Electrical Danger Situations within Uncertainty

It is proposed to use fuzzy sets to account for neop-definiteness in the construction of logical and probabilistic models. It describes the logical-probabilistic model-pleasant opportunity unwholesome influence of the electric field staff, serve-electrical EHV-binding. Probability of elements of the model and the final events are presented as non-distinct number.

Keywords: logical-probabilistic method, fuzzy-set of the set, fuzzy number, membership function.

Успешность построения математической модели определяется тем, насколько глубоко и достаточен исходный качественный уровень проникновения в существо проблемы, и насколько адекватно и полно качественные особенности изучаемого объекта могут быть формализованы и отображены в количественных характеристиках математической модели.

В начале XX века в работах П. С. Порецкого, С. П. Бернштейна, М. А. Гаврилова был разработан метод логико-вероятностного моделирования (ЛВМ), получивший развитие в трудах С. В. Мерскина, Р. Барлоу, И. А. Ушакова, В. А. Галасина и многих других авторов в 60–70-х годах прошлого века [1; 2]. ЛВМ основан на использовании функций алгебры логики для аналитической записи условий функционирования систем и переходе от функций алгебры логики к вероятностным функциям, объективно выражающим состояние сложной системы.

Построение логико-вероятностной модели, в частности, может быть использовано для оценки риска неблагоприятного воздействия электрического поля на человека. Логическая

модель, отражающая возможность неблагоприятного воздействия электрического поля на работника имеет вид [3]:

$$F = x_1 \wedge (x_2 \vee (x_2 \wedge x_3) \vee (x_2 \wedge x_3 \wedge x_4) \vee (x_2 \wedge x_3 \wedge x_4 \wedge x_5) \vee (x_2 \wedge x_3 \wedge x_4 \wedge x_5 \wedge x_6)) \vee x_7, \quad (1)$$

где элементы x_i , $i = \overline{1, 7}$ модели, отражающей процесс возникновения предпосылок повреждения здоровья при работе с электроустановками сверхвысокого напряжения, представляют собой события, которые могут быть разделены на следующие группы: событие, связанное с организацией работ по техническому обслуживанию и ремонту оборудования (x_1); события, отражающие возможность неблагоприятного воздействия электрического поля на персонал (5 элементов модели – от x_2 до x_6); событие, связанное с использованием работником средств индивидуальной защиты (x_7); F – конечное событие (возможность неблагоприятного воздействия электрического поля на работника).

Вероятность неблагоприятного воздействия электрического поля на человека для данной модели вычисляется по формуле [3]:

$$\tilde{P}(F) = p_1 [1 - (1 - p_2)(1 - p_2 p_3)(1 - p_2 p_3 p_4)(1 - p_2 p_3 p_4 p_5)(1 - p_2 p_3 p_4 p_5 p_6)] p_7, \quad (2)$$

где p_i – вероятность события x_i .

Но существенный недостаток логико-вероятностной модели обусловлен неопределённостью информации о вероятностях событий x_i , $i = \overline{1, 7}$, особенно связанных с действиями человека, поскольку из-за отсутствия статистических данных для их расчёта может быть использован только метод экспертных оценок. Полученная экспертным путем информация является неопределённой, нечёткой. В некоторых случаях эксперт может дать лишь лингвистические оценки вероятностей типа «вероятность велика», «вероятность достаточно мала», «вероятность приблизительно равна p » или «вероятность около p ».

Обработка нечёткой информации может быть обеспечена применением лингвистического подхода [1; 4], позволяющего использовать для описания элементов структурной модели приближённые субъективные оценки, формализуемые с помощью нечётких чисел и лингвистических переменных [6; 7].

Таким образом, в силу существенных неопределённостей, при логико-вероятностном моделировании электроопасных ситуаций целесообразно вероятности структурных элементов модели рассматривать как нечёткие числа [7] $\tilde{p}_i = \int \mu_{\tilde{p}_i}(x)/x$, $(L - R)$ -типа, где

$$\mu_{\tilde{p}_i}(x) = \begin{cases} L((a - x)/\alpha), & \forall x \leq a, \alpha > 0, \\ R((x - a)/\beta), & \forall x \geq a, \beta > 0. \end{cases} \quad (3)$$

При построении математических моделей с использованием вероятностей p как нечётких чисел \tilde{p} границы их функции принадлежности p' и p'' могут определяться по формулам:

$$p' = \tilde{p} - \beta(p), \quad (4)$$

$$p'' = \tilde{p} + \beta(p), \quad (5)$$

где $\beta(p)$ – расстояния между точками, в которых $\mu_{\tilde{p}_i}(x) = 0,5$ (табл. 2) [8].

Таблица 1

x	$\beta(x)$
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	0,46x
10, 20, 30, 40, 60, 70, 80, 90	$(0,357-0,00163x)x$
35, 45, 55, 65, 75, 85, 95	$(0,213-0,00067x)x$
15	6,45
25	6,75
50	24

Прочие двузначные числа $1/2 (\beta(10[x/10] + x) + \beta(x - 10[x/10]))$

[...] – целая часть числа.

Теперь $\tilde{p} = \int_{p'}^p (x - p')/x + \int_p^{p''} (p'' - x)/x$ или $\langle p', p, p'' \rangle$ и для расчёта вероятности $\tilde{P}(F)$ применимы формулы:

$$\tilde{p}_i + \tilde{p}_j = \int_{p'}^p \frac{x - p'}{p - p'} / x + \int_p^{p''} \frac{p'' - x}{p'' - p} / x = \tilde{p}, \quad (6)$$

где $p = p_i + p_j, p' = p'_i + p'_j, p'' = p''_i + p''_j$;

$$\tilde{p}_i \times \tilde{p}_j = \int_{p'}^p \frac{\sqrt{x} - \sqrt{p'}}{\sqrt{p} - \sqrt{p'}} / x + \int_p^{p''} \frac{\sqrt{p''} - \sqrt{x}}{\sqrt{p''} - \sqrt{p}} / x = \tilde{p}, \quad (7)$$

где $p = p_i \times p_j, p' = p_i p'_j + p'_i p_j - p_i p_j, p'' = p_i p''_j + p''_i p_j - p_i p_j$;

$$\tilde{p}_i + \tilde{p}_j = \int_{p'}^p \frac{x - p'}{p - p'} / x + \int_p^{p''} \frac{p'' - x}{p'' - p} / x = \tilde{p}, \quad (8)$$

где $p = p_i - p_j, p' = p'_i - p'_j, p'' = p''_i - p''_j$.

Принимая в качестве p_i среднее значение доли открытого распределительного устройства, занимаемой зоной, в которой напряжённость электрического поля лежит в диапазоне от E_i до E_{i+5} , умноженное на коэффициент $R(\Delta t) = e^{-\lambda \Delta t}$ можно определить вероятности элементов x_1, \dots, x_7 как нечёткие числа $(L - R)$ -типа (табл. 2), где $\lambda = 1/\bar{E}_i$; Δt – допустимое время нахождения работника в зоне $[E_i; E_{i+5}]$; \bar{E}_i – среднее значение напряженности электрического поля в зоне $[E_i; E_{i+5}]$.

Таблица 1

Значения вероятностей элементов логической модели оценки возможности неблагоприятного воздействия электрического поля на работника

Элемент модели x_i	Вероятность p_i	Нечёткое число \tilde{p}_i
x_1	$1,30 \cdot 10^{-1}$	$(9,1 \cdot 10^{-2}; 1,3 \cdot 10^{-1}; 1,69 \cdot 10^{-1})$
x_2	$9,80 \cdot 10^{-2}$	$(8,91 \cdot 10^{-2}; 9,8 \cdot 10^{-2}; 10,69 \cdot 10^{-2})$
x_3	$6,20 \cdot 10^{-2}$	$(5,60 \cdot 10^{-2}; 6,2 \cdot 10^{-2}; 6,80 \cdot 10^{-2})$
x_4	$1,60 \cdot 10^{-2}$	$(1,14 \cdot 10^{-2}; 1,6 \cdot 10^{-2}; 2,06 \cdot 10^{-2})$
x_5	$1,90 \cdot 10^{-3}$	$(1,37 \cdot 10^{-3}; 1,9 \cdot 10^{-3}; 2,43 \cdot 10^{-3})$
x_6	$1,00 \cdot 10^{-4}$	$(5,40 \cdot 10^{-5}; 1,0 \cdot 10^{-4}; 1,46 \cdot 10^{-4})$
x_7	$8,50 \cdot 10^{-1}$	$(7,17 \cdot 10^{-1}; 8,5 \cdot 10^{-1}; 9,83 \cdot 10^{-1})$

По формуле (2), используя правила (6), (7) и (8), получаем

$$\tilde{P}(F) = \langle 0, 1732 \cdot 10^{-2}; 1, 148 \cdot 10^{-2}; 3, 396 \cdot 10^{-2} \rangle.$$

Полученная вероятность неблагоприятного воздействия электрического поля на человека характеризуется нечётким числом с ассиметричной функцией принадлежности, т. е. является нечётким множеством чисел, равных или чуть больших, чем $1, 148 \cdot 10^{-2}$.

Таким образом, применение нечётких чисел как для определения вероятностей элементов логической модели, так и вероятности конечного события позволяет учесть неопределённость исходной информации и получить хотя и нечёткий, но, как ни парадоксально, более точный конечный результат.

Список литературы

1. Заде Л. А. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближённых решений / пер. с англ. Л. А. Заде. М.: Мир, 1976. 165 с.
2. Рябинин А. И., Черкесов Г. Н. Логико-вероятностные методы исследования надёжности структурно сложных систем. М.: Радио и связь, 1981. 264 с.
3. Сидоров А. И., Украинская И. С., Номоконова О. В. Оценка риска неблагоприятного воздействия электрического поля на персонал вблизи электроустановок сверхвысокого напряжения // Изв. вузов. Проблемы энергетики. 2012. № 1–2. С. 107–119.
4. Модели принятия решений на основе лингвистической переменной / А. Н. Борисов, А. В. Алексеев, О. А. Крумберг [и др.]. Рига: Зинантне, 1982. 256 с.
5. Пфанцгаль И. Теория измерений / пер. с англ. И. Пфанцгаль. М.: Мир, 1976. 248 с.
6. Саати Т. Л. Взаимодействие в иерархических системах // Техническая кибернетика. 1979. № 1. С. 68–84.
7. Аверкин А. Н. Нечёткие числа в системах искусственного интеллекта и управления. Тверь: СНИИ, 1991. 11 с.
8. Скофенко А. В. О построении функции принадлежности нечётких множеств, соответствующих количественным экспертным оценкам // Науковедение и информатика. Киев: Наукова думка. 1981. Вып. 22. С. 70–79.

References

1. Zade L. A. Ponyatie lingvisticheskoi peremennoi i ego primeneniye k prinyatiyu priblizhennykh reshenii / per. s angl. L. A. Zade. M.: Mir, 1976. 165 s.
2. Ryabinin A. I., Cherkesov G. N. Logiko-veroyatnostnye metody issledovaniya nadezhnosti strukturno slozhnykh sistem. M.: Radio i svyaz', 1981. 264 s.
3. Sidorov A. I., Ukrainskaya I. S., Nomokonova O. V. Otsenka riska neblagopriyatnogo vozdeystviya elektricheskogo polya na personal vblizi elektroustanovok sverkhvysokogo napryazheniya // Izv. vuzov. Problemy energetiki. 2012. № 1–2. S. 107–119.
4. Modeli prinyatiya reshenii na osnove lingvisticheskoi peremennoi / A. N. Borisov, A. V. Alekseev, O. A. Krumberg [i dr.]. Riga: Zinantne, 1982. 256 s.

5. Pfantsgal' I. Teoriya izmerenii / per. s angl. I. Pfantsgal'. M.: Mir, 1976. 248 s.
6. Saati T. L. Vzaimodeistvie v ierarkhicheskikh sistemakh // Tekhnicheskaya kibernetika. 1979. № 1. S. 68–84.
7. Averkin A. N. Nechetkie chisla v sistemakh iskusstvennogo intellekta i upravleniya. Tver': SANI, 1991. 11 s.
8. Skofenko A. V. O postroenii funktsii prinadlezhnosti nechetkikh mnozhestv, sootvetstvuyushchikh kolichestvennym ekspertnym otsenkam // Naukovedenie i informatika. Kiev: Naukova dumka. 1981. Vyp. 22. S. 70–79.

Статья поступила в редакцию 17.05.2015

УДК 621.9.01
ББК 34.630.01

*Людмила Сергеевна Романова,
кандидат технических наук, доцент,
Забайкальский государственный университет,
642039, Россия, г. Чита, ул. Александрo-Заводская, 30,
e-mail: Kurlser@yandex.ru*

Исследование влияния компенсирующих способностей резьбонарезных патронов на устойчивость метчиков

Исследовано влияние компенсирующих способностей патронов на устойчивость метчиков для четырех типов патронов – жесткого, плавающего, качающегося, переменной структуры. Представлен регрессионный анализ и графическое изображение экспериментальных данных, определяющие влияние компенсирующих способностей патронов на устойчивость инструмента при нарезании резьбы в начальные моменты операции. Установлено, что патрон переменной структуры обеспечивает метчику на фазах ориентирования и наживления высокую степень устойчивости, и, следовательно, более высокое качество обработанного отверстия.

Ключевые слова: компенсирующая способность, патрон, метчик, нарезание резьбы, регрессионный анализ, график, матрица, угол перекоса, изгибающее усилие.

*Lyudmila Sergeyevna Romanova,
Candidate of Technical Sciences, Associate Professor,
Transbaikal state University,
30 Alexandro-Zavodskaya Str., Chita, 642039, Russia,
e-mail: Kurlser@yandex.ru*

Study on the Effect of Compensating Abilities of Screw-Forming Tapping on the Stability of Tapes

The influence of compensatory abilities of cartridges on the sustainability of taps for the four-screw forming cartridges — rigid, floating, swinging, variable structure is investigated. The author presents the regression analysis and graphic representation of experimental data, determining the influence of the compensating abilities of ammo on the stability of the tool when cutting threads in the initial moments of the operation. It is established that the tape of variable structure provides the tap on the orientation phases the high degree of stability, and, consequently, higher quality of the processed holes.

Keywords: compensating capacity, cartridge, screw tap, thread cutting, regression analysis, graph, matrix, skew angle, bending force.

Повышение качества выпускаемой продукции и эффективности производства является важнейшей задачей современного машиностроения, решение которой возможно лишь при использовании современных технологий обработки деталей и сборки соединений и узлов машин.

Наибольшее распространение среди разъемных соединений деталей машин имеют резьбовые соединения, которые характеризуются высокими конструктивными и технологическими показателями.

Точность и качество образования внутренних резьб в значительной степени зависит от возможностей применяемой вспомогательной оснастки, её свойств и особенностей технологического процесса. Выбор конструкции резьбонарезного патрона связан с обоснованием его конструкции и свойств многофункциональности, обрабатываемой массы показателей: предохранение от предельных нагрузок, копирование шага резьбы, реверс вращения, выключение, переключение механики и т. д. [6; 7].

При разработке конструкций патронов одним из определяющих факторов является избежание возможных бракоопасных ситуаций при операциях резьбообразования и причин их возникновения.

Проектирование патронов с компенсирующей механикой связано с решением вопроса о величине компенсирующих смещений подвижной части патрона (инструментодержателя) относительно его базы, в качестве которой принимается хвостовик или корпус. Основной задачей компенсирующей механики является поглощение погрешностей от радиальных, осевых и угловых смещений по осям отверстия детали и шпинделя заворачивающей машины. Наличие подобных поглотителей стабилизирует процессы обработки или сборки, делает его более устойчивым.

Теоретические принципы работы компенсирующей механики жестких, качающихся, плавающих и с переменной структурой патронов описываются такими параметрами как, габариты компенсирующе-удерживающего блока, система подвижностей его механики, жесткость подвески патрона в замкнутом состоянии. Так как каждый из патронов обладает собственными показателями, эффективность их работы в процессе операции оценивается некоторыми общими формами [1].

Устойчивость режущего инструмента при нарезании внутренней резьбы определяется значениями угла перекося γ и изгибающих усилий $P_{из}$, которые определяются такими факторами как угловая скорость и радиальное смещение [2; 3]. То есть для определения данных показателей варьируются только эти факторы, поскольку угол заборного конуса постоянный, а допуск берется рекомендуемый. Уравнение регрессии имеет следующий вид:

$$(P_{из}) = a_0 + a_1v + a_2v_2 + a_3e_{пр} + a_4e_2 + a_5e_{пр}v, \quad (1)$$

где $a_0...a_5$ — коэффициенты регрессии второго порядка.

Исходная матрица уровней определяющих факторов для жесткого, качающегося, плавающего и с переменной структурой патрона представляет собой следующий вид:

a	v	e	y
1	+	+	
1	+	-	
1	-	+	
1	-	-	
1	0	+	
1	0	-	
1	0	0	
1	+	0	
1	-	0	

где +, -, 0 — соответственно верхний, нижний и средний уровни значений определяющих факторов.

Таким образом, составлено 8 матриц (по 2 для каждого патрона). Например, матрица для жесткого патрона при $\gamma = f(e_{пр}, \omega)$ представляет собой:

a	x1	x2	x3	x4	x5	γ
1	0,12	0,014	0,8	0,64	0,096	18,59
1	0,12	0,014	0,3	0,09	0,036	14,52
1	0,07	0,0049	0,8	0,64	0,056	15,07
1	0,07	0,0049	0,3	0,09	0,0063	12,24
1	0,09	0,0081	0,8	0,64	0,072	16,28
1	0,09	0,0081	0,3	0,09	0,027	13,53
1	0,09	0,0081	0,5	0,25	0,045	14,59
1	0,12	0,014	0,5	0,25	0,06	16,22
1	0,07	0,0049	0,5	0,25	0,035	13,55

Уравнения регрессии:

$$\gamma = 13,77 - 45,03 \times v + 327,7 \times v^2 - 2,69 \times e_{\text{пр}} + 2,1 \times e_{\text{пр}}^2 + 66 - 28 \times e_{\text{пр}}v, \quad (2)$$

$$P_{\text{из}} = 63,18 + 194,53 \times v - 40,73 \times v^2 + 47,2 \times e - 30,72 \times e_{\text{пр}}^2 - 4,73 \times e_{\text{пр}}v. \quad (3)$$

Распределение значений углов перекоса γ и изгибающих сил $P_{\text{из}}$ для различных патროнов при нарезании резьбы метчиками представлено на рис. 1–4.

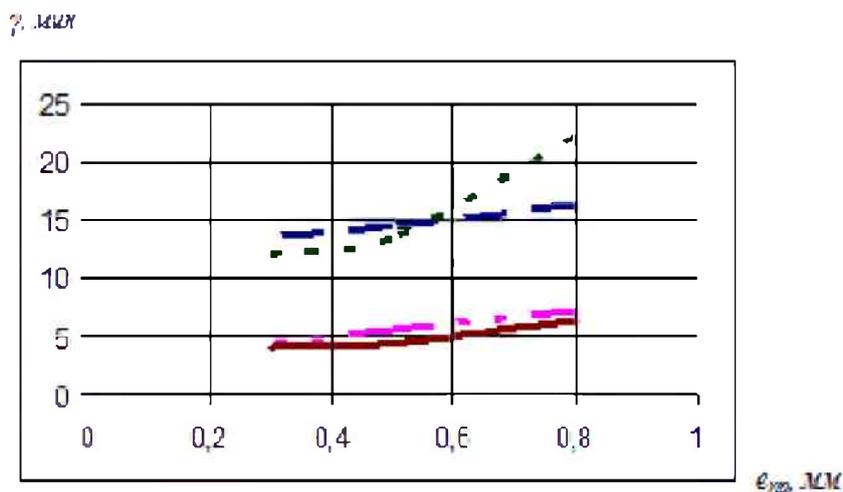


Рис. 1. Графики зависимостей угла перекоса от радиального смещения осей

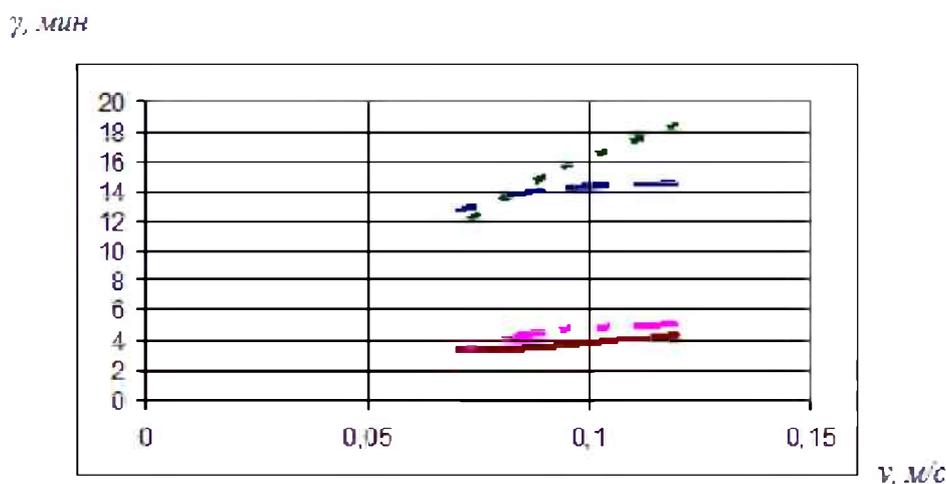


Рис. 2. График зависимостей угла перекоса от скорости смещения осей

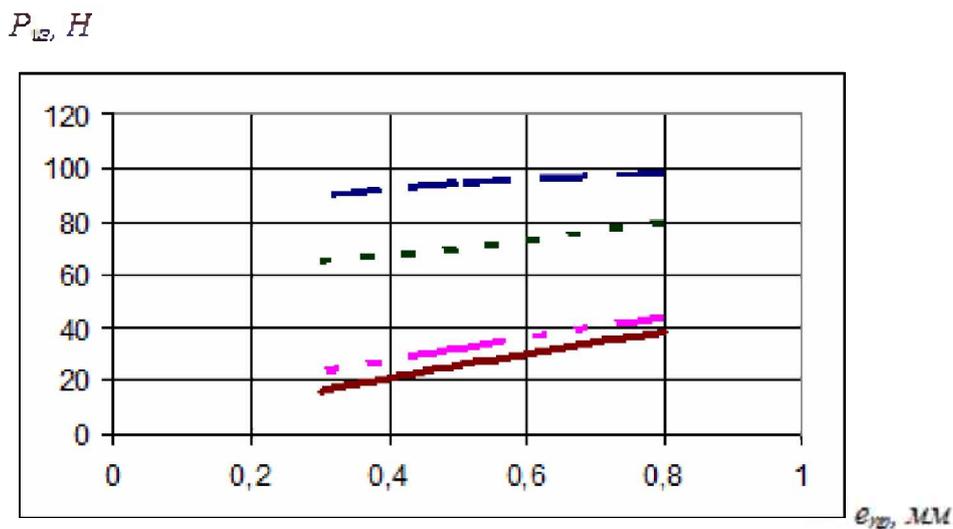


Рис. 3. Графики зависимостей изгибающих сил от радиального смещения осей

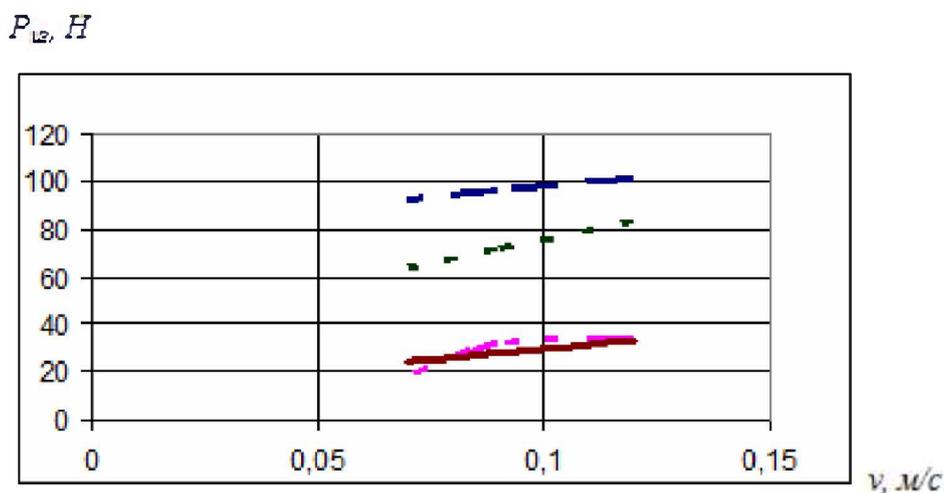


Рис. 4. Графики зависимостей изгибающих сил от скорости смещения осей
 - - - - - жесткий; ····· качающийся;
 ————— переменной структуры; — · — · — плавающий

Графики показывают, что значения углов перекося у качающегося патрона имеют значительный разброс данных, характеризую его низкую устойчивость в начальные моменты операции. Значения патрона переменной структуры и плавающего на верхних точках различаются на 11% в пользу первого, а на нижних точках примерно одинаковые. Жесткий патрон превышает значения γ на 60 % по сравнению с патроном переменной структуры.

Изгибающие силы изменяются равномерно у каждого патрона. По сравнению с патроном переменной структуры значения у плавающего больше на 13 %, у качающегося на 53 %, у жесткого — на 62 %.

Таким образом, патрон переменной структуры обеспечивает метчику на фазах ориентирования и наживления высокую степень устойчивости, и, следовательно, более высокое качество обработанного отверстия. Построим поля распределения средних значений γ и $R_{из}$ (рис. 5–6) в зависимости от значений скорости и радиального смещения осей. Матрицы для построения будут выглядеть следующим образом:

$\gamma = f(v)$ при $e=0,5$ мм (z2)

ω				
0,12	14,5	4,37	18,51	5
0,09	14,09	3,53	15,03	4,51
0,07	12,7	3,33	11,59	3,25
	0	1	2	3

$\gamma = f(e)$ при $v=0,09$ м/с (z1)

e				
0,8	16,33	7,19	22,29	6,42
0,5	14,51	5,55	13,47	4,48
0,3	13,55	4,38	12,07	4,14
	0	1	2	3

$P_{uz} = f(v)$ (z4)

ω				
0,12	101,3	33,2	83,92	32,95
0,09	96,06	31,43	71,9	24,74
0,07	92,36	18,34	63,96	24,17
	0	1	2	3

$P_{uz} = f()$ (z3)

e				
0,8	98,11	43,8	80,1	38,15
0,5	94,12	31,65	69,82	25,56
0,3	89,78	22,9	65,08	16,27
	0	1	2	3

где 0 – жесткий патрон (ПЖ);
 1 – плавающий патрон (ПР);
 2 – качающийся патрон (ПУ);
 3 – переменной структуры патрон (ПС).

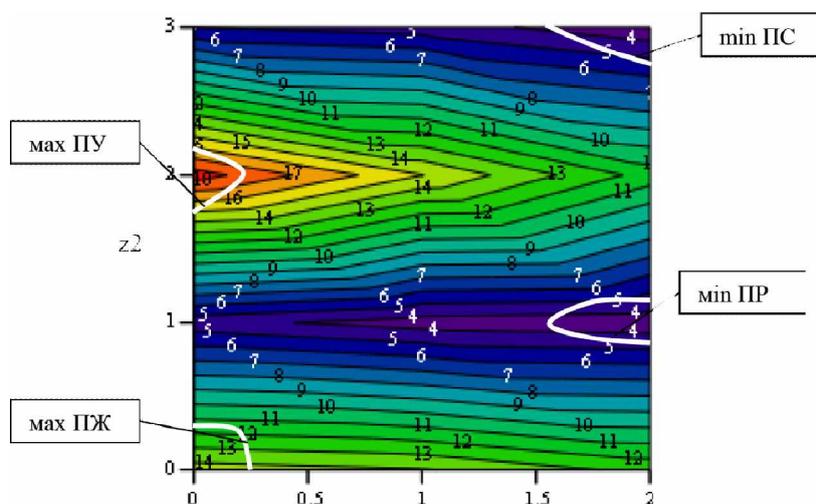
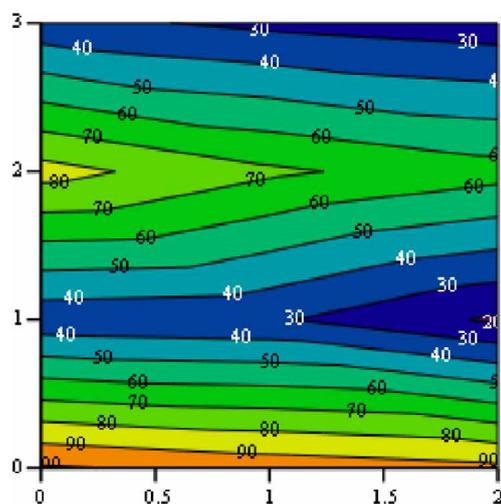


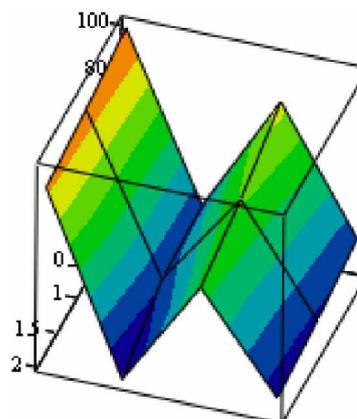
Рис. 5. Поля распределения средних значений γ

$$P_{из} = f(v)$$



z4

а)



z4

б)

Рис. 6. Поля (а) и поверхности (б) распределения средних значений изгибающих сил

Регрессионный анализ и графическое представление экспериментальных данных позволили установить влияние компенсирующих способностей патронов на устойчивость инструмента при нарезании резьбы в начальные моменты операции. Установлено также, что наиболее высокими компенсирующими способностями обладает патрон с переменной структурой механики и эффективность его работы в среднем на 42,6 % выше по сравнению с другими исследуемыми патронами. Подтверждена способность патрона с переменной структурой компенсирующей механики наиболее качественно обеспечивать процессы резьбонарезания и сборки.

Список литературы

1. Березин С. Я., Курбатова Л. С. Анализ принципа действия компенсирующих механизмов завинчивающих патронов // Сборка в машиностроении, приборостроении. 2009. № 10. С. 21–29.
2. Березин С. Я., Курбатова Л. С. Классификация резьбонарезных патронов по конструктивным и технологическим признакам // Сборка в машиностроении, приборостроении. 2005. № 10. С. 16–19.
3. Березин С. Я. Современные инструментальные системы для резьбосборочных и нарезных операций // Материалы научно-практической конференции «Технические науки, технологии и экономика». Ч. I. Чита: ЧитГТУ, 2002. С. 14–21.
4. Касьянов О. Н., Никулин И. К., Страшко Ю. Г. Патрон для нарезания точных резьб // Станки и инструменты. 1977. № 4.
5. Якухин В. Г., Ставров В. А. Изготовление резьбы: справочник. М.: Машиностроение, 1989. 192 с.

6. Moore D. Driving the tap. // Cutting Tool Engineering. 1995. 47. № 5. P. 52–60.
7. Tapping attachment. // Tooling and Production. 2002. 68. № 1. P. 12.

References

1. Berezin S. Ya., Kurbatova L. S. Analiz printsipa deistviya kompensiruyushchikh mekhanizmov zavinchivayushchikh patronov // Sborka v mashinostroenii, priborostroenii. 2009. № 10. S. 21–29.
2. Berezin S. Ya., Kurbatova L. S. Klassifikatsiya rez'bonareznykh patronov po konstruktivnym i tekhnologicheskim priznakam // Sborka v mashinostroenii, priborostroenii. 2005. № 10. S. 16–19.
3. Berezin S. Ya. Sovremennye instrumental'nye sistemy dlya rez'bosborochnykh i nareznykh operatsii // Materialy nauchno-prakticheskoi konferentsii «Tekhnicheskie nauki, tekhnologii i ekonomika». Ch. I. Chita: ChitGTU, 2002. S. 14–21.
4. Kas'yanov O. N., Nikulin I. K., Strashko Yu. G. Patron dlya narezaniya tochnykh rez'b // Stanki i instrumenty. 1977. № 4.
5. Yakukhin V. G., Stavrov V. A. Izgotovlenie rez'by: spravochnik. M.: Mashinostroyeniye, 1989. 192 s.
6. Moore D. Driving the tap. // Cutting Tool Engineering. 1995. 47. № 5. P. 52–60.
7. Tapping attachment. // Tooling and Production. 2002. 68. № 1. R. 12.

Статья поступила в редакцию 10.06.2015

УДК 537.226.1: 537.311.322
ББК 22.37.0

Николай Петрович Степанов¹,
доктор физико-математических наук, профессор,
Забайкальский государственный университет,
672039, Россия, г. Чита, ул.Александро-Заводская, 30,
e-mail: np-stepanov@mail.ru

Лилия Эдуардовна Степанова,
Забайкальский государственный университет,
672039, Россия, г. Чита, ул.Александро-Заводская, 30,
e-mail: slilyab1@mail.ru

Анастасия Сергеевна Лозовская,
магистр по направлению подготовки «Химия»,
Забайкальский институт предпринимательства,
672086, Россия, г. Чита, ул. Ленинградская, 16,
e-mail: nastya15.86@mail.ru

Экспериментальное определение статических и оптических времён релаксации в теллуридах висмута и сурьмы

На основе исследований электропроводности и плазменного отражения кристалла $Bi_{1.5}Sb_{0.5}Te_3$ получены закономерности температурного поведения статических и оптических времён релаксации в диапазоне от 85 до 300 К. Установлено, что температурная зависимость статического времени релаксации в диапазоне 85–150 К соответствует рассеянию вырожденных, а в диапазоне 200–300 К — невырожденных носителей заряда на акустических колебаниях решётки. Обнаружено расхождение значений статических и оптических времён релаксации, коррелирующее со сближением энергии плазмонов и переходов носителей между неэквивалентными экстремумами валентной зоны.

Ключевые слова: статическое и оптическое время релаксации, электропроводность, плазменный резонанс, межзонные переходы, электрон-плазмонное взаимодействие.

¹Вклад: Разработана методика определения статических времён релаксации на основании данных экспериментального исследования температурных зависимостей электропроводностей плазменного отражения кристаллов $Bi_2Te_3 - Sb_2Te_3$.

Nikolay Petrovich Stepanov¹,
Doctor of Physical and Mathematics, Professor,
Transbaikal State University,
30 Aleksandro-Zavodskaya St., Chita, Russia, 672039,
e-mail: np-stepanov@mail.ru

Liliya Eduardovna Stepanova,
Transbaikal State University,
30 Aleksandro-Zavodskaya St., Chita, Russia, 672039,
e-mail: slilya61@mail.ru

Anastasiya Sergeevna Lozovskaya,
Master of the direction of training chemistry,
Transbaikal institute of business,
672086, Chita, Leningradskaya str., 16,
e-mail: nastya15.86@mail.ru

Experimental Determination of the Static and Optical Relaxation Times in Bismuth Telluride and Antimony

On the basis of researches of electrical conductivity and plasma reflection of crystal of $Bi_{1.5}Sb_{0.5}Te_3$ the regularities of temperature reaction of static and optical times of relaxation in the range from 85 to 300 K were received. It was found, that temperature dependence of static time of relaxation in the range of 85–150 K corresponds to dispersion degenerate, and in the range of 200–300 K — non-degenerate carriers of charge on acoustic fluctuations of lattice. The divergence of values of static and optical times of relaxation correlating with rapprochement of energy of plasmons and transitions of carriers between nonequivalent extremum of valence zone is revealed.

Keywords: static and optical time of a relaxation, conductivity, plasma resonance, interzonal transitions, electron-plazmon interaction.

Введение

Знание температурной зависимости статических времён релаксации в полупроводниках открывает путь к интерпретации температурного поведения ряда кинетических коэффициентов, играющих заметную роль в практических применениях материала. Однако получение достоверной информации о величине статического времени релаксации свободных носителей заряда и его температурной зависимости осложнено тем, что экспериментально определяемые физические величины зависят от целого ряда параметров, которые сами являются функциями температуры. Например, коэффициент электропроводности зависит от таких параметров, как время релаксации, концентрация и эффективная масса свободных носителей заряда, закономерности температурного изменения каждого из которых могут формироваться несколькими одновременно действующими механизмами. Поэтому из данных об электропроводности сложно извлечь информацию о времени релаксации и о его зависимости от температуры. В связи с этим большой массив экспериментальных данных о величине электропроводности полупроводникового материала, методика измерения которой при различных температурах хорошо отработана, зачастую не используется в полной мере.

Так, на рис. 1 приведены результаты исследования зависимости электропроводности от температуры кристаллов $Bi_2Te_3 - Sb_2Te_3$, полученные в работе [1, с. 810], из которых

¹Contribution: The method of determination of static relaxation times on the basis of an experimental study of the temperature dependence of the electrical plasma reflection crystals $Bi_2Te_3 - Sb_2Te_3$.

следует, что в широком интервале температур и составов поведение электропроводности должно определяться существенным изменением интенсивности релаксационных процессов. В связи с этим, актуальной является задача проведения такого рода исследований, из которых можно было бы получить достоверные данные о температурном поведении времени релаксации. Решения этой задачи можно добиться, используя данные об электропроводности материала, если при помощи какого-либо дополнительного эксперимента получить информацию о температурной зависимости величины концентрации p и эффективной массы m^* свободных носителей заряда, или их отношения p/m^* , входящего в выражение для электропроводности

$$\sigma = \frac{(p \times e^2)}{m^*} \times \tau_{st}, \quad (1)$$

в котором e — заряд электрона, τ_{st} — усреднённое статическое время релаксации. В данной работе таким дополнительным экспериментом явилось исследование спектров плазменного отражения, которое позволяет установить величину отношения p/m^* при температуре фиксации спектра. Это оказывается возможным благодаря тому, что величина плазменной частоты ω — резонансной частоты колебаний коллективизированных свободных носителей заряда относительно ионного остова как единого целого, может быть определена из выражения

$$\omega^2 = \frac{(pe^2)}{(m^* \times \epsilon_0) \times \epsilon_\infty}, \quad (2)$$

в которое кроме диэлектрической постоянной ϵ_0 и величины, характеризующей поляризационный фон кристалла в высокочастотном диапазоне ϵ_∞ , входит отношение p/m^* . Определив в ходе оптического эксперимента значения ω_p^2 и ϵ_∞ , имеем возможность рассчитать значение $\tau_{st} = (\epsilon_0 \epsilon_\infty \omega_p^2 \setminus \sigma)^{-1}$, при условии знания величины электропроводности образца, определённой на постоянном токе при той же температуре, при которой фиксировался спектр плазменного отражения. Повторяя описанную процедуру для ряда температур, можно получить зависимость $\tau_{st}(T)$.

Отметим, что в рамках рассматриваемого подхода τ_{st} представляет собой усреднённый параметр. Даже если в обеспечении проводимости в кристаллах со сложной зонной структурой участвуют несколько (j) групп носителей заряда, то в этом случае получим:

$$\sigma = \sum_j \sigma_j = \sum_j \left(\frac{e^2 n \tau_{st} t}{m^*} \right)_j = \epsilon_0 \epsilon_\infty \sum_j (\omega_p^2 \tau_{st})_j = \epsilon_0 \epsilon_\infty \omega_p^2 \langle \tau_{st} \rangle. \quad (3)$$

В данной работе описанный подход к определению усреднённых статических времён релаксации и их температурной зависимости был применён для кристалла $Bi_{1.5}Sb_{0.5}Te_3$, спектры отражения которого, полученные в геометрии $E \perp C_3$, где C_3 — тригональная ось кристалла, а E — вектор напряженности электрического поля падающей электромагнитной волны, приведены на рис. 2. В такой геометрии оптического эксперимента отраженный сигнал формируется колебаниями свободных носителей заряда относительно ионного остова, происходящими в направлении перпендикулярном C_3 , в котором и производились измерения электропроводности $\sigma \perp$, представленные на рис. 1.

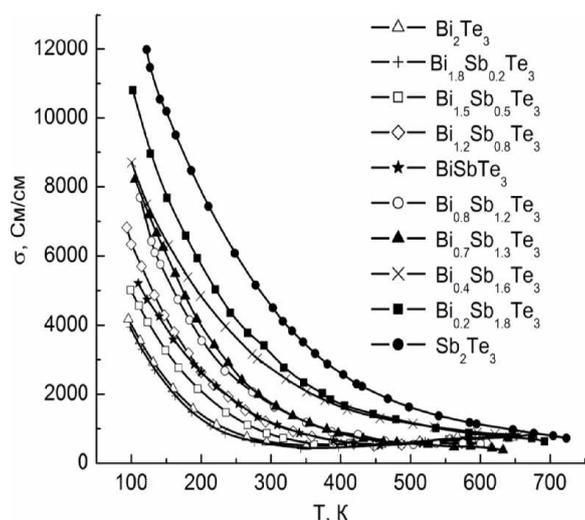


Рис. 1. Зависимость электропроводности от состава и температуры твёрдого раствора $Bi_xSb_{2-x}Te_3$ [1]. Электропроводность определялась вдоль направления перпендикулярного тригональной оси кристалла z .

Методика и техника эксперимента

Монокристаллы твёрдых растворов системы $Bi_2Te_3 - Sb_2Te_3$ относятся к кристаллам ромбоэдрической сингонии с пространственной группой типа: D_{2d}^5 по международной классификации или $R\bar{3}m$ по классификации Федорова. Из-за наличия слоистой структуры Bi_2Te_3 легко скалывается по плоскости спайности (0001), обладающей зеркальным блеском. Исследованный монокристалл был выращен в Институте металлургии и материаловедения им. А. А. Байкова методом Чохральского. В качестве исходных материалов использовались Te, Sb, Bi , содержащие 99,9999 массовых процента основного вещества.

Измерение спектров коэффициента отражения R при различных температурах проводились на фурье-спектрометре BRUKER IFS-113V. Использовался испарительный криостат "Oxford", конструкция которого обеспечивает плавную регулировку температуры в диапазоне 4–300 К и её стабилизацию с точностью не хуже 2 К. Регистрировались спектры отражения неполяризованного излучения от свежеприготовленного скола кристалла по плоскости спайности. Более детальное описание методики и техники оптического эксперимента, а также технологии подготовки образцов к измерениям приведено в работе [2, с. 967], в которой также приводится методика определения значений плазменной частоты ω_p , поляризационного фона кристалла ϵ_∞ , и τ_{opt} – усреднённого времени релаксации свободных носителей заряда на оптических частотах, рассчитывающегося по ширине линии функции энергетических потерь $-Im\epsilon^{-1} = \epsilon_2(\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2)^{-1}$. Спектральные зависимости действительной ϵ_1 и мнимой ϵ_2 частей функции диэлектрической проницаемости получаются после расчёта по соотношениям Крамерса-Кронига, спектральной зависимости фазового угла θ отражённого луча

$$\theta(\omega_0) = -\frac{2\omega_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{Im R^{0.5}(\omega) d\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}, \quad (4)$$

где $\theta(\omega_0)$ – фазовый угол отражённой электромагнитной волны на некоторой частоте ω_0 . Зная спектральную зависимость коэффициента отражения $R(\omega)$ и $\theta(\omega)$, можно восстановить частотные зависимости действительной $\epsilon_1 + 1$ и мнимой ϵ_2 частей функций диэлектрической проницаемости, а также энергетических потерь $-Im\epsilon^{-1}$, характеризующей скорость производства энтропии в системе.

Параметры, характеризующие плазменные колебания в исследованном кристалле при различных температурах, приведены в таблице, из которой видно, что $\epsilon_{\infty\perp}$ увеличивается, а отношение p/m^* уменьшается с ростом температуры, что обеспечивает наблюдаемое на рис. 2 смещение плазменного минимума в низкочастотную область спектра и коррелирует с наблюдающейся в данных материалах аномальной температурной зависимостью коэффициента Холла [3, с. 320]. Ниже мы вернёмся к обсуждению эффекта увеличения коэффициента Холла с ростом температуры в твёрдых растворах $Bi_2Te_3 - Sb_2Te_3$, а пока отметим, что, как следует из таблицы, электропроводность кристалла $Bi_{1.5}Sb_{0.5}Te_3$ в диапазоне температур от 85 до 300 К уменьшается в 7,4 раза, а статическое время релаксации – только в 5,1 раза. Из этого следует, что уменьшение электропроводности частично связано и с уменьшением соотношения p/m^* .

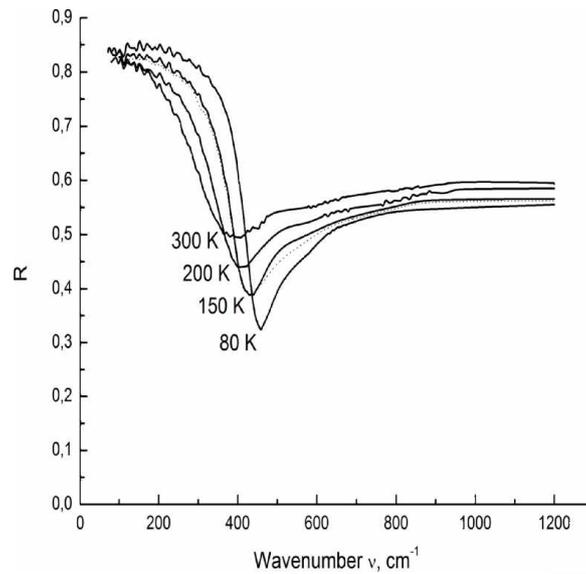


Рис. 2. Спектры плазменного отражения кристалла $Bi_{1.5}Sb_{0.5}Te_3$ при различных температурах. $\perp C_3$.

Анализ экспериментальных результатов

Известно, что при температурах выше 100 К в нелегированных кристаллах решёточное рассеяние доминирует над примесным [3, с. 320]. В соответствии с теоретическим описанием акустического механизма рассеяния, для сильно вырожденных носителей заряда время релаксации приблизительно пропорционально T^{-1} , а для невырожденных – T^{-2} . На рис. 3 приведена экспериментальная температурная зависимость статического времени релаксации, построенная в соответствии с данными таблицы, а также модельные кривые, характеризующие поведение $\tau(T)$ при рассеянии на акустических колебаниях кристаллической решётки носителей заряда, находящихся в вырожденном и невырожденном состояниях. Как видно из рис. 3, в диапазоне температур от 85 до 150 К, наклон экспериментальной кривой $\tau_{st}(T)$ ближе к T^{-1} , в то время как в области температур от 200 до 300 К он соответствует T^{-2} . Это согласуется с представлением о том, что в исследуемом кристалле вырождение снимается в диапазоне температур от 150 до 200 К. Отметим, что в диапазоне от 120 до 220 К наблюдается отклонение температурной зависимости термоэдс данного кристалла от линейной, что также свидетельствует о начале перехода электронной системы от вырожденного состояния к невырожденному [1, с. 810]. Таким образом, есть основания считать, что полученные значения статического времени релаксации свободных носителей заряда исследованного кристалла в диапазоне температур от 85 до 300 К достоверны, а вид температурной зависимости $\tau_{st}(T)$ реалистично отражает процессы, происходящие в его электронной

системе, и соответствует теоретическим представлениям. Это обстоятельство позволяет с большим доверием подойти и к результатам расчёта отношения p/m^* , которое, как следует из табл. 1, уменьшается в диапазоне от 85 до 300 К в 1.47 раза.

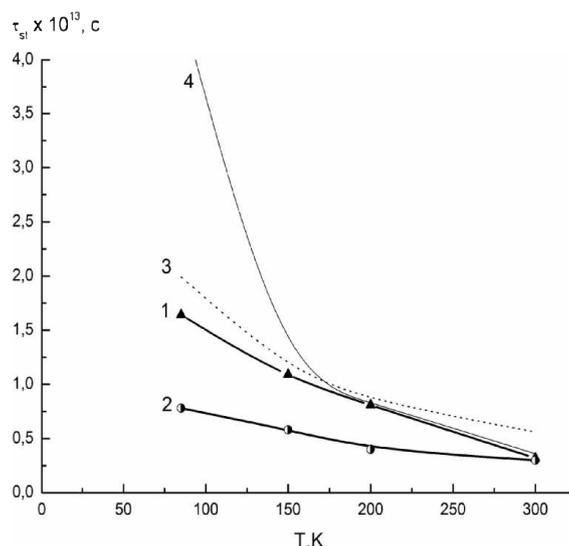


Рис. 3. Температурная зависимость статического τ_{st} времени релаксации кристалла $Bi_{1.5}Sb_{0.5}Te_3$ — 1, а также модельные кривые, характеризующие поведение $\tau(T)$ в вырожденном — 2 и невырожденном — 3 состояниях электронной системы

Таблица

Характеристики прессовок и спечённых образцов серебра и образцов состава 90 %Ag + 10 %Y₂O₃

T, К	$\omega_{pT} \times 10^{-3}, c^{-1}$	$\epsilon_{\infty \perp}$	$\overline{\tau}_{opt} \times 10^{13}, c$	$\sigma \times 10^{-6},$ [ом ⁻¹ × м ⁻¹]	$\frac{p}{m^*} \times 10^{-56},$ [м ³ × кг ⁻¹]	$\overline{\tau}_{st} \times 10^{13}, c$	$\frac{\overline{\tau}_{ct}}{\overline{\tau}_{opt}}$
85	8.20	54	0.78	0.52	1.25	1.64	2.10
150	7.52	60	0.58	0.32	1.17	1.09	1.88
200	6.91	62	0.45	0.21	1.02	0.81	1.80
300	6.21	63	0.31	0.07	0.85	0.32	1.03

Действительно, наблюдаемое уменьшение электропроводности с ростом температуры только отчасти может быть объяснено уменьшением статического времени релаксации, а следовательно, изменяются и другие параметры, характеризующие состояние электронной системы материала, такие как концентрация свободных носителей заряда и их эффективная масса. Причём, если считать, что в интервале температур от 85 до 300 К эффективная масса изменяется незначительно, то уменьшение соотношения p/m^* будет всецело определяться уменьшением концентрации свободных носителей заряда. Моделирование температурных зависимостей магнитной восприимчивости данного кристалла, полученных на СКВИД — магнетометре, выполненное в работе [4, с. 1004], показывает, что эффективная масса при увеличении температуры от 50 до 200 К слабо уменьшается, а затем растёт, и при 300 К практически равна её значению при 80 К.

Заметим, что уменьшение концентрации лёгких дырок с ростом температуры в 1,47 раза практически совпадает с величиной роста коэффициента Холла, наблюдающегося в исследуемых кристаллах в данном интервале температур [3, с. 320]. Это обстоятельство позволяет вернуться к дискуссии по поводу причин аномального температурного поведения коэффициентов Холла, которые в р-типе Bi_2Te_3 в диапазоне от 100 К до 300 К увеличиваются примерно в 1.5 раза, а в Sb_2Te_3 в диапазоне от 100 до 625 К — в 4 раза. В работе

[3, с. 320] было отмечено, что аномальную температурную зависимость коэффициента Холла не удастся объяснить влиянием изменения степени вырождения, так как этот эффект слишком мал. При дальнейшем обсуждении аномального поведения коэффициента Холла были выдвинуты два предположения, первое из которых причину этого явления связывало с изменением величины анизотропии времени релаксации при переходе от примесного к фононному механизму рассеяния. Однако, как следует из рис. 3, указанный переход должен наблюдаться при температурах ниже 100 К, в то время как аномальное поведение коэффициента Холла наблюдается в диапазоне от 100 до 300 К, в котором доминирует рассеяние носителей заряда на колебаниях кристаллической решётки. Второе предположение основано на утверждении о том, что причиной аномального поведения коэффициента Холла является сложная структура валентной зоны в кристаллах твёрдых растворов Bi_2Te_3 , содержащей, как минимум, два неэквивалентных экстремума – лёгких и тяжёлых дырок. Это предположение аналогично объяснению аномального поведения коэффициентов Холла в $PbTe$, в котором наличие двух подзон в валентной зоне установлено в ряде независимых экспериментов [3, с. 320]. В случае сложного строения валентной зоны увеличение температуры приводит к перераспределению носителей между неэквивалентными экстремумами, в результате чего происходит уменьшение концентрации легких дырок, обладающих высокой подвижностью, за счёт увеличения концентрации тяжелых, малоподвижных дырок, так что общее количество свободных носителей заряда практически не изменяется. При этом уменьшение концентрации легких дырок с ростом температуры будет сопровождаться уменьшением эффективной массы за счёт отличия их энергетического спектра от квадратичного. Это уменьшение при определённой температуре будет остановлено тепловым расширением кристаллической решётки и усилением электрон-фононного взаимодействия, после чего начнется увеличение эффективной массы носителей [4, с. 1004]. В этом заключается некоторая уникальность исследованного материала, отличающегося от обычных полупроводников, в которых увеличение температуры приводит к росту концентрации свободных носителей заряда, и, как следствие, одинаковой направленности действия перечисленных механизмов изменения эффективной массы.

Из таблицы также видно, что уменьшение температуры приводит к изменению отношения τ_{st}/τ_{opt} в диапазоне от 85 до 300 К в два раза. Причины различия статических и оптических времён релаксации могут быть связаны не только с дефектами поверхности кристалла, формирующей отражённый сигнал, но и с дополнительными релаксационными процессами, усиливающимися на оптических частотах именно в области низких температур. Необходимо отметить, что изменение величины отношения статических и оптических времён релаксации наблюдалось и в кристаллах висмута, легированных примесями различного типа [5, с. 1537], и коррелировало с изменением величины отношения $\rho = E_t/E_p$ энергии одночастичных возбуждений электронной системы: межзонных переходов E_t к энергии коллективных возбуждений плазмы свободных носителей заряда E_p , что отражено на рис. 4 и рис. 5. Результаты исследований влияния электрон-плазмонного взаимодействия на интенсивность рекомбинационных процессов изложены в работах [6; 7]. В частности, в работе [6, с. 451] было показано, что в случае выполнения условия $E_p \sim E_t$ наряду с обычными межзонными механизмами релаксации неравновесной плотности носителей заряда (излучательным и ударным) становится возможным процесс прямой межзонной рекомбинации дырок и электронов с испусканием плазменных волн в спонтанном или стимулированном процессе. Скорость испускания этим каналом возрастает при сближении ширины запрещённой зоны и энергии плазменных колебаний. Первые теоретические расчёты скорости рекомбинации неравновесных носителей заряда, осуществляющейся посредством эмиссии плазмонов, были выполнены автором работы [7, с. 5443], в которой было показано, что при выполнении условия $E_p \sim E_t$ время жизни, обусловленное межзонной плазмонной реком-

бинацией, даётся выражением:

$$\tau = \left(\frac{1}{n_0} + \frac{1}{p_0} \right)^{-1} \frac{\varepsilon_\infty \pi^2 \alpha^2 \hbar (1 + \mu)^{3/2}}{e^2 |I_{c,v}|^2 (\hbar\omega)^{3/2} \sqrt{\hbar\omega - \Delta E}} \times \left\{ \rho \left[(\rho - 1)^2 + \frac{\tau_{pl}^{-1}}{2\hbar\omega_p} \right]^{1/2} + \rho(\rho - 1) \right\}^{1/2} \times \left[\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) + \exp\left(-\frac{E_{0c} - q}{kT} + \frac{\Delta E + \mu\hbar\omega}{(1 + \mu)kT}\right) \right], \quad (6)$$

в котором $\alpha = \frac{\hbar^2}{2m_c}$, $\mu = \frac{m_c}{m_v}$, n_0, p_0 — концентрация электронов и дырок в состоянии равновесия, ΔE — энергетический зазор, E_{0c} — энергия на краю зоны проводимости. Сомножитель в фигурных скобках позволяет учесть величину отношения $\rho = E_t/E_p$, а также время жизни плазмонов τ_{pl} . Матричный элемент оператора перехода электронов между состояниями валентной зоны и зоны проводимости — $|I_{c,v}|$, в рамках двухзонной модели, можно оценить в соответствии с выражением:

$$\frac{1}{m_{BE}} = \frac{2|I_{c,v}|^2}{3m^2 E_g}, \quad (7)$$

где $m_{BE} - 0$ — эффективная масса на краю зоны. На рис. 6 приведён расчёт времени плазмонной рекомбинации, выполненный в соответствии с выражением (5), в зависимости от величины ρ , из которого видно, что скорость плазмонной рекомбинации оказывается максимальной при выполнении условия $E_p > E_t$ и плавно уменьшается при увеличении ρ .

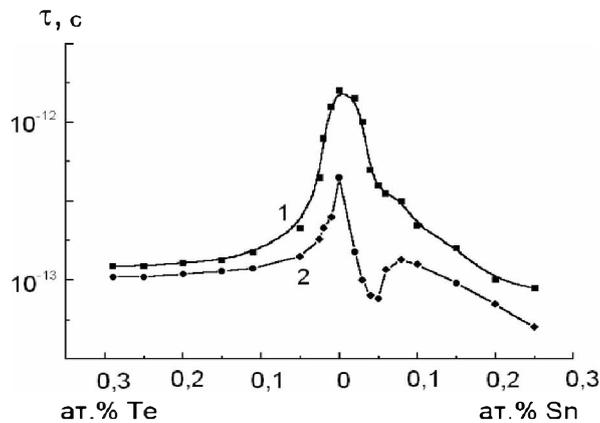


Рис. 4. Величина статического τ_{st} — 1 и оптического τ_{opt} — 2 времён релаксации в монокристаллах Вi в зависимости от концентрации и типа легирующей примеси при $T = 80$ К

Наблюдающееся на рис. 3 изменение отношения τ_{st}/τ_{opt} свидетельствует о том, что сближение значений E_p и E_t может существовать и в кристалле $Bi_{1,5}Sb_{0,5}Te_3$, в котором, как видно из таблицы, при понижении температуры от 300 до 85 К происходит значительное, примерно на 32 %, увеличение плазменной частоты свободных носителей заряда, а следовательно, и энергии плазменных колебаний E_p . Величину энергии переходов E_t можно оценить исходя из той информации, которая имеется о параметрах зонной структуры исследуемых материалов и их зависимости от температуры. В качестве одночастичных возбуждений электронной системы, которые могут повлиять на интенсивность электрон-плазмонного взаимодействия, необходимо рассматривать переходы из валентной зоны в

зону проводимости, а также переходы носителей между неэквивалентными экстремумами валентной зоны, которые, как показано выше, влияют на температурное поведение параметров, характеризующих свойства материала в диапазоне от 85 до 300 К.

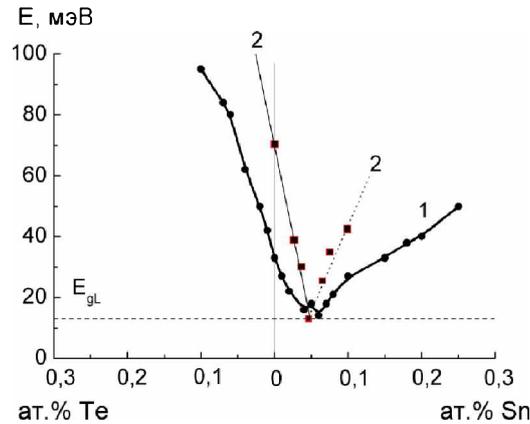


Рис. 5. Диаграмма значений энергии плазменных колебаний в монокристаллах висмута ($\bar{k} \perp C_3$, $\bar{E} \parallel C_3$, = 80 К) — 1 и энергии межзонных переходов — 2 в зависимости от концентрации и типа легирующей примеси

Вначале рассмотрим переходы носителей из валентной зоны в зону проводимости. В исследованном кристалле ширина запрещённой зоны равна примерно 125 мэВ. Известно, что в кристаллах твёрдых растворов $Bi_2Te_3 \sim Sb_2Te_3$ уменьшение температуры сопровождается увеличением ширины термической запрещённой зоны [1, с. 810]. Об этом свидетельствуют и результаты наших исследований. Так, из таблицы видно, что ϵ_∞ уменьшается с понижением температуры. Это даёт возможность, используя эмпирическое соотношение Мосса

$$\epsilon_\infty^2 E_g = const, \tag{8}$$

хорошо выполняющееся для типичных полупроводников, видеть, что E_g в исследованном кристалле должно увеличиваться с уменьшением температуры. Оценить величину изменения E_g целесообразно исходя из экспериментальных данных работ, обзор которых приведён в монографии [3, с. 320], из которых следует, что в кристаллах Bi_2Te_3 величина $dE_g/dT \approx -0.4 \cdot 10^{-4}$ эВ /град. Тогда при изменении температуры от 300 до 85 К ширина запрещённой зоны, а следовательно, и энергия межзонного перехода увеличится примерно на 8 мэВ, что в четыре раза меньше увеличения энергии плазмонов. Таким образом, при изменении температуры от 85 до 300 К E_p увеличивается от 40 до 54 мэВ, в то время как E_g — от 125 до 133 мэВ. С учётом сдвига Бурнштейна-Мосса энергия перехода рассчитывается в соответствии с выражением $E_t = E_g + 2E_F$, в котором E_F — энергия Ферми. В исследуемом кристалле уровень химического потенциала находится в валентной зоне, состоящей из подзоны лёгких и более глубоко расположенной подзоны тяжёлых дырок. Исходя из данных, приведённых в работе [3, с. 320], величина энергетического зазора между указанными подзонами в кристалле $Bi_{1.5}Sb_{0.5}Te_3$ может варьироваться в пределах от 30 до 60 мэВ, а уровень химического потенциала при температуре 85 К находится в подзоне лёгких дырок. В ходе исследования оптических свойств кристаллов Bi_2Te_3 при температуре 80 К, результаты которых представлены в работе [8, с. 808], наблюдались межзонные переходы с энергией 185 мэВ, исходя из чего можно предположить, что $E_F \sim 30$ мэВ. Тогда с учётом температурного изменения E_g , и в соответствии с выражением Бурштейна-Мосса $E_t \sim 185 - 193$ мэВ. Таким образом, отношение E_t/E_p изменяющееся с температурой от 4,6 до 3,6, оказывается достаточно велико для того, чтобы, как это следует из рис. 6, электрон-плазмонное взаимодействие могло влиять на поведение электронной системы.

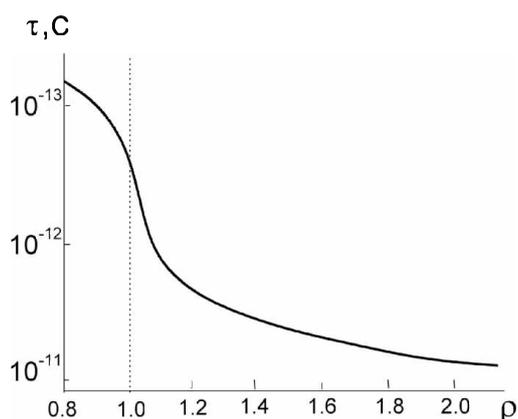


Рис. 6. Расчёт зависимости времени жизни, обусловленного плазмонной рекомбинацией от $\rho = E_g/\hbar\omega_p$ [7].

Рассмотрим переходы между неэквивалентными экстремумами валентной зоны. Энергия этих переходов должна быть сопоставима с величиной зазора между потолком подзоны тяжелых дырок и уровнем химического потенциала, который изменяет своё положение с температурой. С ростом температуры концентрация лёгких дырок уменьшается, уровень химического потенциала смещается к потолку валентной зоны, вследствие чего энергия переходов увеличивается. В соответствии с приведёнными выше оценками параметров валентной зоны максимальное значение энергии таких переходов должно варьироваться вблизи 60 мэВ. Действительно, как следует из рис. 2, в диапазоне частот $450\text{--}550\text{ см}^{-1}$, что соответствует энергии 56–68 мэВ, на спектрах отражения в высокочастотной, по отношению к плазменному краю области, просматриваются особенности, характерные для проявления межзонных переходов. Моделирование спектров плазменного отражения в рамках классической электронной теории, представленное на рис. 2 пунктирной линией, позволяет продемонстрировать наличие указанных особенностей в экспериментальных спектрах отражения. Таким образом, мы можем констатировать факт наблюдения переходов между неэквивалентными экстремумами валентной зоны. Если взять за энергию перехода $E_t \sim 62$ мэВ, то отношение E_t/E_p оказывается близким к единице, что значительно усиливает актуальность учёта влияния электрон-плазмонного взаимодействия на состояние электронной системы и, как следствие, на различие статических и оптических времён релаксации. Усиление электрон-плазмонного взаимодействия приводит к взаимосвязи энергетических потерь плазменных колебаний и межзонных переходов, и уменьшению оптического времени релаксации. При уменьшении температуры энергия перехода E_t должна уменьшаться, поскольку уровень химического потенциала будет смещаться в направлении подзоны тяжёлых дырок, а энергия плазмона $E_p = \hbar\omega_p$ возрастает, что видно из таблицы. В связи с этим закономерности, наблюдаемые нами в температурном поведении отношения τ_{st}/τ_{opt} , коррелируют с изменением отношения E_t/E_p , в котором энергия E_t связана с переходами носителей между неэквивалентными экстремумами валентной зоны.

Список литературы

1. Иванова Л. Д. Термоэлектрические свойства монокристаллов твёрдых растворов системы $Sb_2Te_3 - Bi_2Te_3$ в области температур 100–700 К // Неорганические материалы. 2000. Т. 36. № 7. С. 810–816.
2. Степанов Н. П. Анизотропия плазменного отражения твёрдых растворов $(Bi_{2-x}Sb_x)_2Te_3$ ($0 < x < 1$) в диапазоне температур от 78 до 293К // Оптика и спектроскопия. 2011. Т. 111. № 6. С. 967–973.

3. Гольцман Б. М. Полупроводниковые термоэлектрические материалы на основе Bi_2Te_3 // М.: Наукаб, 1972. 320 с.
4. Степанов Н. П. Природа диамагнитного максимума в температурных зависимостях магнитной восприимчивости кристаллов $(Bi_{2-x}Sb_x)_2Te_3$ ($0 < x < 1$) // ФТП. 2012. Т. 46. № 8. С. 1004–1011.
5. Степанов Н. П., Грабов В. М. Влияние электрон-плазмонного взаимодействия на релаксационные процессы в кристаллах висмута и сплавов висмут-сурьма // ФТТ. 2003. Т. 45. № 9. С. 1537–1541.
6. Tussing P., Rosental W., Hang A. Recombination in semiconductors by excitation plasmons // Phys. Stat. Sol. (b). 1972. V. 52. №2. P. 451–456.
7. Elci A. Electron-hole recombination via plasmon emission in narrow-gap semiconductors // Phys. Rev. (b). 1977. V. 16. № 12. P. 5443–5451.
8. Степанов Н. П., Немов С. А., Житинская М. К. Оптические свойства легированных кристаллов теллурида висмута в области плазменных эффектов // ФТП. 2007. Т. 41. № 7. С. 808–811.

References

1. Ivanova L. D. Termoelektricheskie svoistva monokristallov tverdykh rastvorov sistemy $Sb_2Te_3 - Bi_2Te_3$ v oblasti temperatur 100–700 K // Neorganicheskie materialy. 2000. Т. 36. № 7. S. 810–816.
2. Stepanov N. P. Anizotropiya plazmennogo otrazheniya tverdykh rastvorov $(Bi_{2-x}Sb_x)_2Te_3$ ($0 < x < 1$) v diapazone temperatur ot 78 do 293K // Optika i spektroskopiya. 2011. Т. 111. № 6. S. 967–973.
3. Gol'tsman B. M. Poluprovodnikovye termoelektricheskie materialy na osnove Bi_2Te_3 // М.: Nauka, 1972. 320 s.
4. Stepanov N. P. Priroda diamagnitnogo maksimuma v temperaturnykh zavisimostyakh magnitnoi vospriimchivosti kristallov $(Bi_{2-x}Sb_x)_2Te_3$ ($0 < x < 1$) // FTP. 2012. Т. 46. № 8. S. 1004–1011.
5. Stepanov N. P., Grabov V. M. Vliyanie elektron-plazmonnogo vzaimodeistviya na relaksatsionnye protsessy v kristallakh vismuta i splavov vismut-sur'ma // FTT. 2003. Т. 45. № 9. S. 1537–1541.
6. Tussing P., Rosental W., Hang A. Recombination in semiconductors by excitation plasmons // Phys. Stat. Sol. (b). 1972. V. 52. №2. R. 451–456.
7. Elci A. Electron-hole recombination via plasmon emission in narrow-gap semiconductors // Phys. Rev. (b). 1977. V. 16. № 12. P. 5443–5451.
8. Stepanov N. P., Nemov S. A., Zhitinskaya M. K. Opticheskie svoistva legirovannykh kristallov tellurida vismuta v oblasti plazmennykh effektov // FTP. 2007. Т. 41. № 7. S. 808–811.

Статья поступила в редакцию 20.05.2015

*Юлия Сергеевна Токарева,
кандидат физико-математических наук, доцент
Забайкальский государственный университет,
672039, Россия, г. Чита, ул. Александрo-Заводская, 30,
e-mail: jtokareva2@mail.ru*

Проблема справедливого дележа пирога с участием арбитра¹

Рассмотрена стохастическая процедура распределения многокомпонентного ресурса, представленная как проблема справедливого раздела пирога. Представлена модель распределения двух разных ресурсов единичного размера между тремя игроками. Исследована многошаговая бескоалиционная игра с арбитражной процедурой, использующей случайный механизм с многомерным распределением Дирихле. Для проведения переговоров предоставлен временной интервал. На каждом шаге арбитр генерирует случайные предложения по каждому из двух ресурсов для каждого из игроков. Исследовано оптимальное поведение игроков в модели для трех участников переговоров, найдено равновесие по Нэшу в классе пороговых стратегий и получены соответствующие аналитические выражения для выигрышей. Рассмотрен случай, когда генератор случайных чисел (мнение арбитра) представлен распределением Дирихле с несимметричными параметрами распределения. Для исследования модели введены пороговые стратегии игроков, как вероятности того, что игрок на данном шаге примет текущее предложение арбитра по двум ресурсам. Значение игры удовлетворяет рекуррентным соотношениям. Найдено оптимальное решение в условиях полного консенсуса. Методы исследования основываются на теоретико-игровом анализе бескоалиционных игр.

Ключевые слова: переговоры, арбитр, дисконтирование, распределение Дирихле, пороговые стратегии.

*Julia Sergeevna Tokareva,
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor
Transbaikal State University,
30, Alexandro-Zavodskay St., Chita, Russia, 672039,
e-mail: jtokareva2@mail.ru*

The Problem of Fair Sharing of the Cake with the Arbitrator²

We consider the stochastic procedure of multicomponent resource allocation presented as a problem of fair sharing of the pie. The model of two different resource allocation of a single size between three players is presented. A multistage non-cooperative game with the arbitration procedure using a random mechanism with the multi-dimensional Dirichlet distribution is studied. Time intervals are given for the negotiations. At each step, the arbitrator generates random proposals for each of the two resources for each of the players. Optimal players' behavior in the model for the three negotiators is studied, the Nash equilibrium strategies of threshold type

¹Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 14-01-31524 мол _ а.

²Research is executed with financial support of the Russian Federal Property Fund within the scientific project No. of 14-01-31524 a mol _ a.

are found analytical expressions for the winnings are obtained. We consider the case where the random number generator (the arbitrator's opinion) is represented by the Dirichlet distribution with asymmetrical distribution parameters. To study the model, threshold strategies of the players are introduced as probabilities of the fact that the player at this stage will accept a current proposal of the arbitrator on two resources. The game value satisfies the recurrence relations. We found the optimal solution in full consensus. Research methods are based on game-theoretic analysis of non-cooperative games.

Keywords: negotiation, arbitrator, discounting, Dirichlet distribution, threshold strategies

Введение. Задача справедливого дележа пирога является ключевой проблемой теории переговоров. Под пирогом подразумевается любой ресурс, который необходимо разделить на части с учётом интересов сторон, участвующих в переговорах. Все участники переговоров должны получить часть пирога, которая их удовлетворит.

Для раздела пирога могут быть использованы различные процедуры. Существующие модели дележа пирога можно разделить на две группы. В первой группе участникам предлагают различные варианты дележа [2; 4; 7]. В данной же работе предлагается арбитражная многошаговая процедура дележа одновременно двух пирогов единичного размера для трёх лиц, в которой арбитр представлен генератором случайных чисел. Близкими к данной работе являются работы, касающиеся задачи наилучшего выбора [7], где также была использована многошаговая схема случайных предложений.

В работе рассмотрена стохастическая процедура распределения многокомпонентного ресурса, представленная как проблема справедливого раздела пирога. Исследована многошаговая бескоалиционная игра с арбитражной процедурой, использующей случайный механизм с многомерным распределением Дирихле. Представлена модель распределения двух разных ресурсов единичного размера между игроками при помощи многошаговой процедуры с участием арбитра. Для проведения переговоров предоставляется временной интервал K . На каждом шаге арбитр генерирует случайные предложения по каждому из ресурсов (X, Y) для каждого из игроков. Если число участников переговоров, согласных с предложением арбитра, больше или равно, чем некоторое заданное число p , то такой делёж принимается. В противном случае игра переходит на следующий шаг с дисконтированием ресурса на заданную величину, меньшую 1. Исследовано оптимальное поведение игроков в модели для трёх участников переговоров, найдено равновесие по Нэшу в классе пороговых стратегий и получены соответствующие аналитические выражения для выигрышей. Рассмотрен случай, когда генератор случайных чисел (мнение арбитра) представлен распределением Дирихле $f(X, Y) = f(X) \cdot f(Y)$ с несимметричными параметрами распределения: для первого игрока параметры равны 2, для второго и третьего – 1. Для исследования данной модели вводились пороговые стратегии игроков, как вероятности того, что игрок на данном шаге примет текущее предложение арбитра по двум ресурсам. Значение игры удовлетворяет рекуррентным соотношениям. Найдено оптимальное решение в условиях полного консенсуса. Методы исследования основываются на теоретико-игровом анализе бескоалиционных игр.

Математическая модель. Три игрока I , II и III делят два разных ресурса (пирога) единичного размера. Для проведения переговоров используется многошаговая процедура и предоставляется временной интервал K . Приглашается арбитр, который на каждом шаге генерирует случайные предложения по каждому из ресурсов (X, Y) для каждого из игроков. Первому игроку предлагаются куски x_1 и y_1 , второму предлагаются x_2 и y_2 , а третьему – x_3 и y_3 . Предположим, что генератор случайных чисел представлен распределением Дирихле

с плотностью $f(X, Y) = f(X) \cdot f(Y)$, где

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{\Gamma(k_1 + k_2 + k_3)}{\Gamma(k_1)\Gamma(k_2)\Gamma(k_3)} x_1^{k_1-1} x_2^{k_2-1} x_3^{k_3-1},$$

$$f(y_1, y_2, y_3) = \frac{\Gamma(k_1 + k_2 + k_3)}{\Gamma(k_1)\Gamma(k_2)\Gamma(k_3)} y_1^{k_1-1} y_2^{k_2-1} y_3^{k_3-1},$$

при этом $\sum_{i=1}^3 x_i = 1$, $\sum_{i=1}^3 y_i = 1$, $x_i \geq 0$, $y_i \geq 0$, а $\Gamma(k)$ – гамма-функция.

Параметры распределения Дирихле выбираются равными, если участники переговоров имеют равные веса. Если же у одного из игроков вес больше, то необходимо увеличить соответствующий параметр в распределении.

Рассмотрим случай с несимметричными параметрами распределения. Пусть для первого игрока параметры $k_1 = k_4 = 2$, а для второго и третьего $k_2 = k_3 = k_5 = k_6 = 1$. Таким образом, $f(X, Y) = 36x_1y_1$.

Предложения арбитра представляются игрокам – участникам переговоров. Игроки рассматривают предложенные кусок пирога и либо отклоняют его, либо принимают. Воспользуемся правилом полного консенсуса, при котором если все игроки соглашаются, то игра заканчивается. Если хотя бы один из игроков не соглашается, то игра переходит на следующий шаг. После каждого шага ресурсы дисконтируют на некоторую величину δ ($\delta < 1$). Если за временной интервал K игроки не пришли к консенсусу (шаг $k = 0$), то игра заканчивается и участники получают куски пирога малого размера.

Обозначим через $\mu_1(x_1, y_1)$ вероятность того, что игрок I примет текущие предложения арбитра x_1 и y_1 , $\mu_2(x_2, y_2)$ – вероятность того, что игрок II примет предложенные x_2 и y_2 , а $\mu_3(x_3, y_3) = \mu_3(1 - x_1 - x_2, 1 - y_2 - y_3)$ – вероятность того, что игрок III примет x_3 и y_3 . В силу симметрии игры для второго и третьего игрока полагаем $\mu_2(x_2, y_2) = \mu_3(x_3, y_3)$.

Пусть $H_k^{(1)}$ – выигрыш I игрока в момент времени, когда до окончания игры осталось k шагов.

С вероятностью $\mu_1(x_1, y_1) \cdot \mu_2(x_2, y_2) \cdot \mu_3(x_3, y_3)$ все игроки примут текущие предложения арбитра. С вероятностью

$$1 - \mu_1(x_1, y_1) \cdot \mu_2(x_2, y_2) \cdot \mu_3(x_3, y_3)$$

хотя бы один из игроков отвергнет текущее предложение и игра перейдет на следующий шаг с дисконтированным размером пирога.

Пусть до конца игры осталось k шагов, тогда уравнение оптимальности для выигрыша игрока I на k -м шаге имеет вид

$$H_k^{(1)} = \sup_{\mu_1} \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dy_1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-y_1} \{ \mu_1 \mu_2 \mu_3 (x_1 + y_1) + (1 - \mu_1 \mu_2 \mu_3) \delta H_{k-1}^{(1)} \} 36x_1y_1 dx_2 dy_2,$$

где $H_0^{(1)} = 0$, $\mu_1 = \mu_1(x_1, y_1)$, $\mu_2 = \mu_2(x_2, y_2)$, $\mu_3 = \mu_3(x_3, y_3)$.

Цель I игрока – максимизация своего выигрыша. Сгруппируем члены, содержащие множитель $\mu_1(x_1, y_1)$

$$x_1y_1(x_1 + y_1 - \delta H_{k-1}^{(1)}) \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-y_1} \mu_2 \mu_3 dx_2 dy_2.$$

Будем искать равновесие в игре среди пороговых стратегий. Пусть $\mu_1(x_1, y_1) = I\{x_1 \geq b, y_1 \geq b\}$, $\mu_2(x_2, y_2) = I\{x_2 \geq a, y_2 \geq a\}$, $\mu_3(x_3, y_3) = I\{x_3 \geq a, y_3 \geq a\} = I\{1 - x_1 - x_2 \geq a, 1 - y_1 - y_2 \geq a\}$.

При $b \leq x_1 \leq 1 - 2a$, $b \leq y_1 \leq 1 - 2a$ имеет место равенство

$$\int_0^{1-x_1} \int_0^{1-y_1} \mu_2 \mu_3 dx_2 dy_2 = \int_a^{1-x_1-a} \int_a^{1-y_1-a} dx_2 dy_2 = (1 - x_1 - 2a)(1 - y_1 - 2a)$$

В остальных случаях этот интеграл равен нулю.

Учитывая, что $a = \frac{\delta H_{k-1}^{(2)}}{2}$, $b = \frac{\delta H_{k-1}^{(1)}}{2}$, получаем

$$H_k^{(1)} = (1 - \delta H_{k-1}^{(2)} + \delta H_{k-1}^{(1)})(1 - \delta H_{k-1}^{(2)} + \frac{\delta H_{k-1}^{(1)}}{2})(1 - \delta H_{k-1}^{(2)} - \frac{\delta H_{k-1}^{(1)}}{2})^5 + \delta H_{k-1}^{(1)}.$$

Уравнение оптимальности для II и III игроков, если до конца игры осталось k шагов, имеет вид

$$H_k^{(2)} = \sup_{\mu_2} \int_0^1 dx_2 \int_0^1 dy_2 \int_0^{1-x_2} \int_0^{1-y_2} \{ \mu_1 \mu_2 \mu_3 (x_2 + y_2) + (1 - \mu_1 \mu_2 \mu_3) \delta H_{k-1}^{(2)} \} 36 x_1 y_1 dx_2 dy_2,$$

где $H_0^{(2)} = d$.

При $a \leq x_2 \leq 1 - a - b$, $a \leq y_2 \leq 1 - a - b$ получаем

$$\int_0^{1-x_2} \int_0^{1-y_2} \mu_1 \mu_3 x_1 y_1 dx_1 dy_1 = \frac{1}{4} (1 - a + b - x_2)(1 - a - b - x_2)(1 - a + b - y_2)(1 - a - b - y_2)$$

В остальных случаях этот интеграл равен нулю.

Таким образом,

$$H_k^{(2)} = \frac{1}{2} (1 - \delta H_{k-1}^{(2)} + \frac{3}{2} \delta H_{k-1}^{(1)}) (1 - \delta H_{k-1}^{(2)} + \delta H_{k-1}^{(1)}) (1 - \delta H_{k-1}^{(2)} - \frac{\delta H_{k-1}^{(1)}}{2})^5 + \delta H_{k-1}^{(2)}.$$

Имитационное моделирование.

В таблице представлены значения выигрыша на предпоследнем шаге игры ($k = 1$) при фиксированных значениях $H_0^{(1)} = 0.1$ и $H_0^{(2)} = H_0^{(3)} = 0$ в нескольких значениях временного интервала K и коэффициента дисконтирования δ .

Таблица

K	H_1	$\delta = 0.9$	$\delta = 0.95$	$\delta = 0.99$
K=10	$H_1^{(1)}$	0.512874	0.646525	0.907913
	$H_1^{(2)}$	0.287201	0.325708	0.447307
K=20	$H_1^{(1)}$	0.45428	0.535146	0.822305
	$H_1^{(2)}$	0.299914	0.310148	0.405643
K=50	$H_k^{(1)}$	0.431084	0.465811	0.670468
	$H_k^{(2)}$	0.305885	0.329516	0.353105

Заключение

В статье рассмотрена процедура дележа пирога. Решение задачи зависит от параметров модели: интервал времени для переговоров K , коэффициент дисконтирования пирога δ , параметры распределения Дирихле. Оптимальное поведение участников переговоров получено в классе пороговых стратегии. Найдено аналитическое выражение выигрыша для каждого из трёх игроков в виде рекуррентных формул.

Список литературы

1. Crawford V. P. On Compulsory arbitration schemes // Journal of Political Economy. 1973. Vol. 11. P. 13–15.
2. Dubins L. E., Spanier E. H. How to cut a cake fairly // American Mathematical Monthly. 1961. Vol. 68. P. 1–17.
3. Garnaev A. Y. Value of information in optimal stopping games // Game Theory and Applications. 2000. Vol. 5. P. 55–64.
4. Mazalov V.V., Banin M.V. N-person best-choice game with voting // Game Theory and Applications. 2003. N 9. P. 45–153.
5. Mazalov V.V., Sakaguchi M., Zabelin A.A. Multistage arbitration game with random offers // Game Theory and Applications. 2002. N 8. P. 95–106.
6. Rubinstein A. Perfect Equilibrium in a Bargaining Model // Econometrica. 1982. Vol. 50(1). 97–109.
7. Sakaguchi M. Best-choice game where arbitration comes in // Game Theory and Applications. 2003. N 9. P. 141–149.
8. Мазалов В.В., Носальская Т.Э. Стохастический дизайн в задаче о дележе пирога // Математическая теория игр и её приложения. 2012. Вып. 4, Т. 3. С. 33–50.

Статья поступила в редакцию 23.04.2015

УДК 338.45:530
ББК 65.305.143.2: 22.311
ББК У 305.143.2: В311

*Владимир Александрович Толпаев,
доктор физико-математических наук, профессор,
Северо-Кавказский научно-исследовательский
проектный институт природных газов,
355035, Россия, г. Ставрополь, ул. Ленина, 419,
e-mail: v.a.tolpaev@mail.ru*

*Александр Михайлович Кравцов,
кандидат физико-математических наук,
Северо-Кавказский научно-исследовательский
проектный институт природных газов,
355035, Россия, г. Ставрополь, ул. Ленина, 419,
e-mail: alex_k@bk.ru*

Метод средневзвешенных потенциалов в практических задачах нефтегазодобывающей отрасли

Рассматривается возможность замены при решении краевых задач для уравнения Лапласа со смешанными граничными условиями Дирихле и Неймана на некоторой границе задачами, в которых вдоль участка границы с условиями Дирихле задаются условия Неймана с неопределенными параметрами. Эти неопределенные параметры затем подбираются так, чтобы первоначально заданные условия Дирихле выполнялись в среднеарифметическом приближении, что и составляет сущность метода средневзвешенных потенциалов (СВП). Делаются оценки точности расчёта фильтрационных потоков по методу СВП.

Ключевые слова: Закон Дарси, уравнение Лапласа, граничные условия, несовершенная скважина, давление, коэффициент динамической вязкости, дебит скважины.

*Vladimir Aleksandrovich Tolpayev,
Doctor of Physics and Mathematics,
North-Caucasus Research and Design Institute of Natural Gases,
419 Lenin St., Stavropol, Russia, 355035,
e-mail: v.a.tolpaev@mail.ru*

*Aleksandr Mikhaylovich Kravtsov,
Candidate of Physics and Mathematics,
North-Caucasus Research and Design Institute of Natural Gases,
419 Lenin St., Stavropol, Russia, 355035,
e-mail: alex_k@bk.ru*

The Method of Average Weighted Potential in Practical Problems of Oil and Gas Industry

The possibility of substitution for solving boundary value problems for the Laplace equation with mixed boundary conditions of the Dirichlet and Neumann boundary on some problems in which area along the border with Dirichlet and Neumann conditions are set with uncertain parameters. These uncertain parameters are chosen that the initially set Dirichlet conditions were carried out in the arithmetic

mean approximation, which is the essence of the method of weighted average potentials (WAP). It was made the estimations of the accuracy of calculation of seepage flow method WAP. The possibility of substitution for solving boundary value problems for the Laplace equation with mixed boundary conditions of the Dirichlet and Neumann boundary on some problems in which area along the border with Dirichlet and Neumann conditions are set with uncertain parameters. These uncertain parameters are chosen that the initially set Dirichlet conditions were carried out in the arithmetic mean approximation, which is the essence of the method of weighted average potentials (WAP). It was made the estimations of the accuracy of calculation of seepage flow method WAP.

Keywords: Darcy's law, Laplace equation, boundary value problem, imperfect well, the pressure coefficient of dynamic viscosity, flow rate.

Введение. При оценке характеристик фильтрационных процессов, при добыче углеводородов, в расчётах технологических параметров работы скважин и их узлов возникают задачи со смешанными краевыми условиями [1]. Решение такого рода задач вызывает определённые затруднения, которые можно преодолеть, вводя упрощающие предположения. При этом важно, чтобы упрощающие предположения не входили в противоречие с физической сутью задачи. Для корректного построения упрощённой модели исходной задачи можно использовать идею её аппроксимации более простыми, модельными задачами, помогающими получить аналитическое решение, записываемое в замкнутом виде. Для целого ряда нефтегазопромысловых проблем, сводящихся к граничным задачам со смешанными краевыми условиями, упрощённые модели зачастую могут быть построены на основе метода средневзвешенного потенциала (СВП) [2; 3]. Это физически ясный метод, который можно рекомендовать в учебном процессе с целью выработки навыков построения математических моделей у студентов широкого круга физико-математических и технических специальностей.

Метод СВП опишем на конкретных примерах, по подобию с которыми студентам физико-математических и технических специальностей можно ставить задачи творческого характера для выполнения научных учебно-исследовательских работ.

На протяжении всей статьи, если не делается специальных оговорок, применяются стандартные общепринятые обозначения.

1. Задача о притоке жидкости к скважине в условиях частично непроницаемого контура питания. Сюжет этой задачи заимствован из задачника В. А. Евдокимовой и И. Н. Кочкиной [4, задача № 34] по подземной гидравлике.

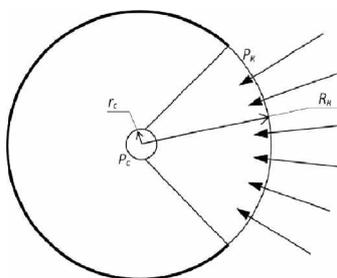


Рис. 1. Схема притока нефти к центральной скважине при наличии непроницаемой части круговой границы области фильтрации

Скважина радиусом $r_c = 10$ см расположена в центре кругового пласта радиусом $R_k = 350$ м. Коэффициент проницаемости пласта $k = 0.8D$, толщина пласта $h = 12$ м, динамический коэффициент вязкости нефти $\mu = 5$ спз. Определить дебит скважины, счи-

тая, что залежь по контуру радиуса R_k частично непроницаема. Контур питания представляет собой в плане дугу окружности радиусом R_k с центральным углом $\alpha = 120^\circ$. Давление на контуре питания $p_k = 27,9 \text{ МПа} = 285 \text{ кгс/с}^2$, давление на забое скважины $p_k = 7,84 \text{ МПа} = 80 \text{ кгс/с}^2$.

В задаче на части круговой границы радиуса R_k задано давление, а другая часть этой круговой границы является непроницаемой. Смешанный характер граничных условий существенно усложняет построение решения. Точное решение в этом случае может быть получено методом конформных отображений. В указаниях к решению задачи в [4] предлагается усреднить пластовое давление по всей внешней границе, считать, что меньшее давление действует на всём контуре. Это неверно в принципе, так как в этом случае искажается картина линий тока фильтрационного потока к скважине, не учитывается направляющее воздействие на фильтрационный поток внешней непроницаемой границы. Такого рода упрощающее допущение приводит к принципиально неверному результату.

Чтобы сохранить контекст задачи с наличием непроницаемой границы, следует предположить, что нормальная составляющая скорости фильтрации известна не только на непроницаемом секторе внешнего контура R_k , где она равна нулю, но и на проницаемой части сектора.

Приведём подробное для первого примера решение задачи методом СВП. Как известно [1], для линейного режима плоскопараллельной фильтрации несжимаемой жидкости (нефти) уравнение движения в полярных координатах имеет вид:

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = 0. \quad (1)$$

Граничные условия, с которыми следует интегрировать уравнение (1), в соответствии с постановкой таковы:

$$\varphi|_{r=r_c} = \varphi_c = -\frac{k \cdot P_c}{\mu}, \quad (2)$$

$$\varphi|_{\substack{r=R \\ 0 \leq \theta \leq \alpha = 120^\circ}} = \varphi_k = -\frac{k \cdot P_c}{\mu}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{\substack{r=R \\ \alpha \leq \theta \leq 2\pi}} = 0. \quad (4)$$

Сложность задачи обусловлена наличием смешанных краевых условий Дирихле и Неймана на круговом контуре радиуса R_k .

В методе СВП для приближённого решения задачи (1)–(4) краевое условие Дирихле (3) заменяют следующим краевым условием Неймана:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{\substack{r=R \\ 0 \leq \theta \leq 120^\circ}} = v_0 = \text{const}. \quad (5)$$

В (5) v_0 некоторая подлежащая определению постоянная, выражающая собой среднее значение радиальной составляющей скорости фильтрации на дуге с углом $\alpha = 120^\circ$.

Решение задачи (1), (2), (4), (5) строим методом Фурье. В результате для функции $\varphi(r, \theta)$ получаем тригонометрический ряд

$$\varphi = \varphi_c + A_0 \cdot \ln \left(\frac{r}{r_c} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(r) \cdot (A_n \cdot \cos n\theta + B_n \cdot \sin n\theta), \quad (6)$$

где

$$f_n(r) = \left(\frac{r}{r_c} \right)^n - \left(\frac{r_c}{r} \right)^n. \quad (7)$$

Подчеркнём, что ряд (6) при любых произвольных постоянных A_0 , A_n и B_n удовлетворяет уравнению (1) и граничному условию (2). Произвольные постоянные A_0 , A_n и B_n найдём из граничных условий (4) и (5). Для этого предварительно вычислим производную $\frac{\partial \varphi}{\partial r}$, после чего согласно граничным условиям (4) и (5) приходим к равенству

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=R} = \frac{A_0}{R} + \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(R) \cdot (A_n \cdot \cos n\theta + B_n \cdot \sin n\theta) = \begin{cases} v_0, & \text{если } 0 \leq \theta \leq \alpha \\ 0, & \text{если } \alpha < \theta \leq 2\pi \end{cases}. \quad (8)$$

Раскладывая периодическую с периодом 2π кусочно-постоянную функцию в правой части равенства (8) в ряд Фурье, получим следующие выражения для коэффициентов:

$$A_0 = \frac{R \cdot \alpha \cdot v_0}{2\pi}, \quad A_n = \frac{v_0 \cdot \sin n\alpha}{\pi \cdot n \cdot f'_n(R)}, \quad B_n = \frac{v_0 \cdot (1 - \cos n\alpha)}{\pi \cdot n \cdot f'_n(R)}. \quad (9)$$

Подставляя коэффициенты (9) в ряд (6), получим

$$\varphi = \varphi_c + \frac{R \cdot \alpha \cdot v_0}{2\pi} \cdot \ln \left(\frac{r}{r_c} \right) + \frac{v_0}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} f_n(r) \cdot \left(\frac{\sin n\alpha}{n \cdot f'_n(R)} \cdot \cos \theta + \frac{1 - \cos n\alpha}{n \cdot f'_n(R)} \cdot \sin n\theta \right). \quad (10)$$

Из формулы (10) видно, что решение выражается через неопределённую постоянную v_0 . Для расчёта этой постоянной вернёмся к исходному граничному условию (3). Подберём неизвестную постоянную v_0 так, чтобы граничное условие (3) выполнялось «в среднем», т. е. чтобы выполнялось равенство

$$\frac{1}{\alpha} \cdot \int_0^{\alpha} \varphi(R, \theta) \cdot d\theta = \varphi_k = -\frac{k \cdot P_k}{\mu}. \quad (11)$$

Подставляя (10) в (11), вычисляя интегралы и выполняя тождественные преобразования, получим равенство

$$\varphi_c + \frac{R \cdot \alpha \cdot v_0}{2\pi} \cdot \ln \left(\frac{R}{r_c} \right) + \frac{4v_0}{\pi \cdot \alpha} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} f_n(R) \frac{\sin^2 \left(\frac{n\alpha}{2} \right)}{n^2 \cdot f'_n(R)} = \varphi_k. \quad (12)$$

Из формулы (12) находим следующее выражение для расчёта неопределённой постоянной :

$$v_0 = \frac{\pi \cdot (\varphi_k - \varphi_c)}{\frac{R \cdot \alpha}{2} \cdot \ln \left(\frac{R}{r_c} \right) + \frac{4}{\alpha} \cdot S(\alpha)}, \quad (13)$$

где

$$S(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(R) \cdot \frac{\sin^2 \left(\frac{n\alpha}{2} \right)}{n^2 \cdot f'_n(R)}. \quad (14)$$

Вычислим теперь дебит Q скважины. Согласно закону Дарси $v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r}$. Поэтому, с учётом отрицательного знака проекции v_r , имеем:

$$Q = - \int_0^{\alpha} \frac{\partial \varphi(R, \theta)}{\partial r} \cdot R \cdot h \cdot d\theta = -R \cdot v_0 \cdot h \cdot \alpha. \quad (15)$$

Подставляя в формулу (15) выражение (13), получаем выражение

$$Q = \frac{2 \cdot \pi \cdot h \cdot (\varphi_c - \varphi_k)}{\ln \left(\frac{R}{r_c} \right) + C}, \quad (16)$$

где C – дополнительное фильтрационное сопротивление $C = \frac{8}{R \cdot \alpha^2} \cdot S(\alpha)$. Для практически важного случая, когда $R \gg r_c$, оказывается, что дополнительное фильтрационное сопротивление $C \cong \frac{8}{\alpha^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{n\alpha}{2}\right)}{n^3}$, т. е. фактически зависит только от угла α и не зависит от отношения R/r_c . Конкретно для значений $\frac{R}{r_c} \geq 15$ на основании анализа ряда (14) авторы получили следующую высокоточную аппроксимацию для дополнительного фильтрационного сопротивления

$$C \cong 2 \cdot \ln \left(\frac{1}{\sin(0.25 \cdot \alpha)} \right). \quad (17)$$

Проверим ещё, как ведёт себя формула (16) в предельных ситуациях, когда $\alpha \rightarrow 2\pi$ и $\alpha \rightarrow 0$. Если $\alpha \rightarrow 2\pi$, то $S(\alpha) \rightarrow 0$ и из (16) следует известная формула Дюпюи для дебита совершенной скважины Q_0

$$Q_0 = \frac{2 \cdot \pi \cdot h \cdot (\varphi_c - \varphi_k)}{\ln \left(\frac{R}{r_c} \right)}. \quad (18)$$

Если $\alpha \rightarrow 0$, то из формулы (17) следует, что $C \rightarrow \infty$ и, стало быть, $Q \rightarrow 0$, что и должно быть из физических соображений.

Окончательное выражение для дебита Q , вытекающее из формул (16) и (17), для практического анализа удобно записать в виде безразмерного отношения

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{\ln \left(\frac{R}{r_c} \right)}{\ln \left(\frac{R}{r_c} \right) + C}. \quad (19)$$

Точное решение в терминах электростатической задачи приведено в [5]. Сравнение приближённого (19) по методу СВП и точного [5] решений приведено на рис 2. Нормированные значения дебита Q/Q_0 , подсчитанные по методу СВП по формуле (19), представлены штриховыми линиями. Сплошные линии обозначают кривые, полученные для точного решения. Как видно, решения по СВП дают несколько заниженные значения дебита, при этом сохраняется приемлемая точность во всём диапазоне изменения угла α .

Проведём ещё расчёт дебита скважины в условиях задачи № 34. Углу $\alpha = 120^\circ$ и отношению радиусов контура питания и скважины $\frac{R}{r_c} = 3500$ соответствует значение $Q/Q_0 = 0,84$. С учётом дебита совершенной скважины $Q_0 = 192 \text{ м}^3/\text{сут}$, значение дебита составит $Q = 161 \text{ м}^3/\text{сут}$. Для сравнения, задачник предполагает ответ $Q = 14 \text{ м}^3/\text{сут}$, что существенно ниже полученной оценки дебита. Существенно заниженное значение дебита в задачнике получается потому, что в расчёте за контурное давление принималось средневзвешенное значение по длине круговой границы радиуса R области фильтрации. Результат вычислений показывает, что если в составе границы области фильтрации есть как проницаемые, так и непроницаемые участки, то в качестве контурного давления средневзвешенное по длине границы значение принимать нельзя.

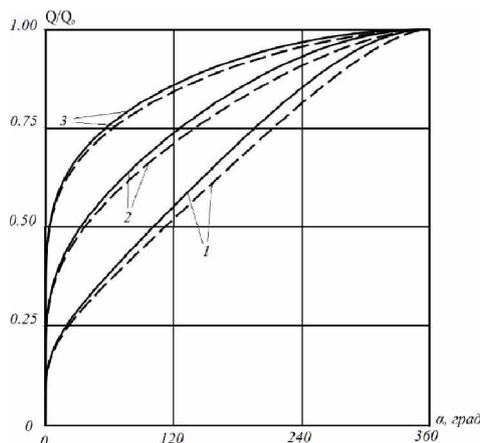


Рис. 2. Зависимости нормированного дебита скважины от угла α в точном (сплошные линии) и приближённом (пунктирные линии) по методу СВП решениях. Все кривые выходят из точки $(0, 0)$ и оканчиваются точкой $(360^\circ, 1)$. Номерами 1, 2, 3 обозначены кривые, соответствующие отношениям R/r_c радиуса контура питания и скважины соответственно равным 5, 50, 5000

Замечание. Для повышения точности решения по методу СВП краевые условия (4) и (5) можно заменить на одно краевое условие Неймана $\left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=R} = f(\theta)$, в котором $f(\theta)$ некоторая подлежащая определению функция. Её можем моделировать, например, в виде тригонометрического многочлена с неопределёнными коэффициентами g_k . Для отыскания неопределённых коэффициентов можно применить метод коллокации. Для этого выбираем систему точек $\theta_j, j = 1 \div N$ на дуге $0 \leq \theta \leq \alpha$ контура питания и по граничному условию (3) составляем переопределённую систему $\varphi(R, \theta_j) = \frac{k \cdot P_k}{\mu}, j = 1 \div N$ линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов g_k . Решая последнюю, например, методом наименьших квадратов, найдём все коэффициенты g_k . После этого вычисляем дебит и распределение давления. Фактически получим точное решение задачи. Метод СВП представляет частный случай, когда $f(\theta)$ – периодическая кусочно-постоянная функция.

2. Расчёт фильтрации в локальном участке нефтеносного коллектора при шахматно-рядном распределении батарей нагнетательных и добывающих скважин

Приведём следующий пример применения метода СВП. Рассчитаем параметры (распределение давления и расходы) фильтрационных потоков при эксплуатации большого по длине и ширине нефтяного месторождения чередующимися батареями нагнетательных и эксплуатационных скважин, расположенных в шахматно-рядном порядке (рис. 3).

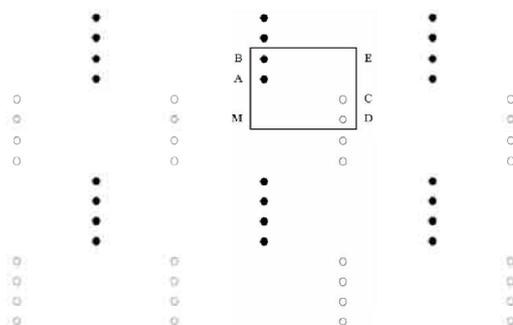


Рис. 3. Шахматно-рядное распределение батарей нагнетательных ● и добывающих ○ скважин и повторяющийся локальный прямоугольный участок MABECD нефтеносного коллектора

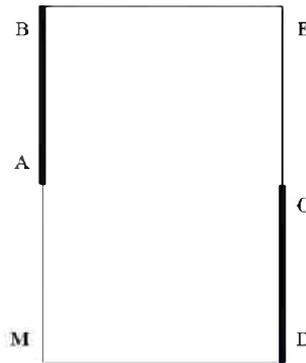


Рис. 4. Схематизация повторяющегося локального прямоугольного участка *MABECD* нефтеносного коллектора

Будем рассматривать случай, когда шаг сетки скважин намного меньше как размеров месторождения, так и длин батарей скважин. Это позволит в фильтрационных расчётах применить схематизацию, представленную на рис. 4, когда батареи скважин рассматриваются как галереи.

Приближённое решение данной задачи снова строим методом СВП. В декартовых координатах уравнение для линейного режима плоскопараллельной фильтрации несжимаемой жидкости сводится к уравнению Лапласа [1] относительно приведенного давления $P(x, y) = p + \rho \cdot r \cdot z$; ось z направлена вертикально вверх; нивелировочная плоскость $z = 0$ совмещается с подошвой горизонтального плоскопараллельного нефтеносного коллектора, имеющего толщину h .

Граничные условия в точной постановке задачи: $\frac{\partial P}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\partial P}{\partial y} \Big|_{y=L} = 0$, где L – длина сторон BM и ED локального прямоугольного участка; $\frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{(x=0)}^{AM} = \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{(x=T)}^{EC}$, где T – длина сторон BE и MD локального прямоугольного участка; $P \Big|_{(x=0)}^{AB} = \Delta P$; $P \Big|_{(x=T)}^{CD} = 0$, где $\Delta P = const$ – перепад давлений между батареями AB и CD .

В приближённой по методу СВП постановке задачи точные краевые условия на границах нагнетательных и добывающих галерей AB и CD заменяются приближёнными $\frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{(x=0)}^{AB} = -\frac{\mu \cdot Q}{l_1 \cdot k \cdot h}$ и $\frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{(x=T)}^{CD} = -\frac{\mu \cdot Q}{l_2 \cdot k \cdot h}$ соответственно. Здесь Q – некоторая пока неизвестная постоянная с размерностью m^3/c , подлежащая определению и равная полному по толщине пласта фильтрационному потоку внутри локального прямоугольного участка $MABECD$ от батареи AB к батарее CD . Величины l_1 и l_2 определяются длинами отрезков AB и CD . Естественно, l_1 и l_2 удовлетворяют неравенствами $l_1 \leq L$ и $l_2 \leq L$.

Решая уравнение Лапласа классическим методом Фурье, для функции $P(x, y)$ получаем выражение

$$P(x, y) = \alpha \cdot x + \beta + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot n \cdot y}{L}\right), \quad (20)$$

где

$$f_n(x) = C_{1n} \cdot \frac{\text{sh}\left(\frac{\pi \cdot n \cdot x}{L}\right)}{\text{sh}\left(\frac{\pi \cdot n \cdot T}{L}\right)} + C_{2n} \cdot \frac{\text{sh}\left(\frac{\pi \cdot n \cdot (T-x)}{L}\right)}{\text{sh}\left(\frac{\pi \cdot n \cdot T}{L}\right)}, \quad (21)$$

а α , β , C_{1n} и C_{2n} – пока произвольные постоянные. Подчеркнём, что построенный тригонометрический ряд (20) удовлетворяет граничным условиям на сторонах MD и BE .

Для определения произвольных постоянных вычислим производную $\frac{\partial P}{\partial x}$ на сторонах MB и ED локального прямоугольного участка $MABECD$:

$$\frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{(x=0)}^{MB} = \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{\pi \cdot n}{L \cdot \text{sh} \left(\frac{\pi \cdot n \cdot T}{L} \right)} \right] \cdot \left[C_{1n} - C_{2n} \cdot \text{ch} \left(\frac{\pi \cdot n \cdot T}{L} \right) \right] \right\} \cdot \cos \left(\frac{\pi \cdot n \cdot y}{L} \right), \quad (22)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{(x=T)}^{ED} = \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{\pi \cdot n}{L \cdot \text{sh} \left(\frac{\pi \cdot n \cdot T}{L} \right)} \right] \cdot \left[C_{1n} \cdot \text{ch} \left(\frac{\pi \cdot n \cdot T}{L} \right) - C_{2n} \right] \right\} \cdot \cos \left(\frac{\pi \cdot n \cdot y}{L} \right), \quad (23)$$

С другой стороны, в постановке задачи по методу СВП граничные условия на сторонах MB и ED имеют вид:

$$\frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{(x=0)}^{MB} = \varphi_1(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq y \leq (L - l_1) \\ -\frac{\mu \cdot Q}{l_1 \cdot k \cdot h}, & \text{если } (L - l_1) < y \leq L \end{cases} \quad (24)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{(x=T)}^{ED} = \varphi_2(y) = \begin{cases} -\frac{\mu \cdot Q}{l_2 \cdot k \cdot h}, & \text{если } 0 \leq y \leq l_2 \\ 0, & \text{если } l_2 < y \leq L \end{cases}. \quad (25)$$

Раскладывая далее в ряды Фурье функции $\varphi_1(y)$ и $\varphi_2(y)$ на отрезке $0 \leq y \leq L$ по системе $\cos \left(\frac{\pi \cdot n \cdot y}{L} \right)$ и сравнивая разложения с рядами (22) и (23), относительно произвольных постоянных α , C_{1n} и C_{2n} получаем систему линейных алгебраических уравнений. Решая эту систему уравнений, находим, что

$$C_{1n} = \frac{2 \cdot \alpha \cdot L}{\pi \cdot n \cdot \text{sh} \left(\frac{\pi \cdot n \cdot T}{L} \right)} \times \left[\frac{\sin \left(\frac{\pi \cdot n \cdot l_2}{L} \right)}{\left(\frac{\pi \cdot n \cdot l_2}{L} \right)} \cdot \text{ch} \left(\frac{\pi \cdot n \cdot T}{L} \right) + (-1)^{n+1} \cdot \frac{\sin \left(\frac{\pi \cdot n \cdot l_1}{L} \right)}{\left(\frac{\pi \cdot n \cdot l_1}{L} \right)} \right], \quad (26)$$

и

$$C_{2n} = \frac{2 \cdot \alpha \cdot L}{\pi \cdot n \cdot \text{sh} \left(\frac{\pi \cdot n \cdot T}{L} \right)} \times \left[(-1)^{n+1} \cdot \frac{\sin \left(\frac{\pi \cdot n \cdot l_1}{L} \right)}{\left(\frac{\pi \cdot n \cdot l_1}{L} \right)} \cdot \text{ch} \left(\frac{\pi \cdot n \cdot T}{L} \right) + \frac{\sin \left(\frac{\pi \cdot n \cdot l_2}{L} \right)}{\left(\frac{\pi \cdot n \cdot l_2}{L} \right)} \right], \quad (27)$$

где $\alpha = -\frac{\mu \cdot Q}{k \cdot h \cdot L}$.

Как видно из (26) и (27), все коэффициенты C_{1n} и C_{2n} выражаются через одну неизвестную величину α (или, что одно и то же, Q). Таким образом, для окончательного решения задачи остается вычислить две оставшиеся неизвестные — коэффициенты α и β . Их расчёт выполним, возвращаясь к исходным граничным условиям на границах нагнетательных и добывающих галерей AB и CD . Потребуем, чтобы точные граничные условия удовлетворялись в среднем. Для этого потребуем выполнения равенств

$$\frac{1}{l_1} \cdot \int_{L-l_1}^L P(0, y) dy = \Delta P \quad \text{и} \quad \frac{1}{l_2} \cdot \int_0^{l_2} P(T, y) dy = 0. \quad (28)$$

Из уравнений (28) для коэффициентов α и β найдём следующие значения:

$$\alpha \cdot T = \frac{\Delta P}{2 \cdot (R_1 - R_2) - 1} \quad \text{и} \quad \beta = -\frac{\Delta P \cdot (2 \cdot R_2 + 1)}{2 \cdot (R_1 - R_2) - 1}, \quad (29)$$

где

$$R_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\left(\frac{\pi \cdot n \cdot T}{L}\right) \cdot \operatorname{sh}\left(\frac{\pi \cdot n \cdot T}{L}\right)} \quad \text{и} \quad R_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\left(\frac{\pi \cdot n \cdot T}{L}\right) \cdot \operatorname{sh}\left(\frac{\pi \cdot n \cdot T}{L}\right)}, \quad (30)$$

а коэффициенты a_n и b_n равны

$$a_n = \frac{\sin^2\left(\frac{\pi \cdot n \cdot l_2}{L}\right)}{\left(\frac{\pi \cdot n \cdot l_2}{L}\right)^2} \cdot \operatorname{ch}\left(\frac{\pi \cdot n \cdot T}{L}\right) + (-1)^{n+1} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi \cdot n \cdot l_1}{L}\right)}{\left(\frac{\pi \cdot n \cdot l_1}{L}\right)} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi \cdot n \cdot l_2}{L}\right)}{\left(\frac{\pi \cdot n \cdot l_2}{L}\right)}, \quad (31)$$

и

$$b_n = \frac{\sin^2\left(\frac{\pi \cdot n \cdot l_1}{L}\right)}{\left(\frac{\pi \cdot n \cdot l_1}{L}\right)^2} \cdot \operatorname{ch}\left(\frac{\pi \cdot n \cdot T}{L}\right) + (-1)^n \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi \cdot n \cdot l_1}{L}\right)}{\left(\frac{\pi \cdot n \cdot l_1}{L}\right)} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi \cdot n \cdot l_2}{L}\right)}{\left(\frac{\pi \cdot n \cdot l_2}{L}\right)}, \quad (32)$$

Для расчёта полного по толщине пласта фильтрационного потока внутри локального прямоугольного участка *МABEC* от батареи *AB* к батарее *CD* используем связь коэффициентов α и Q . В результате получаем формулу

$$Q = \frac{k \cdot h \cdot L \cdot \Delta P}{\mu \cdot T \cdot [1 - 2(R_1 - R_2)]}. \quad (33)$$

В частном случае, когда длины батарей *AB* и *CD* равны длине L сторон *MB* и *ED*, для полного по толщине пласта фильтрационного потока получаем значение Q_0 , равное

$$Q_0 = \frac{k \cdot h \cdot L \cdot \Delta P}{\mu \cdot T}, \quad (34)$$

что соответствует формуле для расчёта потока поступательного течения. Если составить отношение потоков Q и Q_0 , то получим удобную для практического анализа формулу для оценки влияния длин батарей *AB*, *CD* и их взаимного расположения на величину полного фильтрационного потока:

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{1}{1 - 2 \cdot (R_1 - R_2)}. \quad (35)$$

Точное решение краевой задачи на рис. 4 в терминах электростатики приведено в [3]. По результатам сравнения точного [3] и приближенного (33) решений получены относительные погрешности расчёта полного фильтрационного потока по методу СВП. Результаты расчётов представлены в таблице, из которой видно, что погрешность расчётов существенно зависит от длин батарей нагнетательных и добывающих скважин. Чем ближе отношения l_1/L и l_2/L к единице, т. е. чем точнее выполняется условие равномерного распределения нормальной составляющей скорости фильтрации вдоль галерей *MB* и *ED*, тем точнее расчёты по методу СВП. Когда длины галерей *MB* и *ED* малы, l_1/L и l_2/L принимают значения менее 0,5, погрешности расчётов по СВП заметно возрастают. Для повышения точности фильтрационных расчётов в этих случаях следует воспользоваться замечанием, приведённым в примере 1.

Таблица 1

Относительные долгие погрешности расчёта полного фильтрационного потока по методу СВП в примере 2

Отношение $T/L = 2$												
l_1/L	Отношение l_2/L											
	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
0,70	0,07	0,05	0,02	0,10	0,09	0,07	0,06	0,05	0,04	0,04	0,04	0,04
0,75	0,06	0,03	0,01	0,09	0,07	0,06	0,05	0,04	0,03	0,03	0,03	0,02
0,80	0,05	0,02	0,00	0,01	0,06	0,05	0,04	0,03	0,02	0,02	0,02	0,02
0,85	0,05	0,02	0,00	0,02	0,03	0,04	0,03	0,02	0,02	0,01	0,01	0,01
0,90	0,06	0,01	0,01	0,02	0,04	0,04	0,03	0,02	0,01	0,01	0,00	0,00
0,95	0,06	0,01	0,01	0,03	0,04	0,04	0,03	0,02	0,01	0,00	0,00	0,00
1,00	0,06	0,01	0,01	0,03	0,04	0,04	0,02	0,02	0,01	0,00	0,00	0,00
Отношение $T/L = 1$												
l_1/L	Отношение l_2/L											
	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
0,75	0,03	0,06	0,03	0,08	0,05	0,12	0,10	0,09	0,06	0,06	0,05	0,05
0,80	0,01	0,04	0,00	0,07	0,03	0,01	0,09	0,06	0,05	0,04	0,03	0,03
0,85	0,00	0,05	0,01	0,05	0,02	0,01	0,06	0,05	0,03	0,03	0,02	0,02
0,90	0,01	0,05	0,02	0,05	0,01	0,01	0,03	0,04	0,03	0,02	0,01	0,01
0,95	0,01	0,06	0,02	0,06	0,00	0,02	0,04	0,03	0,02	0,01	0,00	0,00
1,00	0,01	0,06	0,02	0,06	0,00	0,02	0,04	0,03	0,02	0,01	0,00	0,00
Отношение $T/L = 0,5$												
l_1/L	Отношение l_2/L											
	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
0,80	0,08	0,05	0,11	0,04	0,01	0,01	0,07	0,03	0,10	0,07	0,06	0,07
0,85	0,11	0,09	0,09	0,06	0,04	0,01	0,06	0,00	0,07	0,05	0,04	0,03
0,90	0,14	0,10	0,07	0,09	0,06	0,03	0,08	0,02	0,04	0,03	0,02	0,02
0,95	0,11	0,11	0,11	0,10	0,07	0,05	0,09	0,03	0,05	0,02	0,01	0,01
1,00	0,11	0,13	0,11	0,11	0,08	0,06	0,09	0,03	0,06	0,02	0,01	0,00

3. Расчёт дебитов несовершенных по степени вскрытия пласта скважин методом СВП

Отметим ещё один важный класс задач, в которых средствами СВП можно получить удобные с точки зрения практического применения формулы для оценок дебитов несовершенных по степени вскрытия пласта скважин (см. рис. 5).

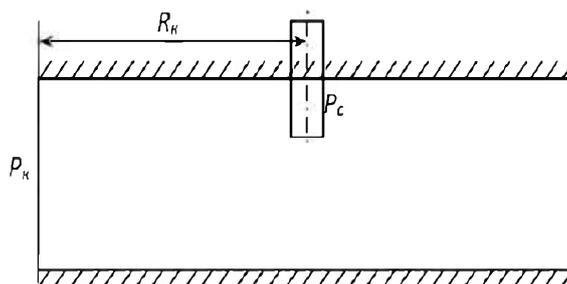


Рис. 5. Вертикальное сечение несовершенной по степени вскрытия пласта скважины

Линейная фильтрация несжимаемой жидкости к несовершенной скважине, частично вскрывшей плоскопараллельный пласт с непроницаемыми подошвой и кровлей, носит осесимметричный характер. Поэтому краевую задачу для уравнения Лапласа линейного режима фильтрации несжимаемой жидкости (нефти) решаем в цилиндрических координатах r, z с осью z , направленной вверх по оси симметрии скважины. Граничные условия, с которыми

следует интегрировать осесимметрично относительно функции $\varphi(r, z) = -\frac{k \cdot P(r, z)}{\mu}$ уравнение Лапласа в точной постановке задачи таковы: граничное условие на поверхности ствола скважины $r = r_c$ носит смешанный характер. На перфорированной части $h - b \leq z \leq h$ поверхности скважины, вскрывшей пласт с толщиной h на глубину b и примыкающей к кровле пласта, задаются условия Дирихле

$$\varphi \Big|_{\substack{r=r_c \\ h-b \leq z \leq h}} = \varphi_3 = -\frac{k \cdot P_3}{\mu}, \quad (36)$$

а на неперфорированной части ($0 \leq z \leq h - b$) — условия Неймана:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{\substack{r=r_c \\ 0 \leq z < h-b}} = 0. \quad (37)$$

Граничные условия на подошве пласта $z = 0$ и кровле $z = h$ имеют вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=h} = 0, \quad (38)$$

а на круговой цилиндрической поверхности питания — вид

$$\varphi \Big|_{r=R} = \varphi_k = -\frac{k \cdot P_k}{\mu}. \quad (39)$$

Решение краевой задачи для осесимметричного уравнения Лапласа с однородными граничными условиями (41) строим методом Фурье:

$$\varphi(r, z) = A_0 + A_1 \cdot \ln \left(\frac{r}{r_c} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} F_n(r) \cdot \cos(\lambda_n z), \quad (40)$$

где $\lambda_n = \frac{\pi \cdot n}{h}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, A_0 , и A_1 — произвольные постоянные. Функции $F_n(r)$ в формуле (40) представляют линейные комбинации функций Бесселя $K_0(\lambda_n r)$ и $I_0(\lambda_n r)$ мнимого аргумента. Учитывая граничное условие (39), для функций получаем следующее представление:

$$F_n(r) = D_n \cdot f_n(r), \text{ где } f_n(r) = \begin{vmatrix} K_0(\lambda_n r) & I_0(\lambda_n r) \\ K_0(\lambda_n R) & I_0(\lambda_n R) \end{vmatrix}, \quad (41)$$

а D_n — произвольные постоянные. Граничное условие (39) сводится к виду

$$A_0 + A_1 \cdot \ln \left(\frac{R}{r_c} \right) = \varphi_k. \quad (42)$$

Для отыскания произвольных постоянных D_n условия (36) и (37) на поверхности ствола скважины $r = r_c$ запишем в виде одного условия типа Неймана

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=r_c} = g(z) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq z \leq h - b \\ \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot r_c \cdot b}, & \text{если } h - b < z \leq h \end{cases}, \quad (43)$$

где Q — искомый дебит несовершенной скважины. Вычисляя от суммы ряда (40) в предположении правомочности почленного дифференцирования производную $\frac{\partial \varphi}{\partial r}$, получаем с учетом формул $K'_0(\lambda_n r) = -\lambda_n \cdot K_1(\lambda_n r)$ и $I'_0(\lambda_n r) = \lambda_n \cdot I_1(\lambda_n r)$ следующее выражение

$$\frac{\partial \varphi(r, z)}{\partial r} = \frac{A_1}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cdot f'_n(r) \cdot \cos(\lambda_n z), \quad (44)$$

где

$$f'_n(r) \begin{vmatrix} -\lambda_n \cdot K_1(\lambda_n r) & \lambda_n \cdot I_1(\lambda_n r) \\ K_0(\lambda_n R) & I_0(\lambda_n R) \end{vmatrix} = \lambda_n \cdot \begin{vmatrix} -K_1(\lambda_n r) & I_1(\lambda_n r) \\ K_0(\lambda_n R) & I_0(\lambda_n R) \end{vmatrix}. \quad (45)$$

Теперь на основании формул (43) и (44) приходим к следующему представлению граничного условия на поверхности ствола несовершенной скважины:

$$\frac{A_1}{r_c} + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cdot f'_n(r_c) \cdot \cos(\lambda_n z) = g(z). \quad (46)$$

Раскладывая функцию $g(z)$ на отрезке $0 \leq z \leq h$ в ряд Фурье по системе $\cos(\lambda_n z)$, получим следующие выражения для искомым коэффициентов:

$$A_1 = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot h}; \quad D_n = -\frac{Q}{\pi \cdot r_c \cdot b} \cdot \frac{\sin[\lambda_n \cdot (h - b)]}{h \cdot \lambda_n \cdot f'_n(r_c)}. \quad (47)$$

Для окончательного решения задачи остаётся вычислить две оставшиеся неизвестные — коэффициенты A_0 и Q . Их расчёт выполним, возвращаясь к исходному граничному условию (36) на поверхности ствола скважины, вскрывшей пласт на глубину b . Потребуем, чтобы точные граничные условия (36) удовлетворялись в среднем:

$$\frac{1}{b} \cdot \int_{h-b}^h \varphi(r_c, z) dz = \varphi_3. \quad (48)$$

Из равенства (48) после ряда тождественных преобразований находим следующее уравнение:

$$A_0 + \frac{Q}{\pi \cdot r_c \cdot b^2 \cdot h} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(r_c) \cdot \sin^2[\lambda_n \cdot (h - b)]}{\lambda_n^2 \cdot f'_n(r_c)} = \varphi_3. \quad (49)$$

Теперь из формул (42), (47) и (49) находим дебит несовершенной по степени вскрытия пласта скважины:

$$Q = \frac{2 \cdot \pi \cdot k \cdot h \cdot (P_k - P_3)}{\mu \cdot \left[\ln\left(\frac{R}{r_c}\right) + C \right]}, \quad (50)$$

где

$$C = \frac{2 \cdot S}{r_c \cdot b^2}, \quad S = \frac{h^3}{\pi^3} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n \cdot \frac{\sin^2\left[\frac{\pi \cdot n \cdot (h-b)}{h}\right]}{n^3} \quad \text{и} \quad \zeta_n = -\frac{\begin{vmatrix} K_0(\lambda_n r_c) & I_0(\lambda_n r_c) \\ K_0(\lambda_n R) & I_0(\lambda_n R) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -K_1(\lambda_n r_c) & I_1(\lambda_n r_c) \\ K_0(\lambda_n R) & I_0(\lambda_n R) \end{vmatrix}}. \quad (51)$$

Задача о дебите несовершенной по вскрытию пласта скважины впервые рассмотрена Маскетом [6]. Дебит несовершенной скважины по формуле Маскета [6] равен

$$Q_M = \frac{2 \cdot \pi \cdot k \cdot h \cdot (P_k - P_3)}{\mu \left\{ \frac{1}{2\bar{h}} \cdot \left[2 \ln \frac{4\bar{h}}{r_c} - \varphi(\bar{h}) \right] + \ln \frac{R}{4\bar{h}} \right\}}, \quad (52)$$

где

$$\varphi(\bar{h}) = \ln \frac{\Gamma(0, 125\bar{h}) \cdot \Gamma(0, 875\bar{h})}{\Gamma(1 - 0, 125\bar{h}) \cdot \Gamma(1 - 0, 875\bar{h})}, \quad \text{а} \quad \bar{h} = \frac{b}{h}. \quad (53)$$

Буквой Γ обозначена гамма-функция, определяемая интегралом Эйлера $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} \times e^{-t} \cdot dt$. Для расчёта значений $\Gamma(x)$ для аргументов $0 \leq x \leq 1$ существуют высокоточные аппроксимации многочленами.

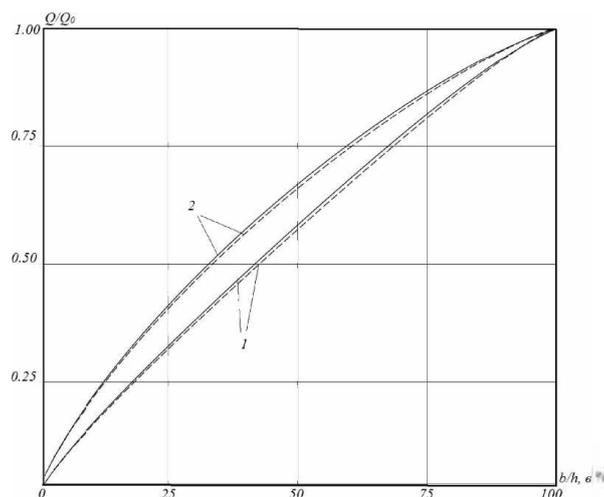


Рис. 6. Зависимость приведенного дебита несовершенной скважины от степени вскрытия пласта b/h . Сплошной линией показаны расчёты по формуле Маскета, пунктирной по методу СВП. Кривые 1 и 2 рассчитаны для значений $R/r_c = 500$ и $R/r_c = 8000$ соответственно.

Вычислительные эксперименты, результаты которых приведены на рис. 6, подтвердили высокую точность расчётов по методу СВП. Совпадение результатов по методу СВП и по формуле Маскета удовлетворительное во всём диапазоне изменения степени вскрытия пласта b/h . Достоинство метода СВП в более простых при выводе формулы дебита скважины математических выкладках, нежели выкладках в методе Маскета.

Заключение. Представленные примеры показали, что с достаточной практической точностью приближённое решение нефтегазовых задач, сводящихся к краевым задачам для уравнения Лапласа со смешанными граничными условиями Дирихле и Неймана на некоторой границе L , можно построить, переходя к упрощённым модельным задачам. В модельных задачах условия Дирихле вдоль участка границы L заменяются условиями Неймана с неопределёнными параметрами. Эти неопределённые параметры подбираются из требования, чтобы первоначально заданные условия Дирихле вдоль соответствующего участка границы L выполнялись в среднеарифметическом приближении. Рекомендации [4] применять в задачах со смешанными на границе L граничными условиями уменьшенное контурное давление, получающееся в результате перераспределения заданной лишь на части границы L величины давления на всю длину L , принципиально не верны.

Представленные в статье примеры применения метода СВП к решению конкретных задач позволяют студентам и аспирантам широкого круга физико-математических и технических специальностей вырабатывать и совершенствовать навыки построения ориентированных на практику математических моделей, а преподавателям ставить в учебном процессе перед учащимися целый ряд содержательных творческих задач учебно-исследовательского характера. Например, исследовать пропускную способность различных скважинных фильтров (перфорационных, вертикально-щелевых, горизонтально-щелевых) от конструктивных параметров фильтров. Исследовать зависимости дебитов несовершенных скважин от положения зоны вскрытия пласта (около кровли, ближе к середине или к подошве пласта, либо несколькими участками перфорации эксплуатационной колонны), влияния на скважинный приток трещин гидроразрыва пласта и целый ряд других задач.

Список литературы

1. Басниев К. С., Дмитриев Н. М., Розенберг Г. Д. Нефтегазовая гидромеханика. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. 544 с.

2. Толпаев В. А., Петухов А. А., Захаров В. В. Математические модели работы скважинных фильтров // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2004. № 3. С. 45–48.
3. Толпаев В. А., Шахнабатова Л.Б., Крымин Л. Г. Об аппроксимации в электротехнических расчётах мелкослойчатых сред анизотропными // Известия вузов. Электромеханика. 1985. № 11. С. 23–32.
4. Евдокимова В. А., Кочина И. Н. Сборник задач по подземной гидравлике. М.: Альянс, 2007. 168 с.
5. Иоссель Ю. Я., Кочанов Э. С., Струнский М. Г. Расчёт электрической ёмкости. Л.: Энергоиздат. Ленингр. отделение, 1981. 288 с.
6. Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде. М.; Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2004. 640 с.

References

1. Basniev K. S., Dmitriev N. M., Rozenberg G. D. Neftegazovaya gidromekhanika. – Moskva-Izhevsk: Institut komp'yuternykh issledovaniy, 2005. 544 s.
2. Tolpaev V. A., Petukhov A. A., Zakharov V. V. Matematicheskie modeli raboty skvazhinnykh fil'trov // Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskii region. Estestvennye nauki. 2004. № 3. S. 45–48.
3. Tolpaev V. A., Shakhnabatova L.B., Krymin L. G. Ob approksimatsii v elektrotekhnicheskikh raschetakh melkosloichatyykh sred anizotropnyimi // Izvestiya vuzov. Elektromekhanika. 1985. № 11. S. 23–32.
4. Evdokimova V. A., Kochina I. N. Sbornik zadach po podzemnoi gidravlike. M.: Al'yans, 2007. 168 s.
5. Iossel' Yu. Ya., Kochanov E. S., Strunskii M. G. Raschet elektricheskoi emkosti. L.: Energoizdat. Leningr. otdelenie, 1981. 288 s.
6. Masket M. Tehenie odnorodnykh zhidkosteï v poristoi srede. M.; Izhevsk: Institut komp'yuternykh issledovaniy, 2004. 640 s.

Статья поступила в редакцию 13.04.2015

Алексей Сергеевич Устюхин,¹

инженер-исследователь,

*Институт металлургии и материаловедения им. А. А. Байкова РАН,
119991, Россия, Москва, Ленинский пр-т., 49,
e-mail: fcbneo@yandex.ru*

Татьяна Алексеевна Вомпе,

аспирант, младший научный сотрудник,

*Институт металлургии и материаловедения им. А. А. Байкова РАН,
119991, Россия, Москва, Ленинский пр-т., 49,
e-mail: tvotpe@gmail.com*

Игорь Матвеевич Миляев,

доктор технических наук

*Институт металлургии и материаловедения им. А. А. Байкова РАН,
119991, Россия, Москва, Ленинский пр-т., 49,
e-mail: imilyaev@mail.ru*

Виктор Александрович Зеленский,

кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник,

Институт металлургии и материаловедения им. А. А. Байкова РАН

119991, Россия, г. Москва, Ленинский пр-т, 49,

e-mail: zelensky55@bk.ru

**Исследование магнитных гистерезисных свойств $Fe - 26Cr - 16Co$
порошковых сплавов в зависимости от условий спекания и
термообработки²**

В работе методом порошковой металлургии получали магнитотвердые $Fe - Cr - Co$ сплавы. В качестве легирующих добавок использовались молибден и вольфрам. Выявлено, что вакуумное спекание позволяет получать заготовки с относительной плотностью до 98 %, при этом легирование молибденом способствует лучшему уплотнению. Магнитные гистерезисные свойства сплавов $Fe - 26 \%Cr - 16 \%Co - 2 \%Mo - 2 \%W$ практически не изменяются в зависимости от скорости охлаждения в магнитном поле при термообработке, за исключением образцов, спеченных при 1420 °С. На этих образцах наблюдалось снижение уровня магнитных гистерезисных свойств и их перепады в зависимости от условий термообработки по сравнению с остальными режимами спекания. Это обусловлено возникновением неоднородности химического состава из-за испарения хрома в ходе спекания.

Ключевые слова: порошковая металлургия, магнитотвердые сплавы $Fe - Cr - Co$, спекание, магнитные гистерезисные свойства, термообработка.

¹Личный вклад основного автора включает в себя подготовку и спекание образцов, измерение плотности и обработку экспериментальных данных по магнитным гистерезисным свойствам.

²Работа была выполнена при поддержке гранта РФФИ 15-03-04769-а.

Aleksey Sergeevich Ustyukhin,¹

*Research Engineer,
Institute of Metallurgy and Material Science A. A. Baykov,
the Russian Academy of Science,
49, Leninsky Pr., Moscow, Russia, 119991,
e-mail: fcbneo@yandex.ru*

Tatiana Alekseevna Vompe,

*Postgraduate Student, Researcher,
Institute of Metallurgy and Material Science A. A. Baykov,
the Russian Academy of Science,
49, Leninsky Pr., Moscow, Russia, 119991,
e-mail: tvompe@gmail.com*

Igor Matveyevich Milyaev,

*Doctor of Technical Sciences,
Institute of Metallurgy and Material Science A. A. Baykov,
the Russian Academy of Science,
49, Leninsky Pr., Moscow, Russia, 119991,
e-mail: imilyaev@mail.ru*

Victor Alexandrovich Zelensky,

*Candidate of Physics and Mathematics, Leading Researcher,
Institute of Metallurgy and Material Science A. A. Baykov,
the Russian Academy of Science,
49, Leninsky Pr., Moscow, Russia, 119991,
e-mail: zelensky55@bk.ru*

Investigation of $Fe - 26Cr - 16Co$ Powder Alloys Magnetic Hysteresis Properties Depending on Sintering and Thermal Treatment Conditions²

In present work the hard magnetic $Fe - Cr - Co$ alloys were obtained by powder metallurgy method. Molybdenum, tungsten were used as alloying additives. It was discovered that vacuum sintering provides to obtain specimens with relative density about 98 % and alloying of molybdenum contributes to obtain a better compaction. Magnetic hysteresis properties of the $Fe - 26\% Cr - 16\% Co - 2\% Mo - 2\% W$ alloys almost not change depending on cooling rate in the magnetic field during thermal treatment, except specimens obtained by sintering at 1420 ^{circ}C. The reduction of magnetic hysteresis properties and differences depending on thermal treatment conditions have been observed on these specimens compared to other sintering modes. This is due to the emergence of chemical composition in homogeneity caused by chromium evaporation during sintering.

Keywords: powder metallurgy, hard magnetic $Fe - Cr - Co$ alloys, sintering, magnetic hysteresis properties, thermal treatment.

1. Введение Магнитотвердые сплавы системы $Fe - Cr - Co$ относятся к деформируемым сплавам, как в горячем, так и в холодном состоянии, а также обладают довольно редким сочетанием высоких магнитных свойств с пластичностью и коррозионной стойкостью, что весьма хорошо с точки зрения требований, предъявляемых промышленностью к современным постоянным магнитам [1; 2]. Формирование структуры высококоэрцитивного

¹The personal part of the main author includes preparing of specimens, their sintering, density measurements and analysis of experimental magnetic hysteresis properties data.

²This work was supported by grant RFFI 15-03-04769-a.

состояния определяется наличием в системе $Fe - Cr - Co$ протяженной области расслоения, которая в отличие от области расслоения в других металлических системах (например, $Fe - Cr$), имеет ассиметричный характер с ярко выраженным максимумом в районе содержания хрома 19–20 %. Внутри этой области расслоения при изотермической выдержке или контролируемом охлаждении происходит распад высокотемпературной α -фазы по спинодальному механизму на две изоморфные в структурном отношении фазы α_1 и α_2 ; при этом α_1 является ферромагнитной фазой и обогащена в равновесном (при данной температуре) состоянии железом и кобальтом, фаза α является парамагнитной и в равновесном состоянии обогащена хромом. Ключевым этапом в достижении необходимого уровня магнитных гистерезисных свойств сплавов является термическая обработка, которая включает в себя три основных этапа: закалку на однофазный высокотемпературный α -твердый раствор; термомагнитную обработку (ТМО), в результате которой происходит распад α -фазы под воздействием внешнего магнитного поля; дополнительную термическую обработку, обеспечивающую необходимое в соответствии с диаграммой равновесия перераспределение компонентов сплава между продуктами распада [3; 4].

В $Fe - Cr - Co$ сплавах с содержанием кобальта более 12 % выше температуры начала расслоения появляется неферромагнитная σ -фаза [5], которая снижает магнитные свойства и пластичность. В этом случае все параметры ТМО оказывают влияние на магнитные свойства сплава.

Для сплавов системы $Fe - Cr - Co$ основной технологией получения является традиционный метод плавки и литья. Порошковая металлургия хоть и является куда более экономичным и экологичным способом, но для $Fe - Cr - Co$ сплавов существуют ограничения ввиду использования высоких температур спекания (около 1400 °C) с одной стороны [6; 7], что неблагоприятно для промышленного оборудования, а с другой стороны понижение температуры спекания часто приводит к значительному ухудшению магнитных свойств материала из-за остаточной пористости.

Целью данной работы было определение оптимальных температурных условий спекания порошковых магнитотвёрдых сплавов состава $Fe - 26 \%Cr - 16 \%Co$ (масс. %) и режимов термообработки с целью достижения максимально возможных магнитных гистерезисных свойств.

2. Получение образцов Исходные порошковые образцы состава $Fe - 26 \%Cr - 16 \%Co$ с присадками 2 % Mo и 2 % W изготавливали из промышленных высокочистых порошков железа марки ВС с размером частиц 0,05–0,07 мм, хрома ПХС-1, кобальта ПК-1Н, молибдена и вольфрама с частицами < 0,07 мм. Их смешивание осуществляли в турбулентном смесителе С 2.0, прессование проводили на ручном прессе в разъёмной матрице с внутренним диаметром 13,6 мм при давлении 600 МПа. Сырые прессовки имели относительную плотность $\sim 75 - 80$ %. Спекание проводили в вакуумной шахтной печи в вакууме $\sim 10^{-2} - 10^{-3}$ Па с выдержкой 2,5 ч. в температурном диапазоне 1100 – 1420 °C.

3. Результаты и обсуждение Плотность спеченных образцов определяли методом гидростатического взвешивания. В качестве жидкости с известной плотностью использовали дистиллированную воду. Результаты показали (рис. 1), что плотность сплавов системы $Fe - 26 \%Cr - 16 \%Co$, легированных 2 % Mo и 2 % Mo + 2 % W, постепенно растёт с повышением температуры спекания вплоть до 1360 °C, а дальнейшее повышение температуры практически не влияет плотность.

Образцы сплава $Fe - 26 \%Cr - 16 \%Co$, легированного только 2 % W, спекались во всем выбранном температурном диапазоне хуже аналогичных по составу с присадками молибдена. Дальнейшее уплотнение наблюдается даже при температуре 1420 °C. Скорее всего, это связано с тем, что легирование молибденом вызывает понижение температур ликвидуса и солидуса в сплавах на основе системы $Fe - Cr - Co$ [8], что, по всей видимости,

может способствовать лучшей спекаемости материала.

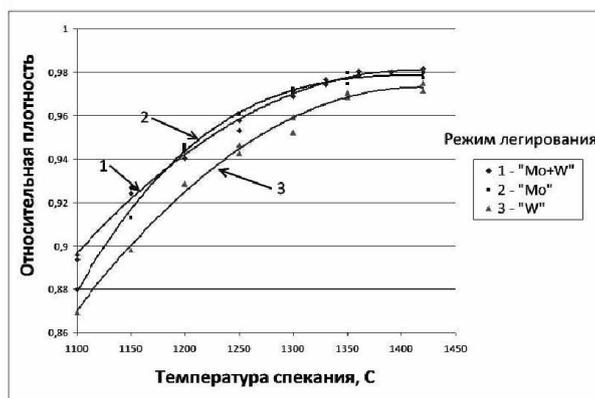


Рис. 1. Зависимость относительной плотности спеченных сплавов системы $Fe - 26\% Cr - 16\% Co$ от температурных режимов спекания

Пористость спеченных материалов оценивали с помощью оптической системы анализа изображений на базе микроскопа OLYMPUS PME-3 и программы IA-32. Для металлографического исследования образцы из твердых спеченных сплавов приготавливались в виде микрошлифов. Анализ показал, что при используемых условиях спекания максимальная относительная плотность материала достигает $\sim 98\%$. Измерение магнитных гистерезисных свойств проводили на гистерезисграфе Remmagraph L. Погрешность измерений коэрцитивной силы H и остаточной индукции B_r составляла 3% , магнитного произведения с $(BH)_{max} - 6\%$.

Изучение влияния термообработки на магнитные гистерезисные свойства исследуемого сплава проводили после закалки образцов от $1250\text{ }^\circ\text{C}$ в воде в зависимости от скорости охлаждения в магнитном поле в температурном интервале $640 - 600\text{ }^\circ\text{C}$, т. е. в температурном интервале формирования высококоэрцитивного состояния. Старение образцов после проведения ТМО проводили путём охлаждения в интервале $600 - 480\text{ }^\circ\text{C}$ со скоростью $8\text{ }^\circ\text{C/ч}$.

Основываясь на предыдущих исследованиях [9], для детального изучения зависимости магнитных гистерезисных свойств от режимов термообработки был взят сплав $Fe - 26\% Cr - 16\% Co - 2\% Mo - 2\% W$, поскольку он обладает повышенной коэрцитивной силой при схожих показателях остаточной индукции и максимального энергетического произведения по сравнению со сплавами $Fe - 26\% Cr - 16\% Co$, легированными только $2\% Mo$ или $2\% W$. Нужно отметить, что при спиновальном распаде Mo и W преимущественно концентрируются в α_2 -фазе [10]. Поскольку Mo и W имеют большой атомный радиус, то, находясь в α -фазе, они увеличивают разницу между периодами решёток α_1 и α_2 -фаз и, соответственно, при совместном легировании эта разница становится ещё более значительной. Кроме того, они также повышают упругую энергию и способствуют росту частиц α_1 -фазы вдоль направления $\langle 100 \rangle$. Все вышеперечисленные факторы способствуют увеличению коэрцитивной силы $Fe - Cr - Co$ сплавов.

Влияние скорости охлаждения v на магнитные гистерезисные свойства сплава $Fe - 26\% Cr - 16\% Co - 2\% Mo - 2\% W$ показано на рис. 2. Образцы были спечены при температуре $1300\text{ }^\circ\text{C}$.

Из рис. 2 видно, что в широком интервале скоростей охлаждения, сплав имеет практически одинаковые значения коэрцитивной силы H_c с учетом ошибки измерения. Такой сплав удобно обрабатывать на промышленном оборудовании, поскольку скорость охлаждения не сильно влияет на H_c . Максимальные значения остаточной индукции D_r и максимального

магнитного произведения BH_{max} наблюдаются при охлаждении со скоростью $80\text{ }^{\circ}\text{C}/\text{ч}$. Аналогичная зависимость наблюдалась для сплавов спеченных вплоть до температуры $1360\text{ }^{\circ}\text{C}$.

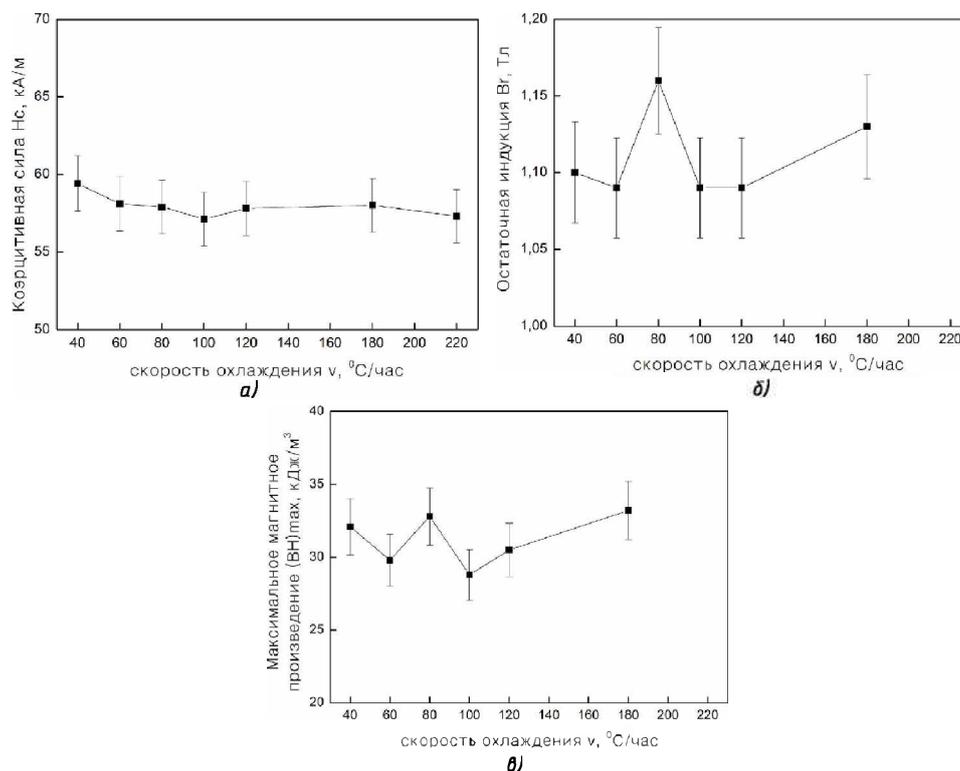


Рис. 2. Зависимость H_c (а), B_r (б) и BH_{max} (в) сплава $\text{Fe} - 26\% \text{Cr} - 16\% \text{Co} - 2\% \text{Mo} - 2\% \text{W}$, спеченного при температуре $1300\text{ }^{\circ}\text{C}$ от скорости охлаждения в магнитном поле

На сплаве, спеченном при температуре $1420\text{ }^{\circ}\text{C}$, наблюдаются более резкие перепады магнитных гистерезисных свойств в зависимости от условий ТМО (рис. 3).

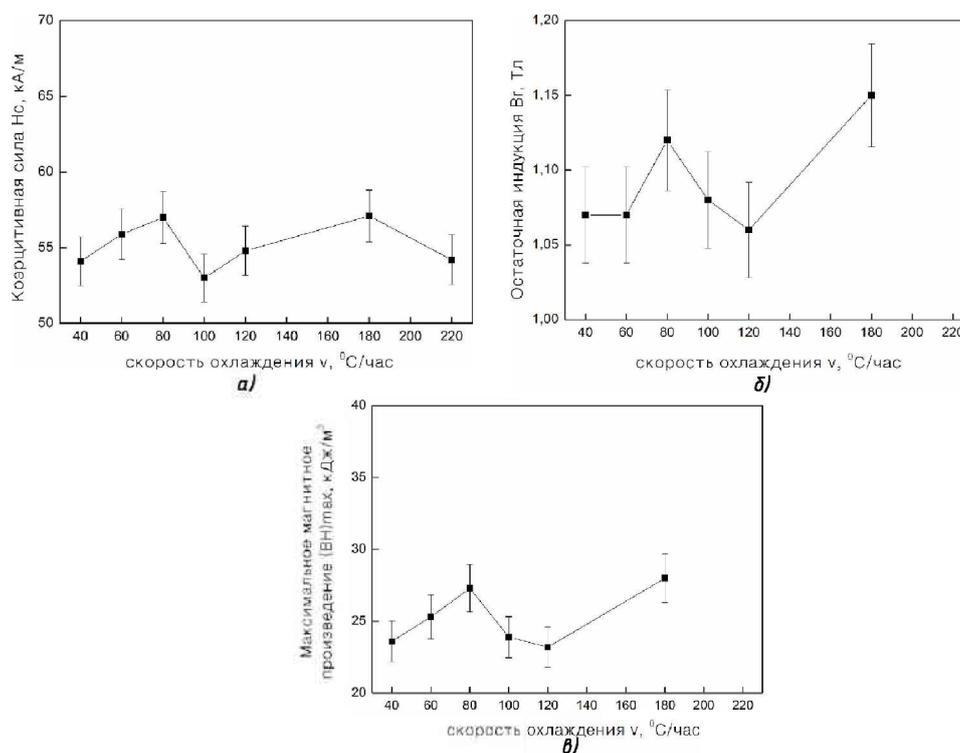


Рис. 3. Зависимость H_c (а), B_r (б) и BH_{max} (в) сплава $Fe - 26\% Cr - 16\% Co - 2\% Mo - 2\% W$, спеченного при температуре $1420^\circ C$ от скорости охлаждения в магнитном поле

Как видно из рис. 2 и 3, уровень магнитных гистерезисных свойств сплава, спеченного при $1420^\circ C$, ниже по сравнению со сплавом, спеченным при $1300^\circ C$. Это связано с частичным испарением хрома в ходе спекания, которое значительно усиливается с повышением температуры. В результате возникает неоднородность химического состава между поверхностным слоем и объемом образца, что отрицательно сказывается на магнитных гистерезисных свойствах [9].

В заключении можно отметить, что наилучшие магнитные гистерезисные свойства были получены на образцах спеченных при температуре $1300^\circ C$, обработанных в магнитном поле со скоростью $80^\circ C/ч$ и $40^\circ C/ч$: $B_r = 1,16$ Тл, $H_c = 57,9$ кА/м и $BH_{max} = 32,8$ кДж/м³, и $B_r = 1,09$ Тл, $H_c = 59,4$ кА/м и $BH_{max} = 32,1$ кДж/м³.

На рис. 4 показаны соответствующие кривые размагничивания образцов магнитотвердого сплава $Fe - 26\% Cr - 16\% Co - 2\% Mo - 2\% W$.

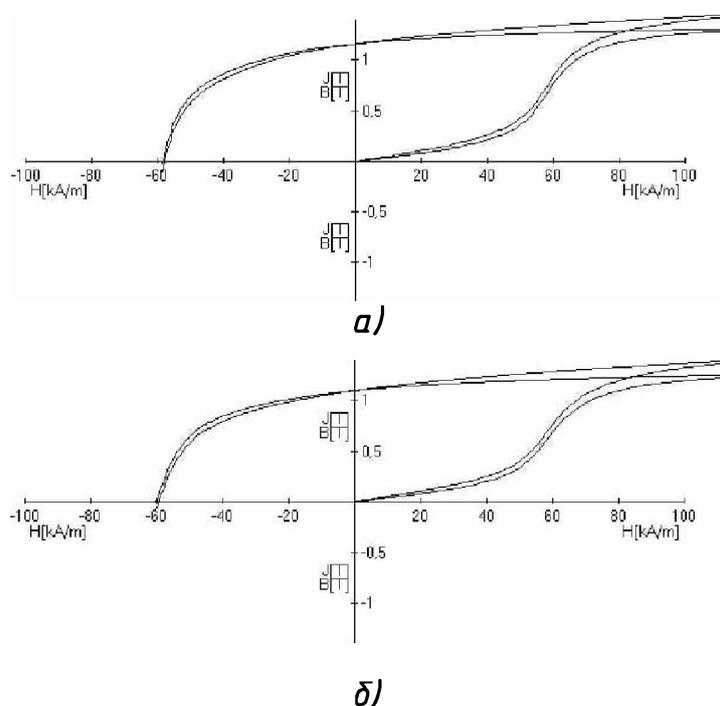


Рис. 4. Кривые размагничивания образцов магнитотвердого сплава $Fe - 26\% Cr - 16\% Co - 2\% Mo - 2\% W$, спеченного при $1300^\circ C$, после полного цикла термообработки со скоростями охлаждения в магнитном поле $- 80^\circ C/ч$ (а) $40^\circ C/ч$ (б)

4. Выводы Вакуумное спекание порошковых магнитотвердых сплавов состава $Fe - 26\% Cr - 16\% Co$ позволяет получать образцы с относительной плотностью до 98 % в зависимости от температурных условий, при этом легирование молибденом способствует уплотнению сплавов и при более низких температурах.

Магнитные гистерезисные свойства сплава $Fe - 26\% Cr - 16\% Co - 2\% Mo - 2\% W$, спеченного в температурном интервале $1300 - 1360^\circ C$, практически не меняются в зависимости от скорости охлаждения в магнитном поле при ТМО, что обеспечивает удобство обработки заготовок на промышленном оборудовании.

Наилучшие магнитные гистерезисные свойства были получены на сплаве $Fe - 26\% Cr - 16\% Co - 2\% Mo - 2\% W$, спеченном при $11300^\circ C$ и $1330^\circ C$: $B_r = 1,09$ div $1,16$ Тл, $H_c = 57,9 \div 59,4$ кА/м, $BH_{max} = 32,1 \div 33,2$ кДж/м.

Несмотря на рост относительной плотности в ходе спекания при температуре выше $1360\text{ }^{\circ}\text{C}$, магнитные гистерезисные свойства падают с повышением температуры спекания. Это происходит из-за возникновения в сплавах неоднородности химического состава между поверхностным слоем и объемом образца в связи с испарением хрома. Наибольшее испарение наблюдается для сплавов $Fe - 26\% Cr - 16\% Co$, легированных $2\% Mo$ и $2\% W$ при температуре $1420\text{ }^{\circ}\text{C}$. Для сплавов данного состава в температурном интервале спекания $1300 - 1420\text{ }^{\circ}\text{C}$ испарение хрома отрицательнее сказывается на магнитных гистерезисных свойствах по сравнению с относительной пористостью.

Список литературы

1. Zhen Liang, Sun Xue-yin, Xu Cheng-yan, Gao Run-sheng, Xu Ren-gen, Qin Lu-chang // Transactions of Non-ferrous Metals Society of China. 2007. Vol. 17. P. 346–350.
2. Kubota T., Wakui G., Itakagi M. Hysteresis motor using magnetically anisotropic $Fe - Cr - Co$ magnet // IEEE Transactions on Magnetics. 1998. Vol. 34(6). P. 3888–3896.
3. Либман М. А. Магнитотвердые сплавы на основе системы Железо–Хром–Кобальт. // Материаловедение. 2010. № 9. С. 58–64.
4. Kaneko H., Homma M., Nakamura K. New ductile permanent magnet of $Fe - Cr - Co$ system // AJP Conference Proceedings. 1972. № 5. P. 1088.
5. Вомпе Т. А., Дьяконова Н. П., Миляев И. М., Пруцков М. Е. Кинетика выделения σ -фазы в деформационно-стареющем магнитотвердом сплаве 33X12K2Д // Металлы. 2012. № 1. С. 69–71.
6. Миляев И. М., Алымов М. И., Юсупов В. С., Зеленский В. А., Анкудинов А. Б., Миляев А. И. Влияние кремния и молибдена на магнитные гистерезисные свойства магнитотвердого порошкового сплава 22X15KA // Известия вузов «Порошковая металлургия и функциональные покрытия. 2011. № 4. С. 54.
7. Алымов М. И., Анкудинов А. Б., Зеленский В. А., Миляев И. М., Юсупов В. С., Устюхин А. С. Влияние легирования и режима спекания на магнитные гистерезисные свойства $Fe - Cr - Co$ порошкового сплава // Физика и химия обработки материалов. 2011. № 3. С. 34–38.
8. Szymura S., Sojka L. // Journal of Materials Science Letters. 1984. № 3. P. 897–898.
9. Устюхин А. С., Алымов М. И., Миляев И. М. Магнитные гистерезисные свойства $Fe-26Cr-16Co$ порошковых магнитотвердых сплавов // Письма о материалах. 2014. Т. 4. № 1. С. 59–61.
10. Malinina R. I., Shubakov V. S., Zhukova E. Kh., Zhukov D. G. Heat Treatment and Properties of Plastically Deforming, Highly Coercive Iron Alloy (30 % Cr, 15 % Co, 2 % W, 1 % Mo, and 1 % Ti) // Steel in Translation. 2013. Vol. 43. № 5. P. 270–273.

References

1. Zhen Liang, Sun Xue-yin, Xu Cheng-yan, Gao Run-sheng, Xu Ren-gen, Qin Lu-chang // Transactions of Non-ferrous Metals Society of China. 2007. Vol. 17. P. 346–350.

2. Kubota T., Wakui G., Itakagi M. Hysteresis motor using magnetically anisotropic $Fe - Cr - Co$ magnet // IEEE Transactions on Magnetics. 1998. Vol. 34(6). P. 3888–3896.
3. Libman M. A. Magnitotverdye splavy na osnove sistemy Zhelezo – Hrom – Kobal't // Materialovedenie. 2010. № 9. S. 58–64.
4. Kaneko H., Homma M., Nakamura K. New ductile permanent magnet of $Fe - Cr - Co$ system // AJP Conference Proceedings. 1972. № 5. P. 1088.
5. Vompe T. A., D'jakonova N. P., Miljaev I. M., Pruckov M. E. Kinetika vydelenija σ -fazy v deformatsionno-starejushhem magnitotverdom splave 33H12K2D // Metally. 2012. № 1. S. 69–71.
6. Miljaev I. M., Alymov M. I., Jusupov V. S., Zelenskij V. A., Ankudinov A. B., Miljaev A. I. Vlijanie kremnija i molibdena na magnitnye gisterezisnye svojstva magnitotverdogo poroshkovogo splava 22H15KA // Izvestija vuzov «Poroshkovaja metallurgija i funkcional'nye pokrytija. 2011. № 4. S. 54.
7. Alymov M. I., Ankudinov A. B., Zelenskij V. A., Miljaev I. M., Jusupov V. S., Ustjuhin A. S. Vlijanie legirovanija i rezhima spekanija na magnitnye gisterezisnye svojstva $Fe - Cr - Co$ poroshkovogo splava // Fizika i himija obrabotki materialov. 2011. № 3. S. 34–38.
8. Szymura S., Sojka L. // Journal of Materials Science Letters. 1984. № 3. P. 897–898.
9. Ustjuhin A. S., Alymov M. I., Miljaev I. M. Magnitnye gisterezisnye svojstva Fe-26Cr-16Co poroshkovyh magnitotverdych splavov // Pis'ma o materialah. 2014. T. 4. № 1. C. 59–61.
10. Malinina R. I., Shubakov V. S., Zhukova E. Kh., Zhukov D. G. Heat Treatment and Properties of Plastically Deforming, Highly Coercive Iron Alloy (30 % Cr, 15 % Co, 2 % W, 1 % Mo, and 1 % Ti) // Steel in Translation. 2013. Vol. 43. № 5. P. 270–273.

Статья поступила в редакцию 10.06.2015

УДК 534.1
ББК 22.213

Владимир Евгеньевич Холодовский,
кандидат физико-математических наук, доцент,
Брянский государственный университет
241036, Россия, г. Брянск, ул. Бежицкая, 14,
e-mail: v-e-holodovsky@yandex.ru

Елена Юрьевна Краюшкина,
старший преподаватель,
Брянский государственный технический университет,
241035, Россия, г. Брянск, бул. 50-летия Октября, 7,
e-mail: senichenkova@mail.ru

Параметры внутриатомных диполей кристаллов твёрдых растворов со структурой CsCl

В разработанной модели Ван-дер-Ваальсовских взаимодействий произведены расчёты, позволившие получить спектральное разложение колебаний внутриатомных диполей для соединений NiAl, FeAl и CuZn, рассчитать их усредненные характеристики и получить графическое изображение спектральной плотности распределения квадрата внутриатомного диполя для каждого сорта атомов, образующих кристалл.

Ключевые слова: кристаллическая решётка, динамическая модель, межатомное взаимодействие, диполь, фононный спектр, спектральная плотность квадрата плеча внутриатомного диполя.

Vladimir Yevgenyevich Kholodovskii,
Candidate of Physical and Mathematical Science, Associate Professor,
Bryansk State University,
14, Bezhitskaya St., Bryansk, Russia, 241036,
e-mail: v-e-holodovsky@yandex.ru

Elena Yur'evna Krayushkina,
Senior Teacher,
Bryansk State Technical University,
7, Pyatedisyeteletie Octyabrya St., Bryansk, Russia, 241035
e-mail: senichenkova@mail.ru

Parameters of Intra Dipoles Solid Solutions with CsCl Structure

Van der Waals models are considered. Oscillation spectral decomposition of intra dipoles for compounds NiAl, FeAl and CuZn was obtained. The calculations of spectral averaged parameters were made. The graphs of the spectral density of the intra-square dipole for each class of atoms forming a crystal are built.

Keywords: crystal lattice, dynamical model, inter-atomic interaction, dipole, phonon spectrum, spectral density of the square shoulder intra-dipole.

Введение. В работах [1; 2] построена динамическая модель, описывающая колебания решёток твёрдых растворов металлов со структурой CsCl. Для соединений NiAl, FeAl и

CuZn сделаны расчёты дисперсионных кривых, фононных спектров, теплоёмкостей и среднеквадратичных смещений атомов как для каждой из подрешёток, так и для всего кристалла. Полученные результаты определяются параметрами движения остовов атомов кристаллов. Согласно конструкции, остов атома является одним из полюсов внутриатомных диполей, вторым полюсом является центр заряда внешней электронной оболочки (ВЭО) атома кристалла. Учитывая колебания центров зарядов ВЭО атомов, можно получить тепловые динамические характеристики как электронного газа, так и внутриатомных диполей атомов.

В настоящей работе получены и решены уравнения, позволяющие сделать расчёты спектральных и динамических характеристик внутриатомных диполей кристалла NiAl при комнатной температуре. Для монокристаллов Na и Al подобные расчёты были проделаны в работах [3; 4].

Основные положения динамической модели. Рассмотрим бинарную кубическую кристаллическую решётку типа CsCl. Такая решётка может быть получена путем наложения двух простых кубических подрешёток, где центры кубических ячеек первой подрешётки совмещаются с соответствующими узлами второй. Пусть каждая из подрешёток имеет форму куба, ребра которого содержат n атомов. Тогда $N = n^3$ – число атомов в каждой из подрешёток.

Обозначим через a параметр решётки, а через μ_1 и μ_2 массы атомов, образующих первую и соответственно вторую подрешётки кристалла. Выберем в пространстве систему кристаллографических координат $Oxyz$ с единичными направляющими векторами e_x, e_y, e_z координатных осей так, чтобы радиус-вектор каждого узла D_{hkl} решётки мог быть задан по формуле: $\mathbf{r}_{hkl} = (he_x + ke_y + le_z)a/2$, где $h, k, l = 1, \dots, 2n$.

Пусть Λ – множество всех числовых наборов $\xi = (h, k, l)$, для которых приведенная выше формула определяет положение каждого узла решётки. Тогда все числа h, k, l либо нечётные, а набор $\xi = (h, k, l)$ определяет узел $D_\xi = D_{hkl}$ первой подрешётки, либо все числа h, k, l чётные и тогда набор определяет узел второй подрешётки. Обозначим через Λ_i множество всех наборов $\xi = (h, k, l) \in \Lambda$, определяющих узел i -й подрешётки.

Будем считать, что в процессе колебаний атомов решётки в каждом из них наводится внутриатомный диполь, одним из полюсов которого является остов атома, а другим – центр заряда его внешней электронной оболочки. Обозначим через \mathbf{p}_ξ плечо дипольного момента атома A_ξ , наведенного в результате его относительного перемещения с соседними атомами из первой и второй координационных сфер. Считая, что атом A_ξ принадлежит i -й подрешётке, так что $\xi \in \Lambda_i, i = 1, 2$, обозначим через α_i его поляризуемость, а через q_i – эффективный заряд его диполя.

На внутриатомный диполь атома A_ξ действует кулоновская сила \mathbf{Q}_ξ со стороны диполей остальных атомов решётки, в результате чего центр заряда ВЭО атома и следовательно плечо его дипольного момента получает некоторое приращение $\Delta\mathbf{p}_\xi$ и становится равным:

$$\mathbf{P}_\xi = \mathbf{p}_\xi + \Delta\mathbf{p}_\xi. \quad (1)$$

Наведённый дополнительный дипольный момент создаёт частичное экранирование силы \mathbf{Q}_ξ , с учётом чего внешняя сила, действующая на остов атома, становится равной:

$$\mathbf{F}_\xi = \mathbf{Q}_\xi - \frac{\beta_i}{\alpha_i} \Delta\mathbf{p}_\xi. \quad (2)$$

На остов атома A_ξ также действует сила \mathbf{R}_ξ реакции на излучение его внутриатомного диполя. В первом приближении эта сила пропорциональна плечу диполя и равна [5]:

$$\mathbf{R}_\xi = -\frac{2\beta_i}{3\rho_i^3} \mathbf{P}_\xi, \quad (3)$$

где ρ_i – радиус сферы, через которую плотность потока энергии излучения внутриатомного диполя считается равной работе силы реакции за единицу времени.

Пусть $\mathbf{u}_\xi(t)$ – вектор смещения остова атома A_ξ из положения равновесия в момент времени t . В состоянии термодинамического равновесия справедливо равенство

$$\mathbf{F}_\xi + \mathbf{R}_\xi = 0, \quad (4)$$

при этом уравнение движения остова атома A_ξ принимает вид

$$\mu_i \ddot{\mathbf{u}}_\xi = -\frac{\beta_i}{\alpha_i} \mathbf{P}_\xi, \quad i = 1, 2. \quad (5)$$

Пусть A_ξ – атом первой или второй подрешётки, а $A_{\xi'}$ – атом, находящийся на первой или второй координационной сфере атома A_ξ . Обозначим через $\mathbf{e}_{\xi\xi'}$ единичный вектор, указывающий направление от узла D_ξ к узлу $D_{\xi'}$, через $D_{\bar{\xi}'}$ узел решётки, противоположно расположенный к $D_{\xi'}$ относительно узла D_ξ , а через $\bar{S}_j(\xi)$ множество мультииндексов, нумерующих атомы какой-нибудь полусферы j -й координационной сферы $S_j(\xi)$ атома A_ξ . Уравнение динамики решётки представляется в виде

$$\begin{aligned} \mu \ddot{\mathbf{u}}_\xi = & -\sigma_{0,i} \mathbf{u}_\xi + \sum_{\xi' \in \bar{S}_1(\xi)} \left[(\sigma_{1r} - \sigma_{1t}) \langle \mathbf{u}_{\xi'} + \mathbf{u}_{\bar{\xi}'}, \mathbf{e}_{\xi\xi'} \rangle \mathbf{e}_{\xi\xi'} + \sigma_{1t} (\mathbf{u}_{\xi'} + \mathbf{u}_{\bar{\xi}'}) \right] + \\ & + \sum_{\xi' \in S_2(\xi)} \left[(\sigma_{2r,i} - \sigma_{2t,i}) \langle \mathbf{u}_{\xi'} + \mathbf{u}_{\bar{\xi}'}, \mathbf{e}_{\xi\xi'} \rangle \mathbf{e}_{\xi\xi'} + \sigma_{2t,i} (\mathbf{u}_{\xi'} + \mathbf{u}_{\bar{\xi}'}) \right], \end{aligned} \quad (6)$$

где $\xi \in \Lambda_i$, $i = 1, 2$; σ_{1r} , σ_{1t} , $\sigma_{2r,i}$, $\sigma_{2t,i}$ – коэффициенты для радиальных и тангенциальных составляющих сил взаимодействия между атомами решётки, а $\sigma_{0,i} = 8/3(\sigma_{1r} + 2\sigma_{1t}) + 2(\sigma_{2r,i} + 2\sigma_{2t,i})$.

В работах [1; 2] решение уравнения (6) было получено в виде бегущих волн

$$\mathbf{u}_{\xi,K,m}(t) = A_{K,m} \gamma_{K,m,i} \sin(\mathbf{K}\mathbf{r}_\xi - \omega_{K,m}t + \alpha_{K,m}) \mathbf{g}_{K,m,i}, \quad \xi \in \Lambda_i, \quad i = 1, 2. \quad (7)$$

Бегущая волна (7) представляет собой отдельную колебательную моду и определяется волновым вектором $\mathbf{K} = K_x \mathbf{e}_x + K_y \mathbf{e}_y + K_z \mathbf{e}_z$, принимающим значения из первой зоны Бриллюэна. Согласно условию цикличности Борна-Кармана справедливо равенство:

$$\mathbf{K} = \frac{2\pi}{na} (k_x \mathbf{e}_x + k_y \mathbf{e}_y + k_z \mathbf{e}_z),$$

где k_x , k_y , k_z – целые числа. Каждому значению волнового вектора отвечает шесть колебательных мод $m = 1, \dots, 6$, имеющих частоты $\omega_{K,m}$, амплитуды $A_{K,m} \gamma_{K,m,i}$ и направления поляризации $\mathbf{g}_{K,m,i}$ для каждой из подрешёток. При этом справедливы равенства:

$\omega_{K,m} = \omega_{-K,m}$, $\gamma_{K,m,i} = \gamma_{-K,m,i}$, $\mathbf{g}_{K,m,i} = \mathbf{g}_{-K,m}^i$. Для амплитудных множителей $\gamma_{K,m,i}$ также справедливо равенство $(\gamma_{K,m,1})^2 + (\gamma_{K,m,2})^2 = 1$.

Спектральное разложение колебаний внутриатомных диполей. Согласно классическим представлениям энергия одной колебательной моды, определяемой формулой (7), выражается равенством $E_{K,m} = N\mu_{K,m}A_{K,m}^2\omega_{K,m}^2/2$, где $\mu_{K,m} = \mu_1(\gamma_{K,m,1})^2 + \mu_2(\gamma_{K,m,2})^2$. С другой стороны, согласно М.Планку эта энергия равна $E_{K,m} = \hbar\omega_{K,m}/[\exp(\hbar\omega_{K,m}/k_B T) - 1]$. Отсюда следует, что

$$A_{K,m}^2 = \frac{2\hbar}{N\mu_{K,m}\omega_{K,m}[\exp(\hbar\omega_{K,m}/k_B T) - 1]}. \quad (8)$$

Наложение прямой и обратной бегущих волн, определяемых волновыми векторами \mathbf{K} и частотой $\omega_{K,m}$, представляется для каждой подрешётки стоячей волной $\tilde{\mathbf{u}}_{\xi,K,m}(t)$, которая согласно сказанному выше выражаемой формулой

$$\tilde{\mathbf{u}}_{\xi,K,m}(t) = \mathbf{u}_{\xi,K,m}(t) + \mathbf{u}_{\xi,-K,m}(t) = \gamma_{K,m,i}B_{\xi,K,m} \sin(\omega_{K,m}t + \phi_{K,m})\mathbf{g}_{K,m,i}, \quad (9)$$

где $B_{\xi,K,m} = 2A_{K,m} \cos(\mathbf{K}\mathbf{r}_{\xi} + \psi_{K,m})$.

Общее решение уравнения динамики решётки представляет собой наложение колебаний (9) и выражается формулой

$$\mathbf{u}_{\xi}(t) = \sum_{K,m} \tilde{\mathbf{u}}_{\xi,K,m}(t) = \sum_{K,m} \gamma_{K,m,i}B_{\xi,K,m} \sin(\omega_{K,m}t + \phi_{K,m})\mathbf{g}_{K,m,i}. \quad (10)$$

Колебания подрешёток, определённые по формуле (10), удовлетворяют системе уравнений (5). Отсюда следует, что плечо диполя $\mathbf{p}_{\xi,K,m}$, наводимого в атоме A_{ξ} за счёт его относительного перемещения с соседними атомами, при таких колебаниях выражается формулой

$$\mathbf{p}_{\xi,K,m}(t) = \frac{\alpha_i\mu_i}{\beta_i}\gamma_{K,m,i}\omega_{K,m}^2B_{\xi,K,m} \sin(\omega_{K,m}t + \phi_{K,m})\mathbf{g}_{K,m,i}, \quad \xi \in \Lambda_i. \quad (11)$$

Плечо же полного дипольного момента, наводимого в атоме A_{ξ} при колебаниях, заданных по формуле (10), тогда представляется так

$$\mathbf{p}_{\xi}(t) = \sum_{K,m} \mathbf{p}_{\xi,K,m}(t) = \frac{\alpha_i\mu_i}{\beta_i} \sum_{K,m} \gamma_{K,m,i}\omega_{K,m}^2B_{\xi,K,m} \sin(\omega_{K,m}t + \phi_{K,m})\mathbf{g}_{K,m,i}. \quad (12)$$

Отметим, что в формулах (10)–(12) волновой вектор \mathbf{K} пробегает не всю зону Бриллюэна, а некоторую её часть, не содержащую одновременно оба вектора \mathbf{K} и $-\mathbf{K}$. Число точек такого множества должно быть равно $N/2$.

Вернёмся теперь к уравнению (4). Рассмотрим некоторый атом A_{ξ} , $\xi \in \Lambda_i$, атом $A_{\xi'}$, $\xi' \in \Lambda_{i'}$ и положим $\beta' = q_i q_{i'}/4\pi\epsilon_0$. Кулоновская сила $\mathbf{Q}_{\xi,j}$, действующая на остов атома A_{ξ} со стороны всех атомов, расположенных на j -й его координационной сфере в первом приближении равна:

$$\mathbf{Q}_{\xi,j} = \frac{\beta'}{r_j^3} \sum_{\xi' \in S_j(\xi)} (3 \langle \mathbf{P}_{\xi'}, \mathbf{e}_{\xi\xi'} \rangle \mathbf{e}_{\xi\xi'} - \mathbf{P}_{\xi'}),$$

где r_j – расстояние между атомами решётки, расположенными друг относительно друга на j -й координационной сфере.

Согласно (1) имеет место представление $\mathbf{P}_{\xi'} = \mathbf{p}_{\xi'} + \Delta\mathbf{p}_{\xi'}$. Поэтому справедливы равенства:

$$\mathbf{Q}_{\xi,j} = \mathbf{q}_{\xi,j} + \Delta\mathbf{q}_{\xi,j}, \quad \mathbf{Q}_{\xi} = \mathbf{q}_{\xi} + \Delta\mathbf{q}_{\xi}, \quad \mathbf{Q}_{\xi} = \sum_j \mathbf{Q}_{\xi,j},$$

где

$$\mathbf{q}_{\xi,j} = \frac{\beta'}{r_j^3} \sum_{\xi' \in S_j(\xi)} (3 \langle \mathbf{p}_{\xi'}, \mathbf{e}_{\xi\xi'} \rangle \mathbf{e}_{\xi\xi'} - \mathbf{p}_{\xi'}), \quad \mathbf{q}_{\xi} = \sum_j \mathbf{q}_{\xi,j}, \quad (13)$$

$$\Delta\mathbf{q}_{\xi,j} = \frac{\beta'}{r_j^3} \sum_{\xi' \in S_j(\xi)} (3 \langle \Delta\mathbf{p}_{\xi'}, \mathbf{e}_{\xi\xi'} \rangle \mathbf{e}_{\xi\xi'} - \Delta\mathbf{p}_{\xi'}), \quad \Delta\mathbf{q}_{\xi} = \sum_j \Delta\mathbf{q}_{\xi,j}. \quad (14)$$

Выражая $\mathbf{p}_{\xi'}$ по формуле (12), подставляя в формулу (13) и учитывая, что $\beta'/\beta_{i'} = q_i/q_{i'}$, приходим к равенству:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{\xi,j} &= \frac{\alpha_{i'} \mu_{i'} q_i}{r_j^3 q_{i'}} \sum_{K,m} \gamma_{K,m,i'} \omega_{K,m}^2 \sin(\omega_{K,m} t + \phi_{K,m}) \times \\ &\times \sum_{\xi' \in S_j(\xi)} B_{\xi',K,m} (3 \langle \mathbf{g}_{K,m,i'}, \mathbf{e}_{\xi\xi'} \rangle \mathbf{e}_{\xi\xi'} - \mathbf{g}_{K,m,i'}). \end{aligned}$$

Рассматриваемая решётка обладает свойством центральной симметрии относительно произвольного её узла. Это обстоятельство позволяет внутреннюю сумму в правой части приведенного равенства, где суммирование ведется по всей координационной сфере $S_j(\xi)$, преобразовать к сумме по какой-нибудь её полусфере $\hat{S}_j(\xi)$. Тогда это равенство представляется в виде

$$\mathbf{q}_{\xi,j} = \frac{\alpha_{i'} \mu_{i'} q_i}{q_{i'} a^3} \sum_{K,m} \gamma_{K,m,i'} \omega_{K,m}^2 B_{\xi,K,m} \sin(\omega_{K,m} t + \phi_{K,m}) \mathbf{f}_{K,m,j}, \quad (15)$$

где

$$\mathbf{f}_{K,m,j} = \frac{2}{\lambda_j} \sum_{\xi' \in \hat{S}_j(\xi)} \cos \mathbf{K} \Delta \mathbf{r}_{\xi\xi'} (3 \langle \mathbf{g}_{K,m,i'}, \mathbf{e}_{\xi\xi'} \rangle \mathbf{e}_{\xi\xi'} - \mathbf{g}_{K,m,i'}), \quad \lambda_j = \frac{r_j}{a}, \quad \xi' \in \Lambda'_i. \quad (16)$$

Как видно из (16), вектор $\mathbf{f}_{K,m,j}$ является образом вектора $\mathbf{g}_{K,m,i'}$ относительно некоторого линейного преобразования. Это линейное преобразование определяется значением вектора \mathbf{K} и номером j координационной сферы, по которой ведется суммирование, и не зависит от того, какой подрешётке принадлежит атом A_{ξ} . Его матрицу в базисе $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ мы обозначим через $\hat{F}_{K,j}$. Тогда равенство (16) может быть записано так: $\mathbf{f}_{K,m,j} = \hat{F}_{K,j} \mathbf{g}_{K,m,i'}$, а формула (15) принимает вид:

$$\mathbf{q}_{\xi,j} = \frac{\alpha_{i'} \mu_{i'} q_i}{q_{i'} a^3} \sum_{K,m} \gamma_{K,m,i'} \omega_{K,m}^2 B_{\xi,K,m} \sin(\omega_{K,m} t + \phi_{K,m}) \hat{F}_{K,j} \mathbf{g}_{K,m,i'}. \quad (17)$$

Рассмотрим уравнение (4). С учетом равенств (1)-(3) оно принимает вид

$$\beta_i \left(\frac{1}{\alpha_i} + \frac{2}{3\rho_i^3} \right) \Delta\mathbf{p}_{\xi} - \Delta\mathbf{q}_{\xi} = \mathbf{q}_{\xi} - \frac{2\beta_i}{3\rho_i^3} \mathbf{p}_{\xi}, \quad i = 1, 2. \quad (18)$$

Правые части равенств (18) представляют линейные комбинации стоячих волн $\sin(\omega_{K,m}t + \phi_{K,m})B_{\xi,K,m}$ с векторными коэффициентами. Для того, чтобы эти равенства были возможны необходимо, чтобы вектор-функция $\Delta \mathbf{p}_\xi = \Delta \mathbf{p}_\xi(t)$ (а вместе с ней и вектор-функция $\Delta \mathbf{q}_\xi$) также являлась линейной комбинацией тех же стоячих волн с некоторыми векторными коэффициентами. Будем искать вектор-функцию $\Delta \mathbf{p}_\xi$ в виде, подобном тому, как представлялась формулой (11) вектор-функция \mathbf{p}_ξ . Положим

$$\Delta \mathbf{p}_\xi(t) = \frac{\alpha_i \mu_i}{\beta_i} \sum_{K,m} \gamma_{K,m,i} \omega_{K,m}^2 B_{\xi,K,m} \sin(\omega_{K,m}t + \phi_{K,m}) \Delta \mathbf{g}_{K,m,i}. \quad (19)$$

Пусть M и M' – множества чисел, нумерующих координационные сферы атома A_ξ , лежащие соответственно в той же подрешётке, что и сам атом и в противоположной подрешётке. Тогда $M = \{2, 3, 5, 6, \dots\}$, $M' = \{1, 4, 7, \dots\}$. Положим

$$\begin{aligned} \hat{H}_K &= \sum_{j \in M} \hat{F}_{K,j}, & \hat{G}_K &= \sum_{j \in M'} \hat{F}_{K,j}, \\ d_{11} &= \frac{\alpha_1 \mu_1}{a^3} & d_{22} &= \frac{\alpha_2 \mu_2}{a^3}, & d_{12} &= \frac{q_1 \alpha_2 \mu_2}{q_2 a^3}, & d_{21} &= \frac{q_2 \alpha_1 \mu_1}{q_1 a^3}. \end{aligned}$$

Тогда система уравнений (18) приводится к виду

$$\begin{aligned} \gamma_{K,m,1} d_{11} \left[\left(\frac{a^3}{\alpha_1} + \frac{2a^3}{3\rho_1^3} \right) \hat{I} - \hat{H}_K \right] \Delta \mathbf{g}_{K,m,1} - \gamma_{K,m,2} d_{12} \hat{G}_K \Delta \mathbf{g}_{K,m,2} = \\ = \gamma_{K,m,1} d_{11} \left(\hat{H}_K - \frac{2a^3}{3\rho_1^3} \hat{I} \right) \mathbf{g}_{K,m,1} + \gamma_{K,m,2} d_{12} \hat{G}_K \mathbf{g}_{K,m,2}, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} -\gamma_{K,m,1} d_{21} \hat{G}_K \Delta \mathbf{g}_{K,m,1} + \gamma_{K,m,2} d_{22} \left[\left(\frac{a^3}{\alpha_2} + \frac{2a^3}{3\rho_2^3} \right) \hat{I} - \hat{H}_K \right] \Delta \mathbf{g}_{K,m,2} = \\ = \gamma_{K,m,1} d_{21} \hat{G}_K \mathbf{g}_{K,m,1} + \gamma_{K,m,2} d_{22} \left(\hat{H}_K - \frac{2a^3}{3\rho_2^3} \hat{I} \right) \mathbf{g}_{K,m,2}. \end{aligned} \quad (21)$$

Решив систему (20), (21), положим

$$\mathbf{h}_{K,m,i} = \mathbf{g}_{K,m,i} + \Delta \mathbf{g}_{K,m,i}, \quad D_{K,m,i} = \frac{\mu_i \omega_{K,m}^2 \alpha_i \gamma_{K,m,i}}{\beta_i}, \quad i = 1, 2. \quad (22)$$

Складывая равенства (12) и (19), учитывая обозначения (22), приходим к формулам

$$\mathbf{P}_\xi(t) = \sum_{K,m} D_{K,m,i} B_{\xi,K,m} \sin(\omega_{K,m}t + \phi_{K,m}) \mathbf{h}_{K,m,i}, \quad \xi \in \Lambda_i. \quad (23)$$

Введем обозначения, полагая

$$\mathbf{P}_{\xi,K,m}(t) = D_{K,m,i} B_{\xi,K,m} \sin(\omega_{K,m}t + \phi_{K,m}) \mathbf{h}_{K,m,i}, \quad \xi \in \Lambda_i. \quad (24)$$

Тогда формула (23) представляется в виде

$$\mathbf{P}_\xi(t) = \sum_{K,m} \mathbf{P}_{\xi,K,m}(t). \quad (25)$$

Усреднённые характеристики внутриатомных диполей. Рассмотрим колебание, заданное по формуле (24). Средний квадрат плеча внутриатомного диполя по времени и по всем атомам i -й подрешётки для данных \mathbf{K} и m очевидно выражается формулой

$$[\mathbf{P}_{K,m,i}^2] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{TN} \int_0^T \sum_{\xi \in \Lambda_i} \mathbf{P}_{\xi,K,m}^2(t) dt, \quad i = 1, 2.$$

Как нетрудно видеть, справедливо равенство

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{P}_{\xi,K,m}^2(t) dt = \frac{1}{2} D_{K,m,i}^2 B_{\xi,K,m}^2 h_{K,m,i}^2.$$

Следовательно,

$$[\mathbf{P}_{K,m,i}^2] = \frac{1}{2N} \sum_{\xi \in \Lambda_i} D_{K,m,i}^2 B_{\xi,K,m}^2 h_{K,m,i}^2 = \frac{2}{N} D_{K,m,i}^2 A_{K,m}^2 h_{K,m,i}^2 \sum_{\xi \in \Lambda_i} \cos^2(\mathbf{K}\mathbf{r}_\xi + \psi_{K,m}).$$

Но, как легко доказать, $\sum_{\xi \in \Lambda_i} \cos^2(\mathbf{K}\mathbf{r}_\xi + \psi_{K,m}) = N/2$. Поэтому с учётом (8) в итоге получаем

$$[\mathbf{P}_{K,m,i}^2] = \frac{2\hbar D_{K,m,i}^2 h_{K,m,i}^2}{N\mu_{K,m}\omega_{K,m}[\exp(\hbar\omega_{K,m}/k_B T) - 1]}, \quad i = 1, 2. \quad (26)$$

Согласно (25) средний квадрат плеча внутриатомного диполя для каждой из подрешёток выражается формулой

$$[\mathbf{P}_i^2] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{TN} \int_0^T \sum_{\xi \in \Lambda_i} \mathbf{P}_\xi^2(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{TN} \int_0^T \sum_{\xi \in \Lambda_i} \left(\sum_{K,m} \mathbf{P}_{\xi,K,m}(t) \right)^2 dt.$$

Для вычисления подынтегрального выражения поменяем в нём порядок суммирования. Тогда

$$\sum_{\xi \in \Lambda_i} \mathbf{P}_\xi^2 = \sum_{K,L} \sum_{\xi \in \Lambda_i} \sum_{m,l=1}^6 \langle \mathbf{P}_{\xi,K,m}, \mathbf{P}_{\xi,L,l} \rangle. \quad (27)$$

Если $\mathbf{K} \neq \mathbf{L}$, то, как нетрудно проверить, справедливо равенство

$$\sum_{\xi \in \Lambda_i} \cos(\mathbf{K}\mathbf{r}_\xi + \psi_{K,m}) \cos(\mathbf{L}\mathbf{r}_\xi + \psi_{L,l}) = 0.$$

Следовательно, сумма (27) приводится к виду

$$\sum_{\xi \in \Lambda_i} \mathbf{P}_\xi^2 = \sum_K \sum_{\xi \in \Lambda_i} \sum_{m,l=1}^6 \langle \mathbf{P}_{\xi,K,m}, \mathbf{P}_{\xi,K,l} \rangle.$$

Нетрудно также проверить, что

$$\begin{aligned} & \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{m,l=1}^6 \langle \mathbf{P}_{\xi,K,m}(t), \mathbf{P}_{\xi,K,l}(t) \rangle dt = \\ & = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{m=1}^6 \mathbf{P}_{\xi,K,m}^2(t) dt = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^6 D_{K,m,i}^2 B_{\xi,K,m}^2 h_{K,m,i}^2. \end{aligned}$$

Таким образом, справедливо равенство

$$[\mathbf{P}_i^2] = \sum_{K,m} \frac{1}{2N} \sum_{\xi \in \Lambda_i} D_{K,m,i}^2 B_{\xi,K,m}^2 h_{K,m,i}^2.$$

Вычисляя внутреннюю сумму, согласно (26) окончательно получаем формулу

$$[\mathbf{P}_i^2] = \sum_{K,m} \mathbf{P}_{K,m,i}^2 = \sum_{K,m} \frac{2 \hbar D_{K,m,i}^2 h_{K,m,i}^2}{N \mu_{K,m} \omega_{K,m} [\exp(\hbar \omega_{K,m}/k_B T) - 1]}. \quad (28)$$

Формула (28) позволяет рассчитать спектральную плотность распределения квадрата плеча $P_i^2(\omega)$ внутриатомного диполя.

Пусть $\{\omega_j\}$, $j = 1, \dots, n_0$ – некоторое разбиение фононного спектра кристалла $[0, \omega_{\max}]$ на достаточно малые части. Положим $\Delta\omega_j = \omega_j - \omega_{j-1}$ и $\Delta\Omega_j = [\omega_j, \omega_j + \Delta\omega_j]$. Тогда согласно (22) равенство (28) представляется в виде

$$[\mathbf{P}_i^2] = \sum_j \sum_{\omega_{K,m} \in \Delta\Omega_j} \frac{2 \hbar a^6 \mu_i^2 \omega_{K,m}^3 (\gamma_{K,m,i})^2 h_{K,m,i}^2}{N \mu_{K,m} [\exp(\hbar \omega_{K,m}/k_B T) - 1]}.$$

Положим

$$P_i^2(\omega_j) \Delta\omega_j = \frac{2 \hbar a^6 \mu_i^2 \omega_j^3}{\exp(\hbar \omega_j/k_B T) - 1} \sum_{\omega_{K,m} \in \Delta\Omega_j} \frac{(\gamma_{K,m,i})^2 h_{K,m,i}^2}{N \mu_{K,m}}. \quad (29)$$

Обозначим через $h_i^2(\omega_j)$ среднее значение величины $(\gamma_{K,m,i})^2 h_{K,m,i}^2 / \mu_{K,m}$ по всем значениям K, m , для которых $\omega_{K,m} \in \Delta\Omega_j$. Пусть далее $g(\omega)$ – плотность вероятности распределения фононного спектра кристалла. Поскольку число слагаемых суммы (28) равно $3N$, величина $3Ng(\omega_j)\Delta\omega_j$ равна числу слагаемых суммы (29). Тогда сама эта сумма выражается равенством

$$\sum_{\omega_{K,m} \in \Delta\Omega_j} \frac{(\gamma_{K,m,i})^2 h_{K,m,i}^2}{N \mu_{K,m}} = 3g(\omega_j) h_i^2(\omega_j) \Delta\omega_j. \quad (30)$$

Из равенств (29), (30) следует, что справедлива формула

$$P_i^2(\omega) = \frac{6 \hbar a^6 \mu_i^2 \omega^3 g(\omega) h_i^2(\omega)}{\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1} \quad (31)$$

Для произвольного значения частоты ω , принадлежащей фононному спектру кристалла, величина $h_i^2(\omega)$ равна среднему значению величин $(\gamma_{K,m,i})^2 h_{K,m,i}^2 / \mu_{K,m}$ по всем значениям вектора \mathbf{K} и параметра m , при которых $\omega = \omega_{K,m}$.

Ниже приводятся расчётные кривые спектральной плотности квадрата плеча внутриатомного диполя для каждой из подрешёток (рис. 1), а также его среднее значение. Полученные графики воспроизводят все особенности плотности фононных состояний (рис. 2) твёрдого раствора NiAl.

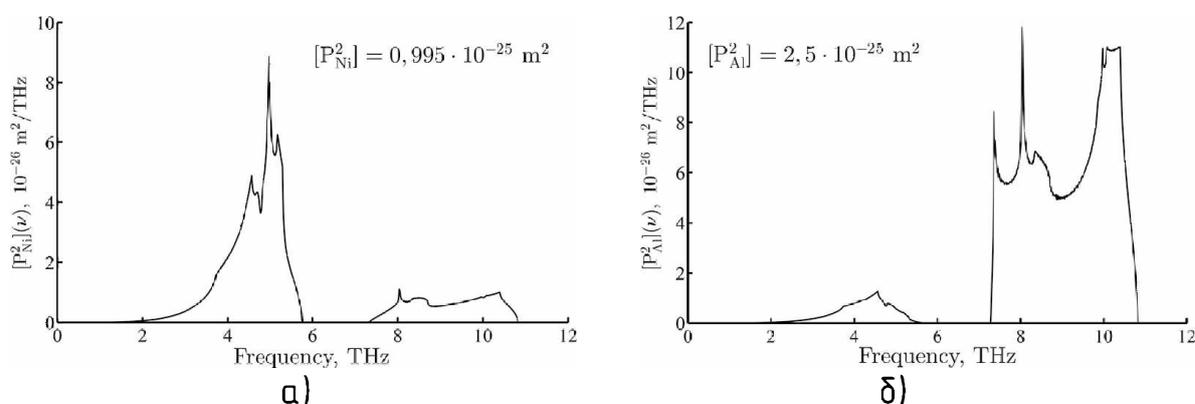


Рис. 1. Спектральная плотность квадрата плеча внутриатомного диполя: а) для подрешётки Ni; б) подрешётки Al.

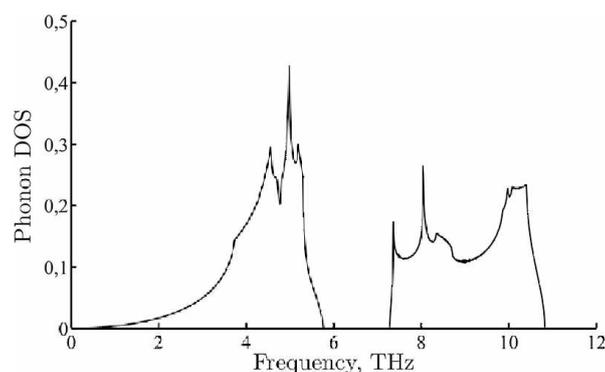


Рис. 2. Плотность фононных состояний для NiAl.

Список литературы

1. Холодовский В. Е., Краюшкина Е. Ю. Дисперсионные соотношения для кристаллов твёрдых растворов со структурой CsCl // Ученые записки ЗабГУ. Сер. Физика, математика, техника, технология. 2013. № 3(50). С. 121–131.

2. Краюшкина Е. Ю., Холодовский В. Е. Расчёт теплоёмкости и среднеквадратичных смещений твёрдого раствора NiAl по фононным спектрам // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2015. № 3. С. 110–119.

3. Мачихина И. О., Холодовский В. Е. Динамические и испускательные характеристики внутриатомных диполей металлов в модели В-д-В взаимодействий // Ученые записки ЗабГУ. 2014. №3(56). С. 74–83.

4. Холодовский В. Е., Мачихина И. О. Параметры внутриатомных диполей металлов в модели В-д-В взаимодействий // Изв. Сам. науч. центра РАН. 2014. Т. 16. № 4. С. 102–108.

5. Холодовский В. Е., Сидоров А. А. Поток энергии и сила реакции на излучение внутриатомного диполя // Ученые записки ЗабГГПУ. Сер. Физика, математика, техника, технология 2012. № 3. С. 141–144.

References

1. Kholodovskii V. E., Krayushkina E. Yu. Dispersionnye sootnosheniya dlya kristallov tverdykh rastvorov so strukturoi CsCl // Uchenye zapiski ZabGU. Ser. Fizika, matematika, tekhnika, tekhnologiya. 2013. № 3(50). S. 121–131.

2. Krayushkina E. Yu., Kholodovskii V. E. Raschet teploemkosti i srednekvadraticnykh smeshchenii tverdogo rastvora NiAl po fononnyim spektram // Vestnik MGTU im. N. E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki. 2015. № 3. С. 110–119.

3. Machikhina I. O., Kholodovskii V. E. Dinamicheskie i ispuskatel'nye kharakteristiki vnutriatomnykh dipolei metallov v modeli V-d-V vzaimodeistvii // Uchenye zapiski ZabGU. 2014. №3(56). С. 74–83.

4. Kholodovskii V. E., Machikhina I. O. Parametry vnutriatomnykh dipolei metallov v modeli V-d-V vzaimodeistvii // Izv. Sam. nauch. tsentra RAN. 2014. Т. 16. № 4. С. 102–108.

5. Kholodovskii V. E., Sidorov A. A. Potok energii i sila reaktsii na izluchenie vnutriatomnogo dipolya // Uchenye zapiski ZabGGPU. Ser. Fizika, matematika, tekhnika, tekhnologiya 2012. № 3. S. 141–144.

Статья поступила в редакцию 23.04.2015

Святослав Евгеньевич Холодовский,
доктор физико-математических наук, профессор,
Забайкальский государственный университет,
672039, Россия, г. Чита, ул.Александро-Заводская, 30,
e-mail: hol47@yandex.ru

**Краевые задачи в областях с наноструктурными границами
(покрытиями). Теорема двойственности¹**

В статье рассмотрен класс краевых задач в полудициндре $D = (x < 0) \times (y \in Q \subseteq R^m)$, основанием которого $x = 0$ является многослойная плёнка, состоящая из чередующихся бесконечно тонких сильно- и слабопроницаемых прослоек. Рассмотрены граничные условия двух типов при заданном потенциале и при заданной нормальной скорости на внешней стороне плёнки. Доказано, что решение одной задачи выражается через решение другой задачи, при этом сильно- и слабопроницаемые прослойки меняются ролями.

Ключевые слова: краевые задачи, граничные многослойные плёнки, сильно- и слабопроницаемые прослойки.

Svyatoslav Yevgenyevich Kholodovskii,
Doctor of Physical and Mathematics, Professor,
Transbaikal State University,
30 Aleksandro-Zavodskaya St., Chita, Russia, 672039,
e-mail: hol47@yandex.ru

**Boundary Value Problems in Areas with Nano-structured Boundaries
(Coatings). Duality Theorem²**

The article describes a class of boundary value problems in a half-cylinder $D = (x < 0) \times (y \in Q \subseteq R^m)$ whose base $x = 0$ is a multilayer film consisting of alternating infinitely thin strongly and weakly permeable layers. The author considers the boundary conditions of the two types at a given potential and given normal speed at the outer side of the film. It is proved that the solution of one problem is expressed in terms of other problem at the same time strongly and weakly permeable layer switch roles.

Keywords: boundary value problem, boundary multilayer films, strongly and weakly permeable layers.

Согласно работам многих ученых, в том числе академика С. Ю. Глазьева [1], в настоящее время человечество с точки зрения своего экономического и научного развития вступило в новый этап, называемый нанотехнологическим укладом. Поэтому имеет большой практический и научный интерес исследование динамических процессов тепломассопереноса в материалах содержащих наноразмерные многослойные плёночные покрытия. Указанные процессы в математических моделях приводят к краевым задачам математической физики в областях с обобщёнными граничными условиями на плёнках.

¹Работа выполнена в рамках Государственного задания вузу Министерства образования и науки Российской Федерации (проект 2014/255 НИР 2603.14).

²The work was performed as part of the State job university Ministry of Education and Science of the Russian Federation (project 2014/255 research 2603.14).

Рассмотрим в пространстве $(x, y_1, \dots, y_m) \in R^{m+1}$ полуцилиндр $D = (-\infty < x < 0) \times (y \in Q \subseteq R^m)$, граница которого $x = 0$ (основание полуцилиндра) является многослойной плёнкой, состоящей из чередующихся сильно- и слабопроницаемых прослоек. Сильно- и слабопроницаемые прослойки моделируем бесконечно тонкими слоями соответственно с бесконечно большой и бесконечно малой проницаемостью [2]. При этом i -ая сильно проницаемая прослойка характеризуется параметром A_i , где $k_i l_i \rightarrow A_i$, $l_i \rightarrow 0$ – толщина (раскрытие), а $k_i \rightarrow \infty$ – проницаемость слоя, вырождающегося в сильно проницаемую прослойку. Аналогично параметр j -й слабопроницаемой прослойки B_j определяется как предел $l_j/k_j \rightarrow B_j$, где $l_j \rightarrow 0$ – толщина, а $k_j \rightarrow 0$ – проницаемость слоя, вырождающегося в слабопроницаемую прослойку [2].

Как показано в работе [2], на многослойной плёнке $x = 0$ можно рассматривать обобщённые граничные условия двух типов и соответственно два типа граничных задач: при заданном значении $\varphi(y)$ искомого потенциала (условие 1-го типа) и при заданном значении $\psi(y)$ нормальной скорости (условие 2-го типа) на внешней стороне плёнки, т. е. при $x = +0$.

Пусть плёнка $x = 0$ состоит из $2n$ чередующихся сильно- и слабопроницаемых прослоек с параметрами соответственно $A_1, B_2, \dots, A_{2n-1}, B_{2n}$, где $A_1 \geq 0$ – параметр первой прослойки $x = -0$ и плёнку замыкает слабопроницаемая прослойка $x = +0$ с параметром $B_{2n} \geq 0$. Остальные параметры $A_i, B_j > 0$. При $A_1 = 0$ или $B_{2n} = 0$ первая или соответственно последняя прослойка отсутствует. Рассмотрим для функции $u(x, y)$ в полуцилиндре D класс задач 1-го типа

$$\partial_x^2 u + Lu = 0, \quad Mu|_{(x,y) \in S} = 0, \quad (1)$$

$$u + F_{2n}u|_{x=-0} = \varphi(y), \quad (2)$$

где $\partial_x^r = \partial^r / \partial x^r$; L – произвольный линейный дифференциальный оператор по переменным y_i , т.е. оператор L не содержит производных по x и коэффициенты при производных не зависят от x ; $S = (x < 0) \times (y \in \partial Q)$ – боковая поверхность полуцилиндра D ; M (как и L) является линейным оператором по переменным y_i , в частности M – оператор классических граничных условий 1-го, или 2-го, или 3-го рода; оператор F_{2n} строится по рекуррентным формулам, полученным в работе [2]:

$$\begin{aligned} F_{2i-1}u &= F_{2i-2}u, & G_{2i-1}u &= A_{2i-1}\partial_x^2(u + F_{2i-2}u) + G_{2i-2}u, \\ F_{2i}u &= B_{2i}(\partial_x u + G_{2i-1}u) + F_{2i-1}u, & G_{2i}u &= G_{2i-1}u, \end{aligned} \quad (3)$$

$F_0 = G_0 = 0$, $i = 1, \dots, n$. Здесь операторы L, M считаются такими, что соответствующая классическая задача без плёнки (при идеальном контакте области D с внешней средой) вида

$$\partial_x^2 f + Lf = 0, \quad Mf|_{(x,y) \in S} = 0, \quad f|_{x=0} = \varphi(y)$$

корректна. Для волнового уравнения (1) обобщённое граничное условие (2) соответствует наличию комбинации точечных масс при их упругом контакте на границе [3]-[5].

Наряду с данной задачей рассмотрим для функции $v(x, y)$ в полуцилиндре D аналогичный класс задач 2-го типа

$$\partial_x^2 v + Lv = 0, \quad Mv|_{(x,y) \in S} = 0, \quad (4)$$

$$\partial v + \tilde{G}_{2n}v|_{x=0} = \psi(y), \quad (5)$$

где оператор \tilde{G}_{2n} строится по рекуррентным формулам [2]:

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{2i-1}v &= \tilde{B}_{2i-1}(\partial_x v + \tilde{G}_{2i-2}v) + \tilde{F}_{2i-2}v, & \tilde{G}_{2i-1}v &= \tilde{G}_{2i-2}v, \\ \tilde{F}_{2i}v &= \tilde{F}_{2i-1}v, & \tilde{G}_{2i}v &= \tilde{A}_{2i}\partial_x^2(v + \tilde{F}_{2i-1}v) + \tilde{G}_{2i-1}v, \end{aligned} \quad (6)$$

$\tilde{F}_0 = \tilde{G}_0 = 0, i = 1, \dots, n$. Здесь граница $x = 0$ является многослойной плёнкой, состоящей из чередующихся слабо- и сильно проницаемых прослоек с параметрами соответственно вида $\tilde{B}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{B}_{2n-1}, \tilde{A}_{2n}$, где $\tilde{B}_1 \geq 0$ – параметр первой слабопроницаемой прослойки $x = -0$, $\tilde{A}_{2n} \geq 0$ – параметр последней сильно проницаемой прослойки $x = +0$.

Отметим, что при отсутствии плёнок, т.е. при $A_i = B_j = \tilde{B}_i = \tilde{A}_j = 0$, граничные условия 1-го и 2-го типов (2), (5) совпадают с классическими граничными условиями соответственно 1-го и 2-го рода. Классическое граничное условие третьего рода является обобщённым граничным условием 1-го типа на однослойной слабопроницаемой плёнке (2).

Задачи 1-го и 2-го типа связаны друг с другом в следующем смысле.

Теорема двойственности. Если функция $u(x, y)$ является решением задачи 1-го типа (1), (2), то функция $v = \partial_x u$ является решением задачи 2-го типа (4), (5), в которой $\tilde{B}_i = A_i, \tilde{A}_j = B_j$,

$$\psi(y) = -L\varphi(y), \quad (7)$$

и обратно, если $v(x, y)$ является решением задачи 2-го типа (4), (5), то функция $u = \partial_x v$ является решением задачи 1-го типа (1), (2), в которой $A_i = \tilde{B}_i, B_j = \tilde{A}_j, \varphi(y) = \psi(y)$.

Другими словами, в указанных задачах сильно- и слабопроницаемые прослойки меняются ролями.

Доказательство. Пусть $u(x, y)$ является решением задачи (1), (2). Дифференцируя условия задачи (1) по x , для функции $v = \partial_x u$ получим условия (4), при этом учли, что операторы L и M , а также уравнение боковой поверхности S не содержат переменной x . Применяя оператор L (по переменным y_i) к граничному условию (2), с учетом равенства $Lu = -\partial_x^2 u$ (1) получим условие

$$\partial_x^2 u + F_{2n}\partial_x^2 u|_{x=0} = \psi(y), \quad (8)$$

где $\psi(y) = -L\varphi(y)$.

Для операторов $F_j, G_j, \tilde{F}_j, \tilde{G}_j$ (3), (6) выполняются равенства

$$F_j\partial_x^2 u = \tilde{G}_jv, \quad G_ju = \tilde{F}_jv, \quad j = 1, \dots, 2n, \quad (9)$$

где $v = \partial_x u$. Действительно, из формул (3), (6) следует $F_1\partial_x^2 u = \tilde{G}_1v = 0, G_1u = A_1\partial_x^2 u = \tilde{B}_1\partial_x v = \tilde{F}_1v, F_2\partial_x^2 u = B_2(\partial_x^3 u + G_1\partial_x^2 u) = \tilde{A}_2(\partial_x^2 v + \tilde{F}_1\partial_x^2 v) = \tilde{G}_2v, G_2u = G_1u = \tilde{F}_1v =$

$\tilde{F}_2 v$, т.е. равенства (9) имеют место для $j = 1, 2$. Пусть равенства (9) выполняются для $j = 2i - 1, 2i$. Тогда с учетом (3), (6) получим те же формулы при $j = 2i + 1, 2i + 2$: $F_{2i+1} \partial_x^2 u = F_{2i} \partial_x^2 u = \tilde{G}_{2i} v = \tilde{G}_{2i+1} v$, $G_{2i+1} u = A_{2i+1} (\partial_x^2 u + F_{2i} \partial_x^2 u) + G_{2i} u = \tilde{B}_{2i+1} (\partial_x v + \tilde{G}_{2i} v) + \tilde{F}_{2i} v = \tilde{F}_{2i+1} v$, $F_{2i+2} \partial_x^2 u = B_{2i+2} (\partial_x^3 u + G_{2i+1} \partial_x^2 u) + F_{2i+1} \partial_x^2 u = \tilde{A}_{2i+2} (\partial_x^2 v + \tilde{F}_{2i+1} \partial_x^2 v) + \tilde{G}_{2i+1} v = \tilde{G}_{2i+2} v$, $G_{2i+2} u = G_{2i+1} u = \tilde{F}_{2i+1} v = \tilde{F}_{2i+2} v$, где $\tilde{B}_i = A_i$, $\tilde{A}_j = B_j$, т.е. равенства (9) справедливы. Отсюда при $j = 2n$ получим $F_{2n} \partial_x^2 u = \tilde{G}_{2n} v$. Тогда граничное условие (8) с учетом $\partial_x^2 u = \partial_x v$ примет вид граничного условия (5) для функции $v = \partial_x u$, т.е. для функции v получили задачу 2-го типа (4), (5). Отсюда следует первое утверждение.

Пусть теперь функция $v(x, y)$ является решением задачи (4), (5). Тогда из условий (4) следует, что функция $u = \partial_x v$ удовлетворят условиям (1). Для операторов $F_j, G_j, \tilde{F}_j, \tilde{G}_j$ (3) и (6) выполняются равенства

$$\tilde{F}_j \partial_x^2 v = G_j u, \quad \tilde{G}_j v = F_j u, \quad j = 1, \dots, 2n, \quad (10)$$

где $u = \partial_x v$. Действительно, из формул (3), (6) следует, что равенства (10) имеют место для $j = 1, 2$: $\tilde{F}_1 \partial_x^2 v = \tilde{B}_1 \partial_x^3 v = A_1 \partial_x^2 u = G_1 u$, $\tilde{G}_1 v = F_1 u = 0$, $\tilde{F}_2 \partial_x^2 v = \tilde{F}_1 \partial_x^2 v = G_1 u = G_2 u$, $\tilde{G}_2 v = A_2 (\partial_x^2 v + \tilde{F}_1 \partial_x^2 v) = B_2 (\partial_x u + G_1 u) = F_2 u$. Полагая, что формулы (10) выполняются для $j = 2i - 1, 2i$, с учетом (3), (6) получим те же формулы для $j = 2i + 1, 2i + 2$: $\tilde{F}_{2i+1} \partial_x^2 v = \tilde{B}_{2i+1} (\partial_x^3 v + \tilde{G}_{2i} \partial_x^2 v) + \tilde{F}_{2i} \partial_x^2 v = A_{2i+1} (\partial_x^2 u + F_{2i} \partial_x^2 u) + G_{2i} u = \tilde{G}_{2i+1} u$, $\tilde{G}_{2i+1} v = \tilde{G}_{2i} v = F_{2i} u = F_{2i+1} u$, $\tilde{F}_{2i+2} \partial_x^2 v = \tilde{F}_{2i+1} \partial_x^2 v = G_{2i+1} u = G_{2i+2} u$, $\tilde{G}_{2i+2} v = A_{2i+2} (\partial_x^2 v + \tilde{F}_{2i+1} \partial_x^2 v) + \tilde{G}_{2i+1} v = B_{2i+2} (\partial_x u + G_{2i+1} u) + F_{2i+1} u = F_{2i+2} u$, где $A_i = \tilde{B}_i$, $B_j = \tilde{A}_j$, т.е. формулы (10) справедливы. Отсюда при $j = 2n$ получим $\tilde{G}_{2n} v = F_{2n} u$. Тогда граничное условие (5) для функции $u = \partial_x v$ примет вид граничного условия (2), т.е. для функции u получили задачу 1-го типа (1), (2) при неизменной граничной функции $\varphi(y) = \psi(y)$. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы следует, что зная решение $v(x, y)$ задачи 2-го типа (4), (5), по формуле $u = \partial_x v$ можно найти решение задачи 1-го типа (1), (2) при сохранении граничной функции $\psi(y) = \varphi(y)$. Однако для нахождения решения задачи 2-го типа по известному решению $u(x, y)$ задачи 1-го типа необходимо определить граничную функцию $\varphi(y)$ по заданной граничной функции $\psi(y)$ из дифференциального уравнения (7): $\psi(y) = -L\varphi(y)$ (в статье [2] задача 2-го типа решена непосредственно).

Список литературы

1. Глазьев С. Ю., Харитонов В. В. Нанотехнологии как ключевой фактор нового технологического уклада в экономике: монография. М.: Тривант, 2009. 304 с.
2. Холодовский С. Е. О решении краевых задач в полупространстве, ограниченном многослойной плёнкой // Ученые записки ЗабГГПУ. Сер. Физика, математика, техника, технология. 2011. № 3 (38). С. 160–164.
3. Холодовский С. Е. Решение задачи о движении неограниченной разрывной струны (стержня) с упругим контактом // Ученые записки ЗабГУ. Сер. Физика, математика, техника, технология. 2013. № 3 (50). С. 132–139.
4. Холодовский С. Е., Потехо А. О. Решение краевой задачи о движении полуограниченной струны с граничным условием третьего рода // Ученые записки ЗабГУ. Сер. Физика, математика, техника, технология. 2013. № 3 (50). С. 140–145.

5. Kholodovskii S. E. Effective Solution of the Problem of Motion of an Infinite String with an Attached Point Mass // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2015. Vol. 55. No. 1. P. 101–108.

References

1. Glaz'ev S. Yu., Kharitonov V. V. Nanotekhnologii kak klyuchевой faktor novogo tekhnologicheskogo uklada v ekonomike: monografiya. M.: Trovant, 2009 g. 304 s.

2. Kholodovskii S. E. O reshenii kraevykh zadach v poluprostranstve, ogranichenom mnogoslonoй plenкой // Uchenye zapiski ZabGGPU. Ser. Fizika, matematika, tekhnika, tekhnologiya. 2011. № 3 (38). S. 160–164.

3. Kholodovskii S. E. Reshenie zadachi o dvizhenii neogranichennoy razryvnoy struny (sterzhnya) s uprugim kontaktom // Uchenye zapiski ZabGU. Ser. Fizika, matematika, tekhnika, tekhnologiya. 2013. № 3 (50). S. 132–139.

4. Kholodovskii S. E., Potekho A. O. Reshenie kraevoy zadachi o dvizhenii poluogranichennoy struny s granichnym usloviem tret'ego roda // Uchenye zapiski ZabGU. Ser. Fizika, matematika, tekhnika, tekhnologiya. 2013. № 3 (50). S. 140–145.

5. Kholodovskii S. E. Effective Solution of the Problem of Motion of an Infinite String with an Attached Point Mass // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2015. Vol. 55. No. 1. P. 101–108.

Статья поступила в редакцию 13.04.2015

*Галина Михайловна Яковлева,
старший преподаватель,
Забайкальский государственный университет,
672039, Россия, г. Чита, ул.Александро-Заводская, 30,
e-mail: y.g.m@mail.ru*

О динамических процессах в плоских областях с плёночным включением¹

Рассмотрена задача о построении потенциалов установившихся процессов (теплопроводности, фильтрации жидкости, диффузии) на кусочно-однородной плоскости с плёночным включением в виде бесконечно тонкого сильно- или слабопроницаемого слоя. Процесс индуцируется заданными особыми точками (источниками, стоками и т. д.). Потенциалы выражены в квадратурах через гармонические функции с сохранением типа их особых точек. Показано, что полученные формулы выражают также решения краевых задач в полуплоскости и полосе с плёночным включением через решения аналогичных классических задач без плёнки.

Ключевые слова: особые точки потенциалов, краевые задачи, кусочно-однородные области, сильно проницаемая плёнка, слабопроницаемая плёнка, дебит скважины.

*Galina Mikhaylovna Yakovleva,
Senior Lecturer,
Transbaikal State University,
30, Aleksandro-Zavodskaya St., Chita, Russia, 672039,
e-mail: y.g.m@mail.ru*

Dynamical Processes in Flat Areas with Film Inclusion²

The task of constructing a potential steady-state processes (heat conduction, fluid filtration, diffusion) on piecewise homogeneous plane with the film including in the form of thin strongly or weakly permeable layer is considered. Process is induced with the given singular points (sources, sinks, etc.). The potentials are expressed in quadratures in terms of harmonic functions with preservation of the type of singular points. It is shown that these formulas also express solving of boundary value problems in a half-plane and strip with the film including through the solution of the classic similar problems without the film.

Keywords: singular points of potential, boundary value problems, piecewise homogeneous areas, strongly permeable film, weakly permeable film.

1. Введение. В настоящее время всё более широкие приложения находят композитные материалы, содержащие наноразмерные плёночные включения. В теории фильтрации для управления потоками используются линейные дренажи и экраны, в диффузии применяются

¹Работа выполнена в рамках Государственного задания вузу Министерства образования и науки Российской Федерации (проект 2014/255 НИР 2603.14).

²The work was performed as part of the State of the university Ministry of Education and Science of the Russian Federation (project 2014/255 Study 2603.14).

мембраны и т. д. Отсюда имеет большой интерес теоретическое исследование динамических процессов в кусочно-однородных средах с плёночными включениями.

В статье рассматриваются сильно- и слабопроницаемые плёнки, которые, как и в работах [1]–[3], моделируются бесконечно тонкими слоями с бесконечно большой и соответственно бесконечно малой проницаемостью. В указанных работах решаются краевые задачи с обобщёнными условиями сопряжения на плёнках.

В статье предложен новый подход к решению краевых задач с плёнками: сначала плёнка заменяется слоем конечной толщины и проницаемости и решается соответствующая задача без плёнки, а затем в полученном решении указанный слой вырождается в сильно- или слабопроницаемую плёнку. Это позволяет определять параметры течения в самой плёнке. Кроме того, показано, что полученные решения удовлетворяют известным обобщённым условиям сопряжения на плёнках без дополнительных гипотез, которые постулируются при выводе указанных условий сопряжения на плёнках [4; 5].

2. Решение вспомогательной задачи без плёнки. Рассмотрим установившийся динамический процесс (фильтрации жидкости, теплопроводности, диффузии) на кусочно-однородной плоскости, состоящей из трех зон $D_1(x < 0)$, $D_0(0 < x < l)$, $D_2(x > l)$, $-\infty < y < \infty$ с различной постоянной проницаемостью соответственно k_1, k_0, k_2 , где x, y – декартовы координаты. Пусть процесс индуцируется заданными особыми точками потенциала (источниками, стоками и т. д.), расположенными в зоне $D_1(x < 0)$. При этом предположим, что известна гармоническая на плоскости (x, y) функция $f(x, y)$, которая имеет указанные особые точки при $x < 0$. Функция $f(x, y)$ является потенциалом рассматриваемого процесса на однородной плоскости без плёнки. Например, для источника в точке (x_0, y_0) , $x_0 < 0$ имеем

$$f(x, y) = q \ln[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]. \quad (1)$$

Для функций (потенциалов) $u_i(x, y)$ в соответствующих зонах D_i вне особых точек задача имеет вид

$$\Delta u_i = 0, \quad (x, y) \in D_i, \quad (2)$$

$$x = 0: \quad u_1 = u_0, \quad k_1 \partial_x u_1 = k_0 \partial_x u_0, \quad (3)$$

$$x = l: \quad u_0 = u_2, \quad k_0 \partial_x u_0 = k_2 \partial_x u_2, \quad (4)$$

где функция $u_1(x, y)$ в окрестности особых точек удовлетворяет условию

$$u_1 \sim f(x, y), \quad (5)$$

т. е. функция $u_1(x, y)$ имеет особые точки заданной гармонической функции $f(x, y)$, здесь $\partial_x^n = \partial^n / \partial x^n$, Δu – оператор Лапласа.

Выразим решение $u_i(x, y)$ задачи (2)–(5) через гармоническую функцию $f(x, y)$. Для вывода общих формул в качестве промежуточного метода применяем метод Фурье. Предположим сначала, что функция $f(0, y)$ разлагается в интеграл Фурье с коэффициентами Фурье $f_i(\lambda)$ [6, с. 529]:

$$f(0, y) = \int_0^{\infty} g(y, \lambda) d\lambda, \quad g(y, \lambda) = f_1(\lambda) \sin \lambda y + f_2(\lambda) \cos \lambda y, \quad (6)$$

где

$$\begin{pmatrix} f_1(\lambda) \\ f_2(\lambda) \end{pmatrix} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(0, y) \begin{pmatrix} \sin \lambda y \\ \cos \lambda y \end{pmatrix} dy, \quad (7)$$

при этом $f(0, y) \rightarrow 0$ при $|y| \rightarrow \infty$. Данное ограничение сужает класс особых точек функции $f(x, y)$, в частности фундаментальное решение (1) не удовлетворяет условию (6). В доказанной ниже теореме класс функций $f(x, y)$ существенно расширен.

Из разложения (6) следует, что функция $f(x, y)$ в полуплоскости $x > 0$ (где она удовлетворяет уравнению Лапласа) имеет вид

$$f(x, y) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} g(y, \lambda) d\lambda, \quad x > 0. \quad (8)$$

Здесь учитываем, что функция $f(x, y)$ при $x > 0$ является ограниченным решением задачи Дирихле в полуплоскости вида: $\Delta u = 0, x > 0, u|_{x=0} = f(0, y)$, полученным методом Фурье.

Представим решение исходной задачи (2)–(5) также в виде разложений Фурье:

$$u_1(x, y) = f(x, y) + \int_0^{\infty} b_1 e^{\lambda x} g d\lambda, \quad x < 0, \quad (9)$$

$$u_0(x, y) = \int_0^{\infty} [a_0 \operatorname{sh} \lambda(x-l) + b_0 \operatorname{ch} \lambda(x-l)] g d\lambda, \quad 0 < x < l, \quad (10)$$

$$u_2(x, y) = \int_0^{\infty} b_2 e^{-\lambda(x-l)} g d\lambda, \quad x > l, \quad (11)$$

где функция $g(y, \lambda)$ имеет вид (6), $a_0(\lambda), b_i(\lambda)$ – искомые функции. При этом функции u_i удовлетворяют соответствующему уравнению (2) и условию (5) (в предположении сходимости и дифференцируемости интегралов (9)–(11)). Приравнивая в условиях сопряжения (3), (4) коэффициенты при функции $g(y, \lambda)$ под знаками интегралов (9)–(11), для функций $a_0(\lambda), b_i(\lambda)$ с учётом разложения (8) получим систему алгебраических уравнений: $1 + b_1 = -a_0 s + b_0 c, -k_1(1 - b_1) = k_0(a_0 c - b_0 s), b_0 = b_2, k_0 a_0 = -k_2 b_2$, решение которой имеет вид

$$b_1 = -1 + \frac{2k_1(k_2 s + k_0 c)}{p} = 1 - \frac{2k_0(k_0 s + k_2 c)}{p}, \quad (12)$$

$$a_0 = -\frac{2k_1k_2}{p}, \quad b_2 = b_0 = \frac{2k_1k_0}{p}, \quad (13)$$

где $p = s(k_1k_2 + k_0^2) + ck_0(k_1 + k_2)$, $s = \text{sh } \lambda l$, $c = \text{ch } \lambda l$. При этом $p \geq k_0(k_1 + k_2) > 0$ при $0 \leq \lambda < \infty$, т. е. в интегралах (9)–(11) $\lambda = 0$ не является особой точкой. При $\lambda \rightarrow \infty$ имеем $p = O(e^{\lambda l})$; $b_1 = O(1)$; $a_0, b_0, b_2 = O(e^{-\lambda l})$. Отсюда коэффициенты при функции $g(y, \lambda)$ под знаками интегралов (9)–(11) имеют асимптотику $O(e^{-\lambda x})$, где $x > 0$, при этом функция g (6) так же стремится к нулю при $\lambda \rightarrow \infty$, т. к. $f_i \rightarrow 0$ (7). Отсюда интегралы (9)–(11) сходятся и допускают дифференцирование дважды по x, y .

Таким образом, полученные формулы (9)–(11) выражают решение задачи на кусочно-однородной плоскости через решение $f(x, y)$ аналогичной задачи на однородной плоскости для класса функций $f(x, y)$, разлагающихся при $x = 0$ в интеграл Фурье.

3. Сильнопроницаемая плёнка. Пусть средний слой $D_0(0 < x < l)$ толщины l и проницаемости k_0 вырождается в сильнопроницаемую плёнку с параметром A [1], т. е.

$$l \rightarrow 0, \quad k_0 \rightarrow \infty, \quad k_0 l \rightarrow A. \quad (14)$$

Отсюда, подставляя выражение для $a_0(\lambda), b_i(\lambda)$ из (12), (13) в (9)–(11) (для $b_1(\lambda)$ используем первое равенство (12)), с учётом разложения (8) получим решение задачи на кусочно-однородной плоскости, состоящей из двух зон $D_1(x < 0), D_2(x > 0)$, разделённых сильно проницаемой плёнкой $x = 0$, в виде

$$u_1(x, y) = f(x, y) - f(-x, y) + \frac{2k_1}{A} \int_0^\infty \frac{e^{\lambda x} g(y, \lambda)}{\lambda + \gamma} d\lambda, \quad x < 0, \quad (15)$$

$$u_2(x, y) = \frac{2k_1}{A} \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda x} g(y, \lambda)}{\lambda + \gamma} d\lambda, \quad x > 0, \quad \gamma = \frac{k_1 + k_2}{A}, \quad (16)$$

где $g(y, \lambda) = f_1(\lambda) \sin \lambda y + f_2(\lambda) \cos \lambda y$ (6).

По формулам (10), (13) можно найти различные параметры течения в самой плёнке. Так, переходя в формуле (13) к пределу (14), получим потенциал $u_0(y)$ и поток $Q(y)$ в поперечном сечении плёнки:

$$u_0(y) = \frac{2k_1}{A} \int_0^\infty \frac{f_1 \sin \lambda y + f_2 \cos \lambda y}{\lambda + \gamma} d\lambda, \quad (17)$$

$$Q(y) = \lim_{k_0 \rightarrow \infty, l \rightarrow 0} k_0 \int_0^l \partial_y u_0(x, y) dx = 2k_1 \int_0^\infty \frac{\lambda(f_1 \cos \lambda y - f_2 \sin \lambda y)}{\lambda + \gamma} d\lambda. \quad (18)$$

К недостаткам полученных формул (15), (16) относится достаточно узкий класс заданных особых точек гармонической функции $f(x, y)$ в смысле её поведения в бесконечности. Кроме того, решение, полученное в виде разложений Фурье (15), (16), имеет достаточно

сложный вид, т. к. содержит двукратные квадратуры (внешние и внутренние в коэффициентах Фурье $f_i(\lambda)$ (7)) от сильно осциллирующих на бесконечности тригонометрических функций.

Для устранения этих недостатков упростим формулы (15), (16) с помощью метода свертывания разложений Фурье [1]–[3]. Заменяя в разложении функции $f(x, y)$ (8) переменную x на $x + z$, умножая полученное равенство на $e^{-\gamma z}$ и интегрируя по $z \in (0, \infty)$, получим формулу

$$\int_0^{\infty} e^{-\gamma z} f(x + z, y) dz = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda x} g(y, \lambda)}{\lambda + \gamma} d\lambda, \quad x > 0, \quad \gamma > 0, \quad (19)$$

где функция $g(y, \lambda)$ имеет вид (6). Отсюда функции $u_{1,2}(x, y)$ (15), (16) непосредственно выражаются через гармоническую функцию $f(x, y)$ в однократных квадратурах без разложений Фурье:

$$u_1(x, y) = f(x, y) - f(-x, y) + \frac{2k_1}{A} \int_0^{\infty} e^{-\gamma z} f(-x + z, y) dz, \quad x < 0, \quad (20)$$

$$u_2(x, y) = \frac{2k_1}{A} \int_0^{\infty} e^{-\gamma z} f(x + z, y) dz, \quad x > 0, \quad (21)$$

где $\gamma > 0$ имеет вид (16). Аналогично с учётом формулы (19) потенциал (17) и поток (18) в плёнке приводятся соответственно к виду

$$u_0(y) = \frac{2k_1}{A} \int_0^{\infty} e^{-\gamma z} f(z, y) dz, \quad Q(y) = 2k_1 \int_0^{\infty} e^{-\gamma z} \partial_y f(z, y) dz.$$

Обобщённые условия сопряжения на сильно проницаемой плёнке $x = 0$ имеют вид [1]–[3]:

$$x = 0: \quad u_2 = u_1, \quad k_2 \partial_x u_2 - k_1 \partial_x u_1 = A \partial_x^2 u_1. \quad (22)$$

В работе [5, с. 106] условия сопряжения (22) на сильнопроницаемой трещине выведены для фильтрационных процессов при дополнительной рабочей гипотезе о постоянстве давления в поперечном сечении трещины.

Рассмотрим задачу (2), (5), (22), где в условии (2) $i = 1, 2$; $D_1(x < 0)$, $D_2(x > 0)$.

Теорема. Если гармоническая функция $f(x, y)$ на плоскости (x, y) имеет особые точки при $x < 0$ и удовлетворяет вместе с производными до второго порядка условию

$$|f(x, y)| = O(e^{\alpha x}), \quad x \rightarrow +\infty, \quad 0 < \alpha < \gamma, \quad (23)$$

($\gamma > 0$ (16)), то решение задачи (2), (5), (22) строится по формулам (20), (21). То есть полученные функции (20), (21) удовлетворяют известным обобщённым условиям сопряжения (22).

Доказательство. При выполнении условия (23) интегралы (20), (21) сходятся и допускают дифференцирование дважды по x и y . Функции (20), (21) тождественно удовлетворяют условиям сопряжения (22), что проверяется непосредственно интегрированием по частям. Аргументы функции $f(x, y)$ в формулах (20), (21), кроме первого слагаемого в формуле (20), принадлежат области $D_2(x > 0)$, где функция $f(x, y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа. При этом, если функция $f(x, y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа при $x > 0$, то функция $f(-x, y)$ удовлетворяет этому уравнению при $x < 0$. Отсюда условия задачи (2), (5) для функций (20), (21) проверяются непосредственно. Теорема доказана.

Из условия (23) следует, что гармоническая функция $f(x, y)$ может иметь произвольные особые точки в любой конечной части полуплоскости $x < 0$ и в бесконечности может иметь рост не выше показательной функции (не выше существенно особой точки), т. е. условие (23) выполняется для широкого класса гармонических функций $f(x, y)$, имеющих практический интерес. В частности для фундаментального решения (1) условие (23) выполняется. Кроме того, формулы (20), (21) проще формул (15), (16), полученных методом Фурье, т. к. содержат однократные квадратуры, тогда как формулы (15), (16) содержат двукратные квадратуры.

В предельном случае при $A \rightarrow \infty$ ($\gamma \rightarrow 0$ (16)) имеем сильно пронизываемую плёнку $x = 0$ большого раскрытия, при этом из формул (20), (21) получаем $u_1 \rightarrow f(x, y) - f(-x, y)$, $u_2 \rightarrow 0$, т. е. плёнка $x = 0$ вырождается в абсолютно пронизываемую границу области D_1 , на которой выполняется граничное условие $u_1|_{x=0} = 0$.

В случае $A \rightarrow 0$ ($\gamma \rightarrow \infty$) плёнка исчезает и функции (20), (21) посредством интегрирования по частям приводятся к виду потенциалов без плёнки в кусочно-однородной среде (идеальный контакт зон D_i):

$$u_1(x, y) = f(x, y) + \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} f(-x, y), \quad u_2(x, y) = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} f(x, y).$$

Если гармоническая функция $f(x, y)$ имеет особые точки при $x > 0$, то решение задачи строится аналогично, а в общем случае при произвольном расположении особых точек решение строится в виде суммы решений указанных задач.

4. Слабопроницаемая плёнка. Пусть в задаче (2)–(5) средний слой $D_0(0 < x < l)$ толщины l и проницаемости k_0 вырождается в слабопроницаемую плёнку с параметром B [2], т. е. $l \rightarrow 0$, $k_0 \rightarrow 0$, $l/k_0 \rightarrow B$. Отсюда, переходя в равенствах (9)–(13) к указанному пределу (для $b_1(\lambda)$ используем второе равенство (12)), с учётом разложения (8) и формулы (19) выразим функции $u_i(x, y)$ непосредственно через гармоническую функцию $f(x, y)$ без разложений Фурье в виде

$$u_1(x, y) = f(x, y) + f(-x, y) - \frac{2}{Bk_1} \int_0^\infty e^{-\gamma z} f(-x + z, y) dz, \quad x < 0, \quad (24)$$

$$u_2(x, y) = \frac{2}{Bk_2} \int_0^\infty e^{-\gamma z} f(x + z, y) dz, \quad x > 0, \quad (25)$$

где $\gamma = (k_1 + k_2)/(Bk_1k_2)$.

Обобщённые условия сопряжения на слабопроницаемой плёнке имеют вид [3]:

$$x = 0 : \quad u_2 - u_1 = Bk_1 \partial_x u_1, \quad k_2 \partial_x u_2 = k_1 \partial_x u_1. \quad (26)$$

Непосредственно устанавливается, что функции (24), (25) в зонах $D_1(x < 0)$, $D_2(x > 0)$ являются решением задачи (2), (5), (26), при этом имеет место теорема, аналогичная предыдущей теореме.

В предельном случае при $B \rightarrow \infty$ ($\gamma \rightarrow 0$ (25)) из формул (24), (25) получаем $u_1 \rightarrow f(x, y) + f(-x, y)$, $u_2 \rightarrow 0$, т. е. плёнка $x = 0$ вырождается в абсолютно непроницаемую границу области D_1 , на которой выполняется граничное условие $\partial_x u_1|_{x=0} = 0$. В случае $B \rightarrow 0$ плёнка $x = 0$ исчезает (идеальный контакт зон D_i).

5. Решение краевых задач с плёнками. Правые части формул (20), (21), (24), (25) являются операторами, действующими на функцию $f(x, y)$ по одной переменной x (y – свободная переменная). Отсюда задачи (2), (5), (22) и (2), (5), (26) по переменной y можно подчинить дополнительным граничным условиям при сохранении формул (20), (21) и (24), (25).

Пусть известна гармоническая функция $f(x, y)$, имеющая заданные особые точки в полуплоскости $D(x \in R, y < 0)$ при $x < 0$ и удовлетворяющая однородному при $x > 0$ граничному условию Дирихле вида

$$f|_{y=0} = \begin{cases} h_1(x), & x < 0, \\ 0 & x > 0. \end{cases} \quad (27)$$

Тогда решение аналогичной задачи в полуплоскости $D(x \in R, y < 0)$ с дополнительной сильно проницаемой плёнкой $x = 0$ вида (2), (5), (22),

$$u_1|_{y=0, x < 0} = h_1(x), \quad u_2|_{y=0, x > 0} = 0 \quad (28)$$

строится по общим формулам (20), (21), что проверяется непосредственно. Здесь $u_{1,2}(x, y)$ – потенциалы в полуплоскости $D(x \in R, y < 0)$ соответственно при $x < 0$ и $x > 0$, уравнение Лапласа (2) для функции $u_1(x, y)$ выполняется вне особых точек функции $f(x, y)$. В случае слабопроницаемой плёнки $x = 0$ решение задачи (2), (5), (26), (28) строится по формулам (24), (25).

Аналогично пусть известна гармоническая функция $f(x, y)$, имеющая заданные особые точки в полосе $D(x \in R, 0 < y < r)$ при $x < 0$ и удовлетворяющая граничным условиям, однородным при $x > 0$, вида (27),

$$f|_{y=r} = \begin{cases} h_2(x), & x < 0, \\ 0 & x > 0. \end{cases}$$

Тогда решение аналогичной задачи в полосе D с сильно проницаемой плёнкой $x = 0$ вида (2), (5), (22), (28),

$$u_1|_{y=r, x < 0} = h_2(x), \quad u_2|_{y=r, x > 0} = 0 \quad (29)$$

строится по формулам (20), (21), где $u_{1,2}(x, y)$ – потенциалы в полосе $D(x \in R, 0 < y < r)$ соответственно при $x < 0$, $x > 0$. В случае слабопроницаемой плёнки $x = 0$ решение задачи (2), (5), (26), (28), (29) строится по общим формулам (24), (25).

Таким образом, операторы (20), (21), (24), (25) отображают множество решений $f(x, y)$ рассмотренных классических задач без плёнки на множество решений аналогичных задач с плёнкой при сохранении области D , уравнения и граничных условий.

Список литературы

1. Kholodovskii S. E. A Method of Convolution of Fourier Expansions as Applied to Solving Boundary Value Problems with Intersecting Interface Lines // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2007. Vol. 47. No. 9. P. 1489–1495.
2. Kholodovskii S. E. The Convolution Method of Fourier Expansions. The Case of Generalized Transmission Conditions of Crack (Screen) Type in Piecewise Inhomogeneous Media // Differential Equations. 2009. Vol. 45. No. 6. P. 873–877.
3. Холодовский С. Е. Метод свёртывания разложений Фурье. Случай трещины (завесы) в неоднородном пространстве // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 8. С. 1204–1208.
4. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твёрдых тел. М.: Наука, 1964. 487 с.
5. Пилатовский В. П. Основы гидромеханики тонкого пласта. М.: Недра, 1966. 317 с.
6. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3. М.: Наука, 1962. 656 с.
7. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 680 с.

References

1. Kholodovskii S. E. A Method of Convolution of Fourier Expansions as Applied to Solving Boundary Value Problems with Intersecting Interface Lines // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2007. Vol. 47. No. 9. P. 1489–1495.
2. Kholodovskii S. E. The Convolution Method of Fourier Expansions. The Case of Generalized Transmission Conditions of Crack (Screen) Type in Piecewise Inhomogeneous Media // Differential Equations. 2009. Vol. 45. No. 6. P. 873–877.
3. Kholodovskii S. E. Metod svertyvaniya razlozhenii Fur'e. Sluchai treshchiny (zavesy) v neodnorodnom prostranstve // Differentsial'nye uravneniya. 2009. T. 45. № 8. S. 1204–1208.
4. Karlsru G., Eger D. Teploprovodnost' tverdykh tel. M.: Nauka, 1964. 487 s.
5. Pilatovskii V. P. Osnovy gidromekhaniki tonkogo plasta. M.: Nedra, 1966. 317 s.
6. Fikhtengol'ts G. M. Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya. T. 3. M.: Nauka, 1962. 656 s.
7. Polubarinova-Kochina P. Ya. Teoriya dvizheniya gruntovykh vod. M.: Nauka, 1977. 680 s.

Статья поступила в редакцию 13.04.2015

ПОЛЕМИКА. ЛЮДИ. СОБЫТИЯ

POLEMIC. PEOPLE. EVENTS

УДК 53
ББК 22.3г

*Лидия Александровна Бордонская,
доктор педагогических наук, профессор,
Забайкальский государственный университет,
672039, г. Чита, ул. Александро-Заводская, 30,
e-mail: gsbord@chitaonline.ru*

*Светлана Станиславовна Серебрякова,
кандидат педагогических наук, доцент,
Забайкальский государственный университет,
672039, г. Чита, ул. Александро-Заводская, 30,
e-mail: ssszspu@rambler.ru*

К 150-летию создания Джеймсом Клерком Максвеллом теории электромагнитного поля

*Lydia Aleksandrovna Bordonskaya,
Doctor of Pedagogy, Professor,
Transbaikal State University,
30, Aleksandro-Zavodskaya St., Chita, Russia, 672039,
e-mail: gsbord@chitaonline.ru*

*Svetlana Stanislavovna Serebryakova,
Candidate of Pedagogy, Associate Professor,
Transbaikal State University,
30, Aleksandro-Zavodskaya Str., Chita, Russia, 672039,
e-mail: ssszspu@rambler.ru*

On the 150th Anniversary of James Clerk Maxwell's Theory of Electromagnetic Field

«В истории человечества (если посмотреть на нее, скажем, через десять тысяч лет) самым значительным событием XIX столетия несомненно будет открытие Максвеллом законов электродинамики. На фоне этого важного научного открытия гражданская война в Америке в том же десятилетии будет выглядеть мелким провинциальным происшествием» [11, с. 27].

2015 год по инициативе Генеральной Ассамблеи ООН объявлен Международным годом света и световых технологий, поскольку 2015 год является юбилейным для ряда важных вех в истории о свете. Одним из таких событий является создание в 1865 году (150 лет назад) Джеймсом Клерком Максвеллом электромагнитной теории распространения света.

Введение понятия поля как физической реальности было кардинальным шагом в развитии физики. Дж. Кл. Максвелл сумел объединить и единым образом — системой уравнений — описать бывшие до этого разрозненными электрические и магнитные явления, объединить электромагнитные и световые явления (Схема 1).



Схема 1. Теория электромагнитного поля

Создание теории электромагнитного поля было обеспечено бурным развитием электродинамики. По образному выражению И.Я. Дорфмана [3], в начале XIX с изобретения источника постоянного тока А. Вольта (1799) пошла «цепная реакция открытий»: 1820 г. — открытия Х. К. Эрстеда, А. М. Ампера, Ж. Б. Био и Ф. Савара. 1821 г. — открытие термоэлектричества (Т. И. Зеебек). 1826 г. — установление Г. Омом законов постоянного тока. 1831 г. — открытие явления электромагнитной индукции (М. Фарадей). 1832 г. — открытие явления самоиндукции (М. Фарадей, Д. Генри). 1834 г. — определение направления индукционных токов (Э. Х. Ленц) и т. д.

К моменту начала исследований Дж. Кл. Максвелла (к середине XIX века) физика электрических и магнитных явлений достигла «определенного завершения». С одной стороны, теоретические представления развились в стройную концепцию, основанную на принципе дальнего действия. С другой стороны, была ещё концепция силовых линий поля М. Фарадея (1791–1867), основанная на принципе ближнего действия. Дж. Кл. Максвелл в силовых линиях Фарадея увидел новый физический объект — поле.

Теория электромагнитного поля Дж. Кл. Максвелла отражена в основном в трёх его главных статьях. Эти статьи, по мнению исследователей творчества Максвелла [9, 12 и др.], обнаруживают постепенное развитие мыслей великого учёного об единстве электромагнитных и оптических явлений.

Первым шагом в решении поставленных задач была работа *«О фарадеевых силовых линиях» (1855–1856)*, которая представляет собой математическое обобщение исследований и идей М. Фарадея. Следует отметить, что Дж. Кл. Максвелл при выводе своих уравнений воспользовался гидродинамической аналогией: он пытается найти единые уравнения, моделирующие электродинамические величины движением несжимаемой жидкости [12]. В данной работе Дж. Кл. Максвелл впервые записывает в координатной форме уравнения поля, но только для случая электростатики и магнетизма, т. е. без тока смещения. Ток смещения — это следующий шаг учёного.

Вторая работа Дж. Кл. Максвелла *«О физических силовых линиях» (1861–1862)* — центральная в создании теории электромагнитного поля. В ней вводится понятие тока смещения как тока, обусловленного поляризацией молекул среды под действием электрического поля, представляется система уравнений для электромагнитного поля, рассматривается вопрос взаимосвязи между оптическими и электромагнитными явлениями.

Введение тока смещения было важнейшим достижением теории электромагнитного поля Максвелла и «теоретическим открытием первостепенной важности». Максвелл записывает выражение для плотности тока смещения (зависимость его величины от скорости изменения электрического поля); получает выражение для магнитного поля полного тока — зависимость величины магнитного поля от плотности тока проводимости (скорости движения зарядов) и плотности тока смещения (скорости изменения электрического поля), что оказывается совместимым с уравнением непрерывности.

Касаясь вопроса связи между оптическими и электромагнитными явлениями, Максвелл определённо не утверждает, что распространяющиеся электромагнитные возмущения и есть свет. Он ограничивается только выводом, что в описанной им среде могут распространяться поперечные волны и скорость их распространения равна скорости света.

В работе *«Динамическая теория электромагнитного поля» (1865)* Дж. Кл. Максвелл освобождает математические результаты от «механических деталей» и выводит теорию из уравнений без каких-либо ссылок на модель.

В ней заложены основы теории электромагнитного поля, дано понятие «электромагнитное поле». «Электромагнитное поле — это та часть пространства, которая содержит в себе и окружает тела, находящиеся в электрическом или магнитном состоянии» [10, с. 253].

Идея тока смещения — центральная идея теории электромагнитного поля Максвелла. С использованием понятия тока смещения Дж. Кл. Максвелл даёт полную систему уравнений — знаменитую электродинамическую систему уравнений, в которой нашло отражение всё то, что было тогда известно из теории электромагнетизма.

Заключительная часть работы посвящена электромагнитной теории света. Анализ уравнений позволил Максвеллу установить, что должны существовать импульсы или волны, которые свободно распространяются в пространстве. Комбинируя уравнения электромагнитного поля, Максвелл получает волновое уравнение для вектора магнитной индукции, а из него следует существование электромагнитных волн, распространяющихся в простран-

стве с некоторой скоростью. Электродинамика практически была построена. Окончательно она была оформлена в знаменитом двухтомном «Трактате об электричестве и магнетизме».



Схема 2. Утверждение, дальнейшее развитие и распространение теории Максвелла

«Трактат об электричестве и магнетизме» (1873) – это фундаментальная работа, в которой Дж. Кл. Максвелл подводит итог исследованиям по электричеству и магнетизму, излагает теорию электрических и магнитных явлений на основе представлений об электромагнитном поле и делает ряд существенных добавлений. Подробно в «Трактате» Максвелл излагает вопросы электромагнитной теории света. Он показывает, что электрические и магнитные волны должны быть поляризованы во взаимно перпендикулярных плоскостях, а свет должен оказывать давление. Получая и исследуя далее волновое уравнение, учёный вновь приходит к выводу, что скорость света определяется электрической и магнитной постоянными среды.

Новым интересным вопросом, исследованным Дж. Кл. Максвеллом, был вопрос о давлении света. Рассматривая процесс распространения электромагнитных волн в веществе, он показывает, что волны должны оказывать на вещество давление и указывает на возможность проверки этого теоретического вывода на эксперименте. Учёный подсчитывает и величину этого давления.

Теория электромагнитного поля прошла сложный путь утверждения, дальнейшего развития и распространения, связанный с именами экспериментаторов и теоретиков разных

стран, с новыми открытиями в области физики, с широким спектром практических приложений (Схема 2).

Успехи теории электромагнитного поля в единообразном объяснении известных явлений и в предсказании новых идей привели к тому, что электродинамика к концу XIX века стала ведущей отраслью физического знания и возникли новые представления о мире с точки зрения физической науки, новая картина мира — электромагнитная картина мира.

Список литературы

1. Гернек Ф. Джеймс Клерк Максвелл. Новое учение об электромагнетизме и свете // Гернек Ф. Пионеры атомного века. М.: Прогресс, 1974. С. 37–53.
2. Джеймс Клерк Максвелл. Статьи и речи. М.: Наука, 1968. 422 с.
3. Дорфман Я. Г. Всемирная история физики (с начала XIX до середины XX вв.). М.: Наука, 1979. 317 с.
4. Дуков В.М. Электродинамика (история и методология макроскопической электродинамики). М.: Высшая школа, 1975. 248 с.
5. Зельдович Я. Б., Хлопов М.Ю. Пути электромагнитной теории // Квант. 1988. № 2. С. 2–8.
6. Карцев В. П. Приключения великих уравнений. М.: Знание, 1970. 320 с.
7. Карцев В. П. Максвелл. М.: Молодая гвардия, 1974. 336 с.
8. Кирсанов В. С. Достояние всего мира. К 150-летию со дня рождения Дж. К. Максвелла // Природа. 1981. № 6. С. 84–93.
9. Левин М. Л., Миллер М.А. Максвелловский «Трактат об электричестве и магнетизме» // Успехи физических наук. 1981. Т.135. В.3. С. 425–440.
10. Максвелл Дж. К. Избранные сочинения по теории электромагнитного поля / пер. З. А. Цейтлина; под ред. П.С. Кудрявцева. М.: Гостехиздат, 1952. 688 с.
11. Фейнман Р. Лейтон Р. Сэндз М. Фейнмановские лекции по физике. Т. 5. М: Мир, 1966. 296 с.
12. Шапиро И. С. К истории открытия уравнений Максвелла // Успехи физических наук. 1972. Т. 108. Вып.2. С. 319–333.
13. Эйнштейн А. Влияние Максвелла на развитие представлений о физической реальности // Джеймс Клерк Максвелл. Статьи и речи. М.: Наука, 1968. С. 243–247.

References

1. Gernek F. Dzheims Klerk Maksvell. Novoe uchenie ob elektromagnetizme i svete // Gernek F. Pionery atomnogo veka. M.: Progress, 1974. S. 37–53.
2. Dzheims Klerk Maksvell. Stat'i i rechi. M.: Nauka, 1968. 422 s.
3. Dorfman Ya. G. Vsemirnaya istoriya fiziki (s nachala XIX do serediny XX vv.). M.: Nauka, 1979. 317 s.
4. Dukov V.M. Elektrodinamika (istoriya i metodologiya makroskopicheskoi elektrodinamiki). M.: Vysshaya shkola, 1975. 248 s.
5. Zel'dovich Ya. B., Khlopov M. Yu. Puti elektromagnitnoi teorii // Kvant. 1988. № 2. S. 2–8.

6. Kartsev V. P. Priklyucheniya velikikh uravnenii. M.: Znanie, 1970. 320 s.
7. Kartsev V. P. Maksvell. M.: Molodaya gvardiya, 1974. 336 s.
8. Kirsanov V. S. Dostoyanie vsego mira. K 150-letiyu so dnya rozhdeniya Dzh. K. Maksvella // Priroda. 1981. № 6. S. 84–93.
9. Levin M. L., Miller M.A. Maksvellovskii «Traktat ob elektrichestve i magnetizme» // Uspekhi fizicheskikh nauk. 1981. T.135. V.3. S. 425–440.
10. Maksvell Dzh. K. Izbrannye sochineniya po teorii elektromagnitnogo polya / per. Z. A. Tseitlina; pod red. P.S. Kudryavtseva. M.: Gostekhizdat, 1952. 688 s.
11. Feinman R. Leiton R. Sendz M. Feinmanovskie lektsii po fizike. T. 5. M: Mir, 1966. 296 s.
12. Shapiro I. S. K istorii otkrytiya uravnenii Maksvella // Uspekhi fizicheskikh nauk. 1972. T. 108. Vyp.2. S. 319–333.
13. Einshtein A. Vliyanie Maksvella na razvitie predstavlenii o fizicheskoi real'nosti // Dzheims Klerk Maksvell. Stat'i i rechi. M.: Nauka, 1968. S. 243–247.

Статья поступила в редакцию 18.05.2015

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

RULES FOR AUTHORS

Редакция принимает **не опубликованные** ранее материалы объемом до 1 п. л. (40 000 знаков с пробелами), выполненные в жанрах:

Жанр	Минимальный объём
статья <i>теоретического и эмпирического характера, содержащая основные научные результаты, полученные автором</i>	0,5 п. л. (20 000 знаков)
научные доклады	0,3 п. л. (12 000 знаков)
научные обзоры рецензии	0,2 п. л. (8 000 знаков)

В редакцию НЕОБХОДИМО ПРЕДСТАВИТЬ:

1. Печатный и электронный вариант статьи на CD и других носителях. В имени файла и на электронном носителе указывается фамилия автора и название статьи. Печатный вариант статьи обязателен (белая бумага, формат А 4). Распечатка рукописи должна быть полностью идентична электронному варианту.
2. Договор на оказание услуг – в 2 экземплярах.
3. Рецензия на статью – внешний отзыв, заверенный печатью.
4. Отзыв научного руководителя с указанием новизны и достоверности исследования, *если автор статьи – аспирант, соискатель учёной степени кандидата наук.*
5. Личная карточка автора – сведения об авторе /авторах.

СТРУКТУРА СТАТЬИ, ПРЕДСТАВЛЯЕМОЙ В РЕДКОЛЛЕГИЮ ЖУРНАЛА

Отрасль науки (рубрика журнала)

Код: УДК и ББК

Инициалы, фамилия автора приводятся на русском и английском языках. Количество соавторов в статье может быть не более 4.

Город

Страна

Название статьи приводится на русском и английском языках строчными буквами (не заглавными).

Аннотация (объём 150 слов) – на русском и английском языках. Текст аннотации должен включать основные результаты статьи. Аннотация не должна содержать каких-либо ссылок.

Ключевые слова или словосочетания (5–7) отделяются друг от друга запятой. Приводятся на русском и английском языках.

Основной текст статьи с внутритекстовыми ссылками на цитируемые источники.

Список литературы даётся в алфавитном порядке, со сквозной нумерацией. Если в список входит литература на иностранных языках, она следует за литературой на русском языке.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЬИ

Общие требования: формат А 4, ориентация книжная.

Параметры страницы: верхнее и нижнее – 2; левое и правое – 2,5. Шрифт Times New Roman, кегль 14, интервал полуторный. Отступ первой строки – 1,25. Текст без переносов, выравнивание по ширине.

При использовании дополнительных шрифтов при наборе статьи представить их в редакцию.

Статья должна быть со сквозной нумерацией. *На последней странице указывается, что «статья публикуется впервые», ставится дата и подпись.*

Рабочие языки: русский и английский.

Список литературы оформляется согласно ГОСТу Р. 7.0.5 - 2008. Для каждого источника обязательно указывается изд-во, общее количество страниц или номера страниц интересующего материала источника.

В тексте **ссылки** приводятся в квадратных скобках с указанием порядкового номера и страницы: [1, с. 25]. Несколько источников отделяются друг от друга точкой с запятой [1; 3; 4].

Комментарии и пояснения даются в виде концевых сносок (в конце текста). Маркер сноски – арабская цифра, нумерация сплошная.

Особенности набора слов, цифр, формул, единиц измерения:

Слова на латинице набираются курсивом.

Единицы измерения отбиваются от символов и цифр, к которым они относятся.

Делать чёткое различие О (буквы) и 0 (ноль), 1 (единицу) и I (римскую единицу или букву «и») и т.д. Необходимо различать дефис (-) и тире (–).

Не следует заменять букву «ё» на «е».

Таблицы оформляются в формате Word, должны быть озаглавлены и иметь сквозную нумерацию в пределах статьи, обозначаемую арабскими цифрами (например, таблица 1), в тексте ссылки нужно писать сокращенно (табл. 1). Содержание таблиц не должно дублировать текст. Слова в таблицах должны быть написаны полностью, верно должны быть расставлены переносы. В ячейке таблицы в конце предложения точка не ставится.

Чёрно-белые рисунки (графики, диаграммы – формат Excell, схемы, карты, фотографии) со сквозной нумерацией (арабскими цифрами) и везде обозначаются сокращённо (например: рис. 1). Представляются в формате jpg (разрешение не менее 300 т/д) отдельными файлами с указанием его порядкового номера, фамилии автора/ авторов и названия статьи. Размер рисунка 170 × 240 мм. Все детали рисунка при его уменьшении должны хорошо различаться. Все подрисовочные подписи прилагаются отдельным списком в конце статьи.

Объём рисунков не должен превышать 1/4 объёма статьи.

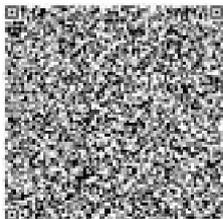
ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ К СТАТЬЯМ ПО НАПРАВЛЕНИЮ «ФИЗИКА, МАТЕМАТИКА, ТЕХНИКА, ТЕХНОЛОГИЯ»

Электронный вариант статьи предоставляется на CD и других носителях или по электронной почте. Предоставляемые файлы должны обладать расширением .tex и .pdf. Издательство использует систему вёрстки miktex для Windows версии не ниже 2.7. Перечень используемых подпакетов в файле-образце.

С сайта необходимо скачать образец оформления статьи (с готовыми настройками).

Материалы, не соответствующие предъявленным требованиям, к рассмотрению не принимаются.

За точность содержания цитат и ссылок в материалах ответственность несут авторы.



Пакет документов, необходимый для опубликования материалов, **отсылается по адресу:** 672007, г. Чита, ул. Бабушкина, 129, Забайкальский государственный университет, для «Объединённой редакционной коллегии научных журналов ЗабГУ».

Редактор Т. Р. Шевчук
Переводчик А. С. Атрошенко
Верстка: Г. А. Зенкова

Формат 60×84 1/8. Бумага офсетная.
Гарнитура «Times». Сдано в печать 15.06.15.
Усл. печ. 18,0.
Усл. изд. л. 12,9.
Тираж 1000 экз.
Заказ № 11415
Забайкальский государственный
университет
672039, г. Чита, ул. Александрo-Заводская, 30

Managing editor T. R. Shevchuk
Translator A. S. Atroshchenko
Make-up: G. A. Zenkova

Format 60×84 1/8. Offset paper
Headset "Times". Signed to print 15.06.15.
Con. quires 18,0.
Con. pub. quires 12,9.
Circulation 1000 copies.
Order #11415 .
Zabaikalsky State University
672039, Chita, 30 Aleksandro-Zavodskaya St.