МАТЕМАТИЧЕСКАЯ БИОЛОГИЯ

MATHEMATICAL BIOLOGY

УДК 517.956
DOI:10.21209/2308-8761-2016-11-4-7-10

Ирина Анатольевна Ефимова,
кандидат физико-математических наук, доцент,
Забайкальский институт предпринимательства
(672086, Россия, г. Чита, ул. Ленинградская, 16),
e-mail: yefimova79@yandex.ru

О процессах тепломассопереноса в биоматериалах, ограниченных наноразмерной двухслойной мембраной[1]

В статье рассмотрена краевая задача для уравнения Лапласа в полуцилиндре с основанием в виде двухслойной пленки (мембраны). Данная задача имеет большой интерес в задачах биологии, т. к. все биологические организмы на своей границе имеют многослойную защитную пленку, через которую происходит обмен веществ. Рассмотренная в статье мембрана состоит из двух сильно- и слабопроницаемых слоев. На мембране задано обобщенное граничное условие. На боковой поверхности полуцилиндра задано условие Дирихле. Решение задачи получено в виде ряда Фурье-Бесселя, который сходится достаточно быстро.

Ключевые слова: нанотехнологии, математическая биология, двухслойные пленки, краевые задачи

Irina A. Efimova,
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor,
Transbaikal Institute of Entrepreneurship
(16 Leningradskaya st., Chita, 672086, Russia),
e-mail: yefimova79@yandex.ru

The Processes of Heat and Mass Transfer in Biomaterials Limited by Nanoscale Two-Layer Membrane[2]

The article considers the boundary value problem for the Laplace equation in a half-cylinder with base in the form of a two-layer film (membrane). This task is of great interest in problems of biology because all biological organisms on their border have a multilayer protective film through which the exchange of substances occurs. The membrane discussed in the article consists of two strongly and weakly permeable layers. On the membrane there is a set to a generalized boundary condition. On the lateral surface of the half-cylinder there is a set to the Dirichlet condition. The solution is obtained in the form of Fourier-Bessel, which converges fast enough.

[1]Работа выполнена в рамках Государственного задания вузу Министерства образования и науки Российской Федерации (проект 2014/255 НИР 2603.14).

[2]The work is performed in terms of the State task to higher education institution by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (project 2014/255 Research work 2603.14).

Keywords: nanotechnology, mathematical biology, two-layer film, boundary value problems

Построение математических моделей процессов тепломассопереноса в природных материалах приводит к краевым задачам математической физики. Биологические материалы не являются однородными и содержат многослойные пленочные включения на границе с внешней средой. Рассмотренные в статье пленочные включения состоят из сильно- и слабопроницаемых прослоек, которые, следуя работам [1–3], моделируем бесконечно тонкими слоями с бесконечно большой и соответственно бесконечно малой проницаемостью.

Рассмотрим в круглом полуцилиндре $D = (0 < r < 1) \times (-\infty < z < 0) \times (0 < \alpha < 2\pi)$ некоторый установившийся процесс тепломассопереноса, характеризующийся потенциалом $u(r, \alpha, z)$ (u – давление, температура, концентрация вещества, напряжение электрического поля и т. д.). Здесь r, α, z – цилиндрические координаты. Пусть основание $z = 0$ полуцилиндра является двухслойной пленкой, состоящей из сильнопроницаемой прослойки $z = -0$ и слабопроницаемой прослойки $z = +0$. На пленке задано обобщенное граничное условие 1-го типа [3]. На боковой поверхности полуцилиндра задано однородное условие Дирихле. Отсюда для потенциала $u(r, \alpha, z)$ задача имеет вид

$$\Delta u \equiv \frac{1}{r}(ru_r)_r + \frac{1}{r^2}u_{\alpha\alpha} + u_{zz} = 0, \qquad u_{|r=1} = 0, \tag{1}$$

$$ABu_{zz} + Bu_z + u_{|z=0} = f(r, \alpha), \tag{2}$$

где $u = O(1)$ в D, $u(r, \alpha+2\pi, z) = u(r, \alpha, z)$, A и B – параметры сильно- и слабопроницаемых прослоек [2], буквенные индексы r, α, z означают частные производные по соответствующим переменным.

Представляя частное решение задачи (1) в виде

$$u(r, \alpha, z) = R(r)\Phi(\alpha)Z(z),$$

с учетом периодичности u по α для функций R, Φ и Z получим задачи

$$\frac{1}{r}(rR')' + \left(\lambda - \frac{n^2}{r^2}\right)R = 0, \qquad R(1) = 0, \tag{3}$$

$$\Phi'' + n^2\Phi = 0, \qquad Z'' - \lambda Z = 0, \tag{4}$$

где $n = 0, 1, 2, \ldots$. Решение задачи (3) имеет вид

$$R(r) = J_n(\mu_{mn}r),$$

где $\mu_{mn} \geq 0$ – корни уравнения $J_n(\mu) = 0$, $m = 1, 2, \ldots$; $J_n(r)$ – функции Бесселя n-го порядка [4, с. 632]. Уравнение (4) для Φ имеет решения $\cos n\alpha$ и $\sin n\alpha$. Ограниченное в D решение уравнения (4) для Z имеет вид

$$Z(z) = e^{\mu_{mn}z}, \qquad -\infty < z < 0.$$

Отсюда задача Штурма-Лиувилля для функции $V = R(r)\Phi(\alpha)$ вида

$$\frac{1}{r}(rV_r)_r + \frac{1}{r^2}V_{\alpha\alpha} + \lambda V = 0, \qquad V_{|r=1} = 0$$

имеет собственные значения $\lambda = \mu_{mn}^2$, которым соответствуют ортогональные собственные функции

$$V_{mn} = J_n(\mu_{mn} r)\cos n\alpha, \qquad \tilde{V}_{mn} = J_n(\mu_{mn} r)\sin n\alpha. \tag{5}$$

Тогда общее решение задачи (1) имеет вид

$$u(r,\alpha,z) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(a_{mn}\cos n\alpha + b_{mn}\sin n\alpha)J_n(\mu_{mn} r)e^{\mu_{mn} z}, \tag{6}$$

где a_{mn}, b_{mn} – коэффициенты, подлежащие определению. Раскладывая граничную функцию $f(r,\alpha)$ (2) в ряд по собственным функциям (5):

$$f(r,\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}[f_{mn}V_{mn}(r,\alpha) + \tilde{f}_{mn}\tilde{V}_{mn}(r,\alpha)], \tag{7}$$

из обобщенного граничного условия на пленке (2) находим

$$a_{mn} = \frac{f_{mn}}{AB\mu_{mn}^2 + B\mu_{mn} + 1}, \qquad b_{mn} = \frac{\tilde{f}_{mn}}{AB\mu_{mn}^2 + B\mu_{mn} + 1}, \tag{8}$$

где

$$f_{mn} = \frac{2}{[J_n'(\mu_{mn})]^2\pi\epsilon_n}\int_0^{2\pi}d\alpha\int_0^1 f(r,\alpha)\cos n\alpha\ J_n(\mu_{mn} r)\,r\,dr, \tag{9}$$

$$\tilde{f}_{mn} = \frac{2}{[J_n'(\mu_{mn})]^2\pi}\int_0^{2\pi}d\alpha\int_0^1 f(r,\alpha)\sin n\alpha\ J_n(\mu_{mn} r)\,r\,dr, \tag{10}$$

$\epsilon_0 = 2$, $\epsilon_k = 1$, $k \neq 0$. При этом в силу неравенств $A > 0$, $B > 0$ имеют место оценки

$$|a_{mn}| < \frac{|f_{mn}|}{\mu_{mn}^2} \to 0, \qquad |b_{mn}| < \frac{|\tilde{f}_{mn}|}{\mu_{mn}^2} \to 0$$

при $\mu_{mn} \to \infty$. Отсюда полученный ряд (6) сходится и допускает дифференцирование необходимое число раз (указанные ряды мажорируются рядом (7) и его соответствующими производными).

Таким образом, решение задачи (1, 2) строится по формулам (6, 8–10).

Список литературы

1. Kholodovskii S. E. A Method of Convolution of Fourier Expansions as Applied to Solving Boundary Value Problems with Intersecting Interface Lines // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2007. Vol. 47, No. 9. P. 1489–1495.

2. Холодовский С. Е. Задачи математической физики в областях с пленочными включениями. Чита: Изд-во ЗабГУ, 2015. 232 с.

3. Холодовский С. Е. О многослойных пленках на границе полупространства // Математические заметки. 2016. Т. 99. Вып. 3. С. 421–427.

4. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 736 с.

References

1. Kholodovskii S. E. A Method of Convolution of Fourier Expansions as Applied to Solving Boundary Value Problems with Intersecting Interface Lines // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2007. Vol. 47, No. 9. P. 1489–1495.

2. Kholodovskii S. E. Zadachi matematicheskoi fiziki v oblastyakh s plenochnymi vklyucheniyami. Chita: Izd-vo ZabGU, 2015. 232 s.

3. Kholodovskii S. E. O mnogosloinykh plenkakh na granitse poluprostranstva // Matematicheskie zametki. 2016. T. 99. Vyp. 3. S. 421–427.

4. Tikhonov A. N., Samarskii A. A. Uravneniya matematicheskoi fiziki. M.: Nauka, 1972. 736 s.

Библиографическое описание статьи

Ефимова И.А. О процессах тепломассопереноса в биоматериалах, ограниченных наноразмерной двухслойной мембраной // Ученые записки Забайкальского государственного университета. Сер. Физика, математика, техника, технология. 2016. Т. 11, № 4. С. 7–10.
DOI:10.21209/2308-8761-2016-11-4-7-10.

Reference to article

Efimova I. A. The Processes of Heat and Mass Transfer in Biomaterials, Limited NanoscaleTwo-Layer Membrane // Scholarly Notes Of Transbaikal State University. Series Physics, Mathematics, Engineering, Technology.2016. Vol. 11, No 4. P. 7–10.
DOI:10.21209/2308-8761-2016-11-4-7-10.

Статья поступила в редакцию 25.04.2016