УДК 517.956
DOI: 10.21209/2308-8761-2018-13-4-11-16

Федор Алексеевич Ковалев,
магистрант,
Забайкальский государственный университет
(672039, Россия, г. Чита, ул. Александро-Заводская, 30),
e-mail: fedor.kovalev.94@mail.ru

Решение задачи Коши об охлаждении кусочно-однородного стержня[1]

Рассмотрена задача Коши для неограниченного стержня, состоящего из двух частей с различными весовыми и тепловыми параметрами. Построено явное решение задачи в однократных квадратурах. Для мгновенного источника тепла решение задачи получено в конечном виде. Построены графики функций температуры с определённым шагом по времени для различных составных стержней.

Ключевые слова: процессы теплопроводности в кусочно-однородном стержне, задача Коши для уравнения теплопроводности с условиями сопряжения

Рассмотрим неограниченный кусочно-однородный стержень, состоящий из двух частей $D_1 = (-\infty < x < 0)$ и $D_2 = (0 < x < \infty)$ с различными постоянными коэффициентами теплопроводности k_i, теплоёмкости c_i и плотности ρ_i в зонах D_i. Боковая поверхность стержня теплоизолирована, т. е. тепло распространяется только вдоль стержня (вдоль оси x). Для тепловых потенциалов $u_i(x,t)$ в D_i задача имеет вид [1, с. 188]

$$\partial_t u_1 = a_1^2\, \partial_{xx} u_1, \qquad u_{1|t=0} = 0, \qquad x < 0, \tag{1}$$

$$\partial_t u_2 = a_2^2\, \partial_{xx} u_2, \qquad u_{2|t=0} = \varphi(x), \qquad x > 0, \tag{2}$$

$$x = 0: \qquad u_1 = u_2, \qquad k_1\, \partial_x u_1 = k_2\, \partial_x u_2, \tag{3}$$

где $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_{xx} = \partial^2/\partial x^2$; $\varphi(x) \in C^2(R^+)$ – заданная функция,

$$a_i^2 = \frac{k_i}{c_i \rho_i}. \tag{4}$$

[1]Работа выполнена в рамках гранта Совета по НиИД Забайкальского государственного университета № 250-ГР.

Условия сопряжения (3) выражают непрерывность потенциала (температуры) и потока тепла в точке разрыва параметров стержня $x = 0$. Здесь условия задачи неоднородны только в зоне $D_2(x < 0)$. При неоднородных условиях в зоне $D_1(x > 0)$ задача решается аналогично, а в общем случае решение задачи имеет вид суммы решений задач с неоднородными условиями в одной из зон.

Для решения задачи (1)–(3) заменим переменную x в зоне $D_1(x < 0)$ на ξ

$$\xi = \frac{a_2}{a_1}\, x, \tag{5}$$

где $-\infty < x < 0$, $-\infty < \xi < 0$. Отсюда для функций $u_1(\xi, t)$ и $u_2(x, t)$ получим задачу с одинаковым уравнением в зонах $D_1(\xi < 0)$ и $D_2(x > 0)$

$$\partial_t u_1 = a_2^2\, \partial_{\xi\xi} u_1, \qquad u_{1|t=0} = 0, \qquad \xi < 0, \tag{6}$$

$$\partial_t u_2 = a_2^2\, \partial_{xx} u_2, \qquad u_{2|t=0} = \varphi(x), \qquad x > 0, \tag{7}$$

$$u_{1|\xi=0} = u_{2|x=0}, \qquad K_1\, \partial_\xi u_{1|\xi=0} = k_2\, \partial_x u_{2|x=0}, \tag{8}$$

где $K_1 = k_1 a_2 / a_1$.

Решение задачи (6)–(8) будем искать в виде решения класса задач сопряжения, рассмотренного в статье [2, с. 31], для частного случая двух кусочно-однородных полуцилиндров с идеальным контактом

$$u_1(\xi, t) = \frac{2}{d+1}\, f(\xi, t), \qquad \xi < 0, \tag{9}$$

$$u_2(x, t) = f(x, t) + \frac{1-d}{1+d}\, f(-x, t), \qquad x > 0, \tag{10}$$

где с учётом (4)

$$d = \frac{K_1}{k_2} = \sqrt{\frac{k_1 c_1 \rho_1}{k_2 c_2 \rho_2}}. \tag{11}$$

При этом функции u_i тождественно удовлетворяют условиям сопряжения (8). Отсюда для функции $f(x, t)$ получим классическую задачу Коши в неограниченном однородном стержне $-\infty < x < \infty$

$$\partial_t f = a_2^2\, \partial_{xx} f, \qquad f_{|t=0} = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \varphi(x), & x > 0. \end{cases} \tag{12}$$

Решение задачи (12) строится по формуле

$$f(x,t) = \int\limits_0^\infty \varphi(z) G(x,z,t) dz,$$

где $G(x,z,t)$ – функция Грина (потенциал мгновенного точечного источника) [1, с. 222].

$$G(x,z,t) = \frac{1}{2a_2\sqrt{\pi t}} \exp\left[-\frac{(x-z)^2}{4a_2^2 t}\right]. \tag{13}$$

Отсюда решение исходной задачи (1)–(3) строится по формулам (5), (9), (10) в однократных квадратурах

$$u_1(x,t) = \frac{1}{(d+1)a_2\sqrt{\pi t}} \int\limits_0^\infty \varphi(z) \exp\left[-\frac{(a_2 x - a_1 z)^2}{4(a_1 a_2)^2 t}\right] dz,$$

$$u_2(x,t) = \frac{1}{2a_2\sqrt{\pi t}} \int\limits_0^\infty \varphi(z) \left\{\exp\left[-\frac{(x-z)^2}{4a_2^2 t}\right] + \frac{1-d}{1+d} \exp\left[-\frac{(x+z)^2}{4a_2^2 t}\right]\right\} dz.$$

Рассмотрим конкретный пример охлаждения кусочно-однородного стержня, когда в начальный момент $t = 0$ в точке $x = x_0$ действовал мгновенный источник тепла. В данном случае решение задачи (1)–(3) строится в конечном виде в элементарных функциях

$$u_1(x,t) = \frac{1}{(d+1)a_2\sqrt{\pi t}} \exp\left[-\frac{(a_2 x - a_1 x_0)^2}{4(a_1 a_2)^2 t}\right], \tag{14}$$

$$u_2(x,t) = \frac{1}{2a_2\sqrt{\pi t}} \left\{\exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{4a_2^2 t}\right] + \frac{1-d}{1+d} \exp\left[-\frac{(x+x_0)^2}{4a_2^2 t}\right]\right\}. \tag{15}$$

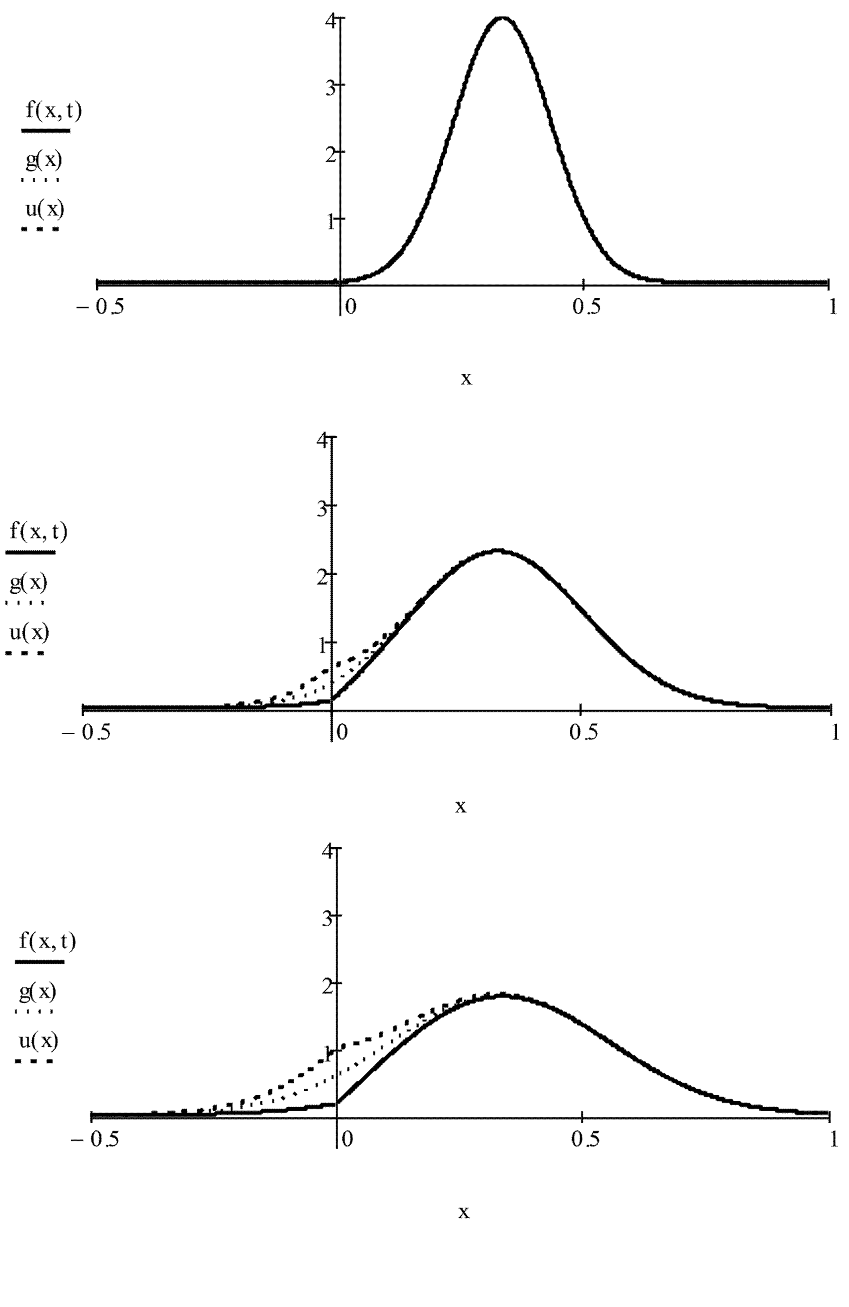
Пусть параметры материала частей стержня D_1 и D_2 удовлетворяют условиям $k_1 = c_1\rho_1$, $k_2 = c_2\rho_2 = 1$. Отсюда с учётом (4), (11) следует: $a_1 = a_2 = 1$, $d = k_1$. При этом потенциалы (14), (15) примут вид

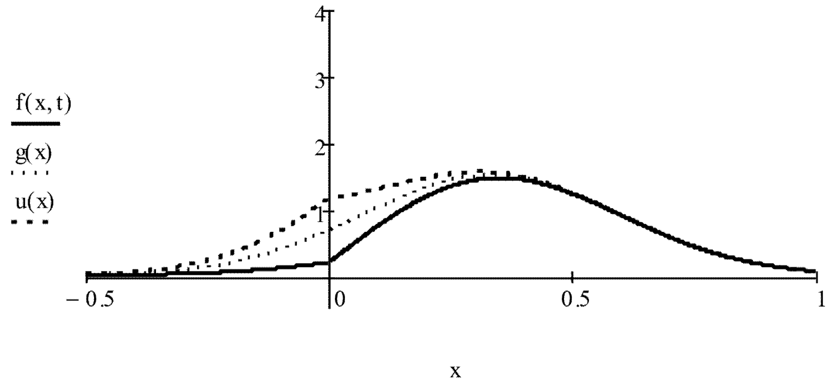
$$u_1(x,t) = \frac{1}{(d+1)\sqrt{\pi t}} \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{4t}\right], \qquad x < 0,$$

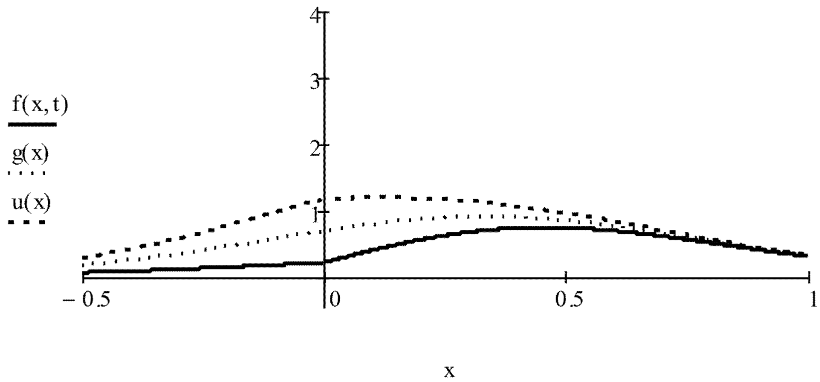
$$u_2(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \left\{\exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{4t}\right] + \frac{1-d}{1+d} \exp\left[-\frac{(x+x_0)^2}{4t}\right]\right\}, \qquad x > 0.$$

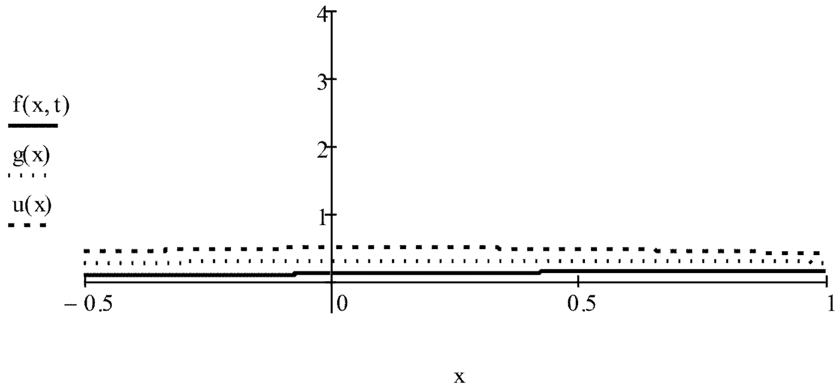
На фигуре приведены графики температур охлаждения трёх стержней в моменты времени t при действии начального мгновенного источника в точке $x_0 = 1/3$. Здесь сплошные линии соответствуют составному стержню с большей проницаемостью в зоне $D_1(x < 0)$ $(d = 6)$, пунктирные линии соответствуют составному стержню с меньшей проницаемостью в зоне D_1 $(d = 1/6)$ и точечные линии соответствуют однородному стержню $(d = 1)$ для потенциала (13). Рассмотрены моменты времени от $t = 1/200$ до $t = 7/200$ с шагом $\Delta t = 1/100$, а также $t = 1/10$ и $t = 1$.

Фигура









Отсюда, в частности, следует, что стержень остывает быстрее при наличии зоны D_1 с большей проницаемостью, что согласуется с физическими представлениями.

Список литературы

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 735 с.

2. Холодовский С. Е. Задачи математической физики в областях с плёночными включениями и плёночными границами. Чита: ЗабГУ, 2017. 234 с.

Статья поступила в редакцию 7.04.2018; принята к публикации 11.05.2018

Библиографическое описание статьи
Ковалев Ф. А. Решение задачи Коши об охлаждении кусочно-однородного стержня // Учёные записки Забайкальского государственного университета. Сер. Физика, математика, техника, технология. 2018. Т. 13, № 4. С. 11–16. DOI: 10.21209/2308-8761-2018-13-4-11-16.

Fedor A. Kovalev,
Master Student,
Transbaikal State University
(30 Aleksandro-Zavodskaya st., Chita, 672039, Russia),
e-mail: fedor.kovalev.94@mail.ru

Solution of a Cauchy Problem for the Cooling of the Piecewise-Homogeneous Rod[1]

A Cauchy problem for an unbounded rod consisting of two parts with different weight and thermal parameters is considered. An explicit solution of the problem in one-time quadratures is constructed. For instant heat source the solution of the problem is obtained in the final form. Temperature function graphs with a certain time step for different composite rods are constructed.

Keywords: heat conduction processes in piecewise homogeneous rod, Cauchy problem for heat conduction equation with conjugation conditions

References

1. Tikhonov A. N., Samarskiy A. A. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M.: Nauka, 1972. 735 s.
2. Kholodovskii S. E. Zadachi matematicheskoy fiziki v oblastyakh s plenochnymi vklyucheniyami i plenochnymi granitsami. Chita: ZabGU, 2017. 234 s.

Received: April 07, 2018; accepted for publication May 11, 2018

Reference to article
Kovalev F. A. Solution of a Cauchy Problem for the Cooling of the Piecewise-Homogeneous Rod // Scholarly Notes of Transbaikal State University. Series Physics, Mathematics, Engineering, Technology. 2018. Vol. 13, No. 4. PP. 11–16. DOI: 10.21209/2308-8761-2018-13-4-11-16.

[1]The work was carried out within the framework of the Grant of the Council of Science and Research of Transbaikal State University No. 250-GR.