УДК 517.956
DOI: 10.21209/2308-8761-2019-14-3-31-40

Святослав Евгеньевич Холодовский,
доктор физико-математических наук, профессор,
Забайкальский государственный университет
(672039, Россия, г. Чита, ул. Александро-Заводская, 30),
e-mail: hol47@yandex.ru
Мария Геннадьевна Хонина,
студентка,
Забайкальский государственный университет
(672039, Россия, г. Чита, ул. Александро-Заводская, 30),
e-mail: mariahonina28@gmail.com

Однослойные плёнки на границе круга для уравнения Пуассона

Рассмотрены краевые задачи для уравнения Пуассона в круге, ограниченном слабо- или сильнопроницаемой плёнкой. Выведены граничные условия на плёнках. Доказаны теоремы существования и единственности. Решения краевых задач получены в квадратурах.

Ключевые слова: краевые задачи, слабопроницаемая плёнка, сильнопроницаемая плёнка, метод свёртывания разложений Фурье

Актуальность краевых задач в областях, ограниченных плёнками, обусловлена развитием нанотехнологий, созданием композитных материалов, миниатюризацией приборов и т. д. В работах [1–3] рассматриваются прямолинейные плёночные включения и плёночные границы. В данной статье рассмотрены кольцевые плёночные границы областей.

1. Вывод граничного условия на кольцевой слабопроницаемой плёнке. Рассмотрим на плоскости с полярными координатами (r, α) круг $D = (r < 1) \times \times (0 < \alpha < 2\pi)$, ограниченный слабопроницаемой плёнкой $r = 1$. Следуя работам [1–3], слабопроницаемую плёнку моделируем бесконечно тонким слоем с бесконечно малой проницаемостью. При этом слабопроницаемая плёнка характеризуется параметром

$$B = \lim_{\Delta r \to 0,\, k_0 \to 0} \frac{\Delta r}{k_0}, \tag{1.1}$$

где Δr – толщина слоя, вырождающегося в плёнку, k_0 – его проницаемость.

Выведем граничное условие для функции $u(r,\alpha)$ на слабопроницаемой плёнке $r = 1$. Для этого предположим, что в окрестности границы $r = 1$ функция $u(r,\alpha)$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$r(ru_r)_r + u_{\alpha\alpha} = 0, \tag{1.2}$$

где буквенные индексы r и α обозначают соответствующие частные производные, например, $u_{0,r} = \partial u_0/\partial r$. С физической точки зрения в данном случае в окрестности границы $r = 1$ имеет место некоторый установившийся процесс тепломассопереноса с потенциалом $u(r,\alpha)$, где $u(r,\alpha)$ – температура, давление, концентрация соответственно в задачах теплопроводности, фильтрации, диффузии [4, с. 30; 5, с. 7]. Заменим плёнку $r = 1$ слоем $D_0 = (1 < r < b) \times (0 < \alpha < 2\pi)$ конечной толщины $\Delta r = b - 1$ и проницаемости k_0 при идеальном контакте слоя D_0 с кругом D и с внешней средой. Отсюда, обозначая потенциал в слое D_0 через $u_0(r,\alpha)$, на общей границе $r = 1$ областей D и D_0 получим классические условия сопряжения, выражающие непрерывность потенциала и нормальной скорости на линии $r = 1$ разрыва проницаемости

$$u_{|r=1} = u_{0|r=1}, \qquad ku_{r|r=1} = k_0 u_{0,r|r=1}, \tag{1.3}$$

где постоянная $k > 0$ – проницаемость круга D. При этом функция $u_0(r,\alpha)$ в слое D_0 также удовлетворяет уравнению Лапласа (1.2)

$$r(ru_{0,r})_r + u_{0,\alpha\alpha} = 0. \tag{1.4}$$

Пусть на внешней границе $r = b$ определены значения потенциала $h(\alpha)$ и нормальной скорости $V(\alpha)$. Тогда, применяя теорему Лагранжа о среднем [6, с. 180], с учётом условий (1.3) приращения потенциала и нормальной скорости на границах слоя D_0 получим в виде

$$h(\alpha) - u_{|r=1} = u_{0|r=b} - u_{0|r=1} = \frac{\Delta r}{k_0} v_{0|r=c_1}, \tag{1.5}$$

$$V(\alpha) - v_{|r=1} = v_{0|r=b} - v_{0|r=1} = k_0 \Delta r\, u_{0,rr|r=c_2}, \tag{1.6}$$

где $v = ku_r$, $v_0 = k_0 u_{0,r}$ – нормальные составляющие скорости к окружности $r = 1$ соответственно в D и в D_0; $c_i \in (1, b)$.

Пусть слой D_0 вырождается в слабопроницаемую плёнку с параметром B, т. е. $\Delta r \to 0$, $k_0 \to 0$, $\Delta r/k_0 \to B$ (1.1). Переходя в равенстве (1.6) к пределу при $\Delta r \to 0$ $(b \to 1)$, $k_0 \to 0$, для средней части этого равенства с учётом второго условия (1.3): $v_{|r=1} = v_{0|r=1}$ в предел получим

$$\lim v_{0|r=b-0} = \lim v_{0|r=1+0} = v_{|r=1-0}. \tag{1.7}$$

Отсюда $\lim v_{0|r=c_1} = v_{|r=1}$ для $\forall c_1 \in (1, b)$. Действительно, дифференцируя уравнение (1.4) по r и умножая полученное равенство на r, для функции $s(r,\alpha) = rv_0/k_0 = ru_{0,r}(r,\alpha)$ получим уравнение Лапласа в D_0:

$$r(rs_r)_r + s_{\alpha\alpha} = 0, \tag{1.8}$$

при этом из (1.7) следует $\lim s_{|r=b-0} = \lim s_{|r=1+0}$ при $b \to 1$, $k_0 \to 0$. Отсюда $\lim s_{|r=c_1} = \lim s_{|r=1+0}$ для $\forall c_1 \in (1, b)$, т.к. иначе график функции $s(r,\alpha)$ имеет бесконечную кривизну, что противоречит ограниченности s_{rr} и $s_{\alpha\alpha}$ в D_0 (1.8).

В результате условия (1.5), (1.6) для слабопроницаемой плёнки $r = 1$ (при $b \to 1$, $k_0 \to 0$) примут вид

$$u + Bku_{r|r=1-0} = h(\alpha), \qquad v_{|r=1-0} = V(\alpha). \tag{1.9}$$

Из полученных условий (1.9) следует, что на слабопроницаемой плёнке нормальная скорость непрерывна, а потенциал терпит разрыв – скачок, равный $h(\alpha) - u = Bku_{r|r=1}$, т.е. чтобы «прорвать» слабопроницаемую плёнку на ней нужно поддерживать определённую разность потенциалов. При этом нормальная скорость потока сквозь плёнку пропорциональна разности потенциалов на плёнке: $Bku_r = \Delta u$ при $r = 1$, где

$$\Delta u = h(\alpha) - u, \tag{1.10}$$

что согласуется с физическими представлениями.

При решении краевых задач обычно на границе области задаются либо значения потенциала $h(\alpha)$, либо значения нормальной скорости $V(\alpha)$.

В учебниках по математической физике рассматриваются граничные условия третьего рода, совпадающие с первым граничным условием (1.9). Граничное условие третьего рода в задачах теплопроводности соответствует условию при теплообмене с внешней средой по закону Ньютона [4, с. 39; 5, с. 179]. Предложенная выше модель граничного условия третьего рода при наличии слабопроницаемой плёнки более физична, т. к. при идеальном контакте области с внешней средой (т.е. без плёнки) в случае граничного условия третьего рода $u + Bku_{r|r=1} = h(\alpha)$ на границе $r = 1$ имеет место бесконечно большая скорость теплового потока, обусловленная скачком потенциала (температуры) в точках границы. А именно, в случае скачка потенциала на границе, т.е. при $\lim\limits_{\Delta r \to 0} \Delta u \neq 0$ (1.10), скорость теплового потока $v = \lim\limits_{\Delta r \to 0} k\Delta u/\Delta r = \infty$. Если же на границе $r = 1$ имеет место слабопроницаемая плёнка, то в силу непрерывности нормальной скорости на слабопроницаемой плёнке ($v = v_0$ при $r = 1$ (1.3)) с учётом (1.1), (1.10) получим конечную скорость в окрестности плёнки:

$$v = v_0 = \lim_{\Delta r \to 0} k_0 \frac{\Delta u}{\Delta r} = \lim_{\Delta r \to 0} \frac{k_0}{\Delta r} \Delta u = \frac{1}{B}[h(\alpha) - u_{|r=1-0}].$$

Отсюда, с частности, следует первое граничное условие (1.9) на плёнке.

Таким образом, граничное условие третьего рода может иметь место лишь при неидеальном контакте области с внешней средой.

В работе [3] дана классификация граничных условий на многослойных плёнках, согласно которой граничные условия на многослойных плёнках бывают первого или второго типов. Для первого типа на внешней стороне плёнки задаются значения искомого потенциала, а для второго типа на внешней стороне плёнки задаются значения нормальной скорости. При этом отмечается, что классическое граничное условие третьего рода является граничным условием первого типа, когда на границе имеет место слабопроницаемая плёнка.

2. Решение задачи для кольцевой слабопроницаемой плёнки. Рассмотрим краевую задачу первого типа (1.9) для уравнения Пуассона в круге $D(r < 1)$, ограниченном слабопроницаемой плёнкой с параметром B:

$$r(ru_r)_r + u_{\alpha\alpha} = H(r, \alpha), \qquad \gamma u + u_{r|r=1} = h(\alpha), \tag{2.1}$$

где

$$\gamma = \frac{1}{Bk} > 0, \tag{2.2}$$

функция $H(r, \alpha) = 0$ в окрестности плёнки $r = 1-0$. Здесь заданные функции $H(r, \alpha)$ и $h(\alpha)$ предполагаются такими, для которых аналогичная классическая задача Дирихле в круге D (без плёнки) относительно функции $F(r, \alpha)$

$$r(rF_r)_r + F_{\alpha\alpha} = H_1(r, \alpha), \qquad F_{|r=1} = h(\alpha) \tag{2.3}$$

корректна, где

$$H_1(r, \alpha) = \gamma H(r, \alpha) + rH_r(r, \alpha). \tag{2.4}$$

Отметим, что решение задачи Дирихле (2.3) строится в квадратурах [4, с. 170]

$$F(r, \alpha) = \frac{1 - r^2}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{h(t)dt}{1 + r^2 - 2r\cos(\alpha - t)} + \int\limits_0^1 d\rho \int\limits_0^{2\pi} G(r, \alpha, \rho, t)H_1(\rho, t)dt, \tag{2.5}$$

где $G(r, \alpha, \rho, t)$ – функция Грина задачи (2.3)

$$G(r, \alpha, \rho, t) = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos(\alpha - t)}{r^2\rho^2 + 1 - 2r\rho\cos(\alpha - t)}.$$

Применяя метод свёртывания разложений Фурье [1; 2], выразим решение задачи

(2.1) через решение $F(r, \alpha)$ (2.5) задачи Дирихле (2.3).

Рассмотрим две вспомогательные задачи в круге $r < 1$ для уравнения Лапласа вида

$$r(rw_r)_r + w_{\alpha\alpha} = 0, \qquad \gamma w + w_{r|r=1} = h(\alpha) \tag{2.6}$$

и

$$r(rU_r)_r + U_{\alpha\alpha} = 0, \qquad U_{|r=1} = h(\alpha). \tag{2.7}$$

Выразим решение задачи (2.6) через решение задачи Дирихле (2.7). Решение задачи Дирихле (2.7) найдём в виде разложения Фурье

$$U(r, \alpha) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n g_n(\alpha), \qquad g_n(\alpha) = a_n \cos n\alpha + b_n \sin n\alpha, \tag{2.8}$$

где a_n, b_n – коэффициенты Фурье разложения граничной функции $h(\alpha)$ [7, с. 384]

$$h(\alpha) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} g_n(\alpha), \tag{2.9}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(\alpha) \cos n\alpha \, d\alpha, \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(\alpha) \sin n\alpha \, d\alpha. \tag{2.10}$$

Решение задачи (2.6) будем искать в виде

$$w(r, \alpha) = \frac{a_0}{2\gamma} + \sum_{n=1}^{\infty} p_n r^n g_n(\alpha), \tag{2.11}$$

где p_n – искомые коэффициенты, γ имеет вид (2.2). Функция $w(r, \alpha)$ (2.11) при $r < 1$ удовлетворяет уравнению Лапласа (2.6) (при условии сходимости и дифференцируемости ряда (2.11)). Из граничного условия (2.6) с учётом (2.9) найдём

$$p_n = \frac{1}{n + \gamma}.$$

Отсюда решение (2.11) задачи (2.6) примет вид

$$w(r, \alpha) = \frac{a_0}{2\gamma} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n g_n(\alpha)}{n + \gamma}, \tag{2.12}$$

где функции $g_n(\alpha)$ определены в (2.8). Найденное решение $w(r, \alpha)$ задачи (2.6) содержит осциллирующие тригонометрические функции (2.8) и интегралы от них (2.10), т. е. имеет достаточно сложный вид. Приведём решение (2.12) к виду, не содержащему осциллирующих функций.

Заменяя в разложении $U(r,\alpha)$ (2.8) переменную $r < 1$ на $e^{-t}r < 1$, где $t > 0$, умножая полученное равенство на $e^{-\gamma t}$ и интегрируя по $t \in (0,\infty)$, получим формулу

$$\int\limits_0^\infty e^{-\gamma t} U(e^{-t}r,\alpha)dt = \frac{a_0}{2\gamma} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n g_n(\alpha)}{n+\gamma}.$$

Отсюда функцию (2.12) приведём к виду без разложений Фурье

$$w(r,\alpha) = \int\limits_0^\infty e^{-\gamma t} U(e^{-t}r,\alpha)dt. \tag{2.13}$$

Функция (2.13) удовлетворяет условиям задачи (2.6), что проверяется непосредственно, при этом учитывается, что если $U(r,\alpha)$ – решение уравнения Лапласа (2.7), то и функция $U(cr,\alpha)$ также является решением этого уравнения, где $c = const$. Для проверки граничного условия (2.6) приведём интегралы в левой части к одному интегралу посредством интегрирования по частям второго слагаемого в (2.6)

$$w_{r|r=1} = \int\limits_0^\infty e^{-\gamma t} U_z(e^{-t},\alpha)e^{-t}dt = U_{|r=1} - \gamma \int\limits_0^\infty e^{-\gamma t} U(e^{-t},\alpha)dt,$$

где $z = e^{-t}$, при этом в формуле интегрирования по частям полагаем

$$u(t) = e^{-\gamma t},\ dv(t) = U_z(e^{-t},\alpha)e^{-t}dt \Rightarrow du(t) = -\gamma e^{-\gamma t}dt,\ v(t) = -U(e^{-t},\alpha).$$

Представим решение исходной задачи для неоднородного уравнения (2.1) в виде (2.13)

$$u(r,\alpha) = \int\limits_0^\infty e^{-\gamma t} F(e^{-t}r,\alpha)dt, \tag{2.14}$$

где функция $F(r,\alpha)$ удовлетворяет граничному условию Дирихле (2.3). При этом функция (2.14) удовлетворяет граничному условию (2.1) тождественно для любой указанной функции $F(r,\alpha)$. Пусть функция $F(r,\alpha)$ в круге $D(r<1)$ удовлетворяет уравнению Пуассона (2.3) с некоторой правой частью $H_1(r,\alpha)$. Отсюда, подставляя функцию $u(r,\alpha)$ (2.14) в уравнение (2.1), для функции $H_1(r,\alpha)$ получим интегральное уравнение

$$\int\limits_0^\infty e^{-\gamma t} H_1(e^{-t}r,\alpha)dt = H(r,\alpha). \tag{2.15}$$

Дифференцируя это уравнение по r, умножая на r и вычисляя полученный интеграл по частям, находим

$$\int_0^\infty e^{-\gamma t} H_{1,z}(e^{-t}r,\alpha)e^{-t}r\,dt = H_1(r,\alpha) - \gamma\int_0^\infty e^{-\gamma t}H_1(e^{-t}r,\alpha)dt = rH_r(r,\alpha),$$

где $z = e^{-t}r$, при этом в формуле интегрирования по частям полагаем

$$u(t) = e^{-\gamma t},\ dv(t) = H_{1,z}(e^{-t}r,\alpha)e^{-t}r\,dt\ \Rightarrow\ du(t) = -\gamma e^{-\gamma t}dt,\ v(t) = -H_1(e^{-t}r,\alpha).$$

Отсюда с учётом равенства (2.15) найдём функцию $H_1(r,\alpha)$ в виде (2.4).

Теорема 1. *Если функция $F(r,\alpha)$ является решением корректной задачи Дирихле (2.3), то решение задачи (2.1) существует, единственно и выражается через функцию $F(r,\alpha)$ по формуле (2.14), где γ имеет вид (2.2).*

Доказательство. Существование решения задачи (2.1) в виде (2.14) доказано выше. Функция (2.14) представляет собой оператор $u(r,\alpha) = L[F(r,\alpha)]$, действующий на функцию $F(r,\alpha)$ по одной переменной r. Построим оператор, обратный оператору L. Для этого, дифференцируя равенство (2.14) по r, умножая полученное выражение на r и вычисляя интеграл по частям, найдём обратный оператор в виде

$$F(r,\alpha) = \gamma u(r,\alpha) + ru_r(r,\alpha), \tag{2.16}$$

где $u(r,\alpha)$ – решение задачи (2.1). Полученная функция $F(r,\alpha)$ (2.16) с учётом условий задачи (2.1) удовлетворяет условиям задачи (2.3), что проверяется непосредственно. При этом функция $F(r,\alpha)$ по формуле (2.16) и функция $u(r,\alpha)$ по формуле (2.14) выражаются одна через другую однозначно. Отсюда в силу корректности задачи (2.3) следует единственность решения вида (2.14) задачи (2.1). Теорема доказана.

3. Вывод граничного условия на кольцевой сильнопроницаемой плёнке. Пусть теперь круг $D = (r < 1) \times (0 < \alpha < 2\pi)$ ограничен сильнопроницаемой плёнкой $r = 1$, которую моделируем бесконечно тонким слоем с бесконечно большой проницаемостью. При этом сильнопроницаемая плёнка характеризуется параметром [1; 3]:

$$A = \lim_{\Delta r\to 0,\, k_0\to\infty} k_0\Delta r, \tag{3.1}$$

где Δr и k_0 – толщина и проницаемость слоя, вырождающегося в плёнку.

Для вывода граничного условия на сильнопроницаемой плёнке $r = 1$, как и выше, заменим её слоем $D_0 = (1 < r < b) \times (0 < \alpha < 2\pi)$ толщины $\Delta r = b - 1$ и проницаемости k_0 при идеальном контакте слоя D_0 с кругом D и с внешней средой. Отсюда на границе $r = 1$ областей D и D_0 имеют место классические условия сопряжения (1.3). При этом приращения потенциала и нормальной скорости на границах слоя D_0 имеют вид (1.5), (1.6).

Пусть слой D_0 вырождается в сильнопроницаемую плёнку с параметром A (3.1). Переходя в равенстве (1.5) к пределу при $\Delta r \to 0$ $(b \to 1)$, $k_0 \to \infty$, для средней части этого равенства с учётом первого условия (1.3): $u_{|r=1} = u_{0|r=1}$ в пределе получим $\lim u_{0|r=b-0} = \lim u_{0|r=1+0} = u_{|r=1-0}$. Отсюда

$$\lim u_{0|r=c_2} = u_{|r=1-0} \tag{3.2}$$

для $\forall c_2 \in (1, b)$. Дифференцируя дважды выражение (3.2) по свободной переменной α, с учётом уравнений Лапласа (1.2) и (1.4), получим $\lim(ru_{0,r})_{r|r=c_2} = (ru_r)_{r|r=1-0}$, т. е. $\lim(ru_{0,rr} + u_{0,r})_{|r=c_2} = (ru_r)_{r|r=1-0}$.

Отсюда $\lim u_{0,rr|r=c_2} = (ru_r)_{r|r=1-0}$, т. к. из ограниченности скорости $v_0 = k_0 u_{0,r}$ в кольце D_0 следует $u_{0,r} \to 0$ при $k_0 \to \infty$. Тогда из равенств (1.5), (1.6) при $\Delta\ r \to 0$, $k_0 \to \infty$, $k_0\Delta r \to A$ получим граничные условия на сильнопроницаемой плёнке в виде

$$u_{|r=1} = h(\alpha), \qquad ku_r + A(ru_r)_{r|r=1} = V(\alpha). \tag{3.3}$$

Из условий (3.3) следует, что на сильнопроницаемой плёнке потенциал непрерывен, а нормальная скорость терпит разрыв: $V(\alpha) - ku_r = A(ru_r)_{r|r=1}$. Последнее, например, в теории фильтрации объясняется тем, что частицы жидкости, попадая в сильнопроницаемую плёнку, двигаются в ней и могут вытекать в точках, отличных от точек втекания, что согласуется с физическими представлениями.

4. Решение задачи для кольцевой сильнопроницаемой плёнки. Рассмотрим краевую задачу второго типа (3.3) для уравнения Пуассона в круге $D(r < 1)$, ограниченном сильнопроницаемой плёнкой с параметром A:

$$r(ru_r)_r + u_{\alpha\alpha} = H(r, \alpha), \qquad \gamma u_r + (ru_r)_{r|r=1} = V(\alpha), \tag{4.1}$$

где

$$\gamma = \frac{k}{A} > 0, \tag{4.2}$$

функция $H(r, \alpha) = 0$ в окрестности плёнки $r = 1-0$. Здесь заданные функции $H(r, \alpha)$ и $h(\alpha)$ являются такими, для которых аналогичная классическая задача Неймана в круге D (без плёнки) относительно функции $F(r, \alpha)$

$$r(rF_r)_r + F_{\alpha\alpha} = H_1(r, \alpha), \qquad F_{r|r=1} = V(\alpha) \tag{4.3}$$

корректна, где

$$H_1(r, \alpha) = \gamma H(r, \alpha) + rH_r(r, \alpha). \tag{4.4}$$

(решение задачи (4.3) единственно с точностью до аддитивной постоянной).

Пусть решение $F(r,\alpha)$ задачи Неймана (4.3) известно [8, с. 442]. Выразим решение задачи (4.1) через функцию $F(r,\alpha)$ (4.3). Решение задачи (4.1) будем искать в виде (2.14)

$$u(r,\alpha) = \int_0^\infty e^{-\gamma t} F(e^{-t} r, \alpha) dt, \tag{4.5}$$

где функция $F(r,\alpha)$ – решение задачи (4.3), постоянная γ имеет вид (4.2). Отсюда функция (4.5) удовлетворяет граничному условию (4.1) тождественно для любой функции $F(r,\alpha)$, удовлетворяющей граничному условию Неймана (4.3), что проверяется непосредственно, при этом второе слагаемое в граничном условии (4.1) вычисляется интегрированием по частям:

$$[ru_r(r,\alpha)]_{r|r=1} = F_{r|r=1} - \gamma \int_0^\infty e^{-\gamma t} F_z(e^{-t},\alpha) e^{-t}\, dt = V(\alpha) - \gamma u_{r|r=1},$$

где $z = e^{-t}$. Из уравнения Пуассона (4.1) с учётом уравнения (4.3), для функции $H_1(r,\alpha)$ получим интегральное уравнение (2.15), решение которого имеет вид (4.4).

Теорема 2. *Если функция $F(r,\alpha)$ является решением корректной задачи Неймана (4.3) (с точностью до аддитивной постоянной), то решение задачи (4.1) существует, единственно (с точностью до аддитивной постоянной) и выражается через функцию $F(r,\alpha)$ по формуле (4.5).*

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 1.

Список литературы

1. Холодовский С. Е. Метод свёртывания разложений Фурье в решении краевых задач с пересекающимися линиями сопряжения // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2007. Т. 47, № 9. С. 1550–1556.

2. Холодовский С. Е. Метод свёртывания разложений Фурье. Случай трещины (завесы) в неоднородном пространстве // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45, № 8. С. 1204–1208.

3. Холодовский С. Е. О многослойных плёнках на границе полупространства // Математические заметки. 2016. Т. 99, вып. 3. С. 421–427.

4. Арсенин В. Я. Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1974. 735 с.

5. Положий Г. Н. Уравнения математической физики. М.: Высшая школа, 1964. 560 с.

6. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа. М.: Наука, 1968. Т. 1. 440 с.

7. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа. М.: Наука, 1968. Т. 2. 464 с.

8. Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н. Сборник задач по математической физике. М.: Наука, 1980. 680 с.

Статья поступила в редакцию 10.05.2019; принята к публикации 15.06.2019

Библиографическое описание статьи

Холодовский С. Е., Хонина М. Г. Однослойные плёнки на границе круга для уравнения Пуассона // Учёные записки Забайкальского государственного университета. 2019. Т. 14, № 3. С. 31–40. DOI: 10.21209/2308-8761-2019-14-3-31-40.

Svyatoslav Ye. Kholodovskii,
Doctor of Physics and Mathematics, Professor,
Transbaikal State University
(30 Aleksandro-Zavodskaya st., Chita, Russia, 672039),
e-mail: hol47@yandex.ru
Mariya G. Honina,
Student,
Transbaikal State University
(30 Aleksandro-Zavodskaya st., Chita, Russia, 672039),
e-mail: mariahonina28@gmail.com

Single-Layer Films on the Boundary of the Circle for the Poisson Equation

Boundary value problems for the Poisson equation in a circle bounded by a weakly or strongly permeable on films are derived. Derived boundary conditions on films. The derived theorems of existence and uniqueness are proved. Solutions of boundary value problems are obtained in quadratures.

Keywords: boundary value problems, weakly permeable film, strongly permeable film, method of convolution of Fourier expansions

References

1. Holodovskij S. E. Metod svyortyvaniya razlozhenij Fur'e v reshenii kraevyh zadach s peresekayushchimisya liniyami sopryazheniya // ZHurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki. 2007. T. 47, № 9. S. 1550–1556.

2. Holodovskij S. E. Metod svyortyvaniya razlozhenij Fur'e. Sluchaj treshchiny (zavesy) v neodnorodnom prostranstve // Differencial'nye uravneniya. 2009. T. 45, № 8. S. 1204–1208.

3. Holodovskij S. E. O mnogoslojnyh plyonkah na granice poluprostranstva // Matematicheskie zametki. 2016. T. 99, vyp. 3. S. 421–427.

4. Arsenin V. YA. Metody matematicheskoj fiziki i special'nye funkcii. M.: Nauka, 1974. 735 s.

5. Polozhij G. N. Uravneniya matematicheskoj fiziki. M.: Vysshaya shkola, 1964. 560 s.

6. Fihtengol'c G.M. Osnovy matematicheskogo analiza. M.: Nauka, 1968. T. 1. 440 s.

7. Fihtengol'c G.M. Osnovy matematicheskogo analiza. M.: Nauka, 1968. T. 2. 464 s.

8. Budak B. M., Samarskij A. A., Tihonov A. N. Sbornik zadach po matematicheskoj fizike. M.: Nauka, 1980. 680 s.

Received: May 10, 2019; accepted for publication June 15, 2019

Reference to article

Kholodovskii S. Ye., Honina M. G. Single-Layer Films on the Boundary of the Circle for the Poisson Equation // Scholarly Notes of Transbaikal State University. 2019. Vol. 14, No. 3. PP. 31–40. DOI: 10.21209/2308-8761-2019-14-3-31-40.