

DOI: 10.21209/2308-8761  
DOI: 10.21209/2308-8761-2019-14-3

ISSN 2308-8761(Print)  
ISSN 2542-0070 (Online)

**2019. Том 14, № 3**

**2019. Vol. 14, No. 3**

# Учёные записки

Забайкальского государственного университета

**Серия «Физика, математика, техника, технология»**

## Scholarly Notes Of Transbaikal State University

**Series Physics, Mathematics, Engineering, Technology**

### УЧРЕДИТЕЛЬ И ИЗДАТЕЛЬ

Федеральное государственное  
бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Забайкальский государственный  
университет»

672039, Россия, Забайкальский край,  
г. Чита, ул. Александрo-Заводская, 30

### АДРЕС РЕДАКЦИИ

672007, Россия, Забайкальский край,  
г. Чита, ул. Бабушкина, 129  
Тел.: 8 (3022) 35-24-79  
Факс: 8 (3022) 41-64-44

### FOUNDER AND PUBLISHER

Federal State Budgetary  
Educational Institution  
of Higher Education  
"Transbaikal State  
University"

30 Aleksandro-Zavodskaya st.,  
Transbaikal Territory, 672039, Russia

### EDITORIAL OFFICE ADDRESS

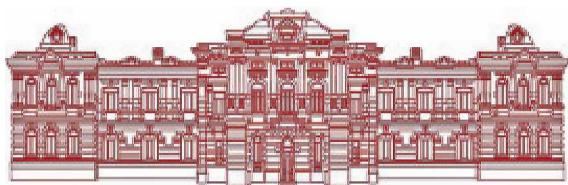
129 Babushkina st., Chita,  
Transbaikal Territory, 672007, Russia  
Tel. number: 8 (3022) 35-24-79  
Fax: 8 (3022) 41-64-44

**E-mail: [zab-nauka@mail.ru](mailto:zab-nauka@mail.ru)**

**<http://www.uchzap.com>**

# Учёные записки

Забайкальского  
государственного  
университета



*Серия*  
«Физика, математика, техника,  
технология»

**Научный журнал**  
Основан в 1957 г.  
Выходит пять раз в год

**Журнал зарегистрирован**  
Федеральной службой по надзору  
в сфере связи, информационных технологий  
и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)

**Свидетельство о регистрации**  
ПИ № ФС77-71825 от 08.12.2017

**Журнал входит**  
в Перечень ведущих рецензируемых научных  
журналов и изданий, в которых должны быть  
опубликованы основные научные результаты  
диссертаций на соискание учёных степеней  
доктора и кандидата наук: *педагогические науки*

**Редакция** журнала руководствуется положением  
Гражданского кодекса РФ по авторскому праву,  
международными стандартами редакционной  
этики, лицензией Creative Commons «Attribution»  
(«Атрибуция») 4.0 Всемирная



**Подписной индекс** журнала  
в «Пресса России» **42408**

**Размещение и индексация журнала:**  
Научная электронная библиотека (РИНЦ),  
CrossRef, Винити РАН, Университетская библио-  
отека онлайн, КиберЛенинка, Ulrich's Periodicals  
Directory, Open Academic Journals Index,  
IPRbooks, ERICH PLUS, Index Copernicus, ИВИС,  
Citefactor

Журнал представляет собой сборник оригинальных и обзорных научных статей, посвящённых аналитическому решению задач математической физики в областях, содержащих плёночные включения и плёночные покрытия, задач оптимизации, математической теории игр; работы по экспериментальной физике: исследованию ледяных покровов, проблемам добычи полезных ископаемых, а также работы по различным инженерным технологиям.

Материалы журнала будут интересны широкой научной общественности, преподавателям вузов, аспирантам, студентам, деятелям культуры и образования.

# Scholarly Notes of Transbaikal State University

*Series*

Physics, Mathematics, Engineering, Technology

# Uchenye Zapiski Zabaikal'skogo Gosudarstvennogo Universiteta

*Seriya*

*Fizika, Matematika, Tekhnika,  
Tekhnologiya*

**Scientific Journal**  
Founded in 1957  
Published five times per year

**The journal is registered**  
by the Federal Supervision Service in the Field  
of Communications, Information Technology  
and Mass Communications (Roskomnadzor)

**Registration certificate**  
ПИ № ФС77-71825 от 08.12.2017

**The journal**  
is in the List of the leading refereed  
scientific journals and editions which publish  
the main results of dissertations for academic degrees  
of doctors and candidates of sciences:  
*pedagogical sciences*

**The editorial board** is guided by the provisions  
of the Civil Code of the Russian Federation  
on Copyright, international editorial  
ethics standards, Creative Commons license  
"Attribution" ("Attribution") 4.0 Universal



**Subscription index** of the journal  
in "Press of Russia" **42408**

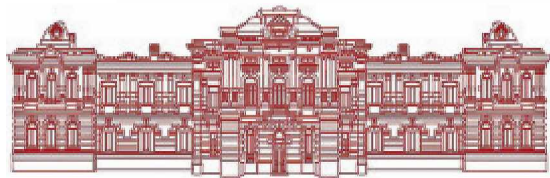
**Journal indexing:**  
Russian Science Citation Index (RSCI),  
CrossRef, VINITI RAS, University library online,  
CyberLeninka, Ulrich's Periodicals Directory,  
Open Academic Journals Index, IPRbooks,  
ERICH PLUS, Index Copernicus,  
IVIS, Citefactor

The journal is a collection of original and review scientific papers on analytical solution of mathematical physics problems in the fields containing film inclusions and film coatings, optimization problems, mathematical theory of games, works on experimental physics: the study of ice sheets, problems of mining, as well as works on various engineering technologies.

Materials will be interesting to the wide scientific community, university professors, postgraduate students, students, workers in culture and education.

# Учёные записки

Забайкальского  
государственного  
университета



*Серия*  
«Физика, математика, техника,  
технология»

## Редакционная коллегия

### Выпускающий редактор

**С. Е. Холодовский**, доктор физико-математических наук, профессор (Чита, Россия);

**С. Ф. Забелин**, доктор технических наук, профессор (Чита, Россия)

### Члены редколлегии

**П. Б. Авдеев**, доктор технических наук, профессор (Чита, Россия);

**В. Е. Архинчеев**, доктор физико-математических наук, профессор (Улан-Удэ, Россия);

**В. В. Мазалов**, доктор физико-математических наук, профессор (Петрозаводск, Россия);

**Ю. М. Овешников**, доктор технических наук, профессор (Чита, Россия);

**М. И. Эпов**, доктор технических наук, профессор, академик РАН, Институт нефтегазовой геологии и геофизики СО РАН (Новосибирск, Россия)

### Главный редактор

**И. В. Ерофеева**, доктор филологических наук, доцент

### Ответственный секретарь

**Е. В. Седина**, кандидат культурологии

Редактор В. К. Демиденко,  
редактор перевода В. М. Ерёмина,  
вёрстка Г. А. Зенковой,  
дизайн обложки М. Р. Коптеловой

Подписано в печать 13.09.2019.

Дата выхода в свет 18.09.2019.

Формат 60 × 84 1/8. Бумага офсетная.

Гарнитура «Times».

Способ печати оперативный.

Усл. печ. л. 10,3. Уч.-изд. л. 8,0. Заказ № 19110.

Тираж 1000 экз. (1-й з-д 1–100 экз.).

Цена свободная

Отпечатано в ФГБОУ ВО «Забайкальский  
государственный университет»  
672039, Россия, г. Чита, ул. Александрo-Заводская, 30

© Забайкальский государственный  
университет, 2019

# Scholarly Notes of Transbaikal State University

*Series*

Physics, Mathematics, Engineering, Technology

## *Uchenye Zapiski* *Zabaikal'skogo* *Gosudarstvennogo Universiteta*

*Seriya*

*Fizika, Matematika, Tekhnika,*  
*Tekhnologiya*

## *Editorial Board*

### Main Handling Editor

**S. E. Kholodovskii**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor (Chita, Russia);

**S. F. Zabelin**, Doctor of Engineering Science, Professor (Chita, Russia)

### Editorial board members

**P. B. Avdeev**, Doctor of Engineering Science, Professor (Chita, Russia);

**V. E. Arkhincheev**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor (Ulan-Ude, Russia);

**V. V. Mazalov**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor (Petrozavodsk, Russia);

**Y. M. Oveshnikov**, Doctor of Engineering Science, Professor (Chita, Russia);

**M. I. Epov**, Doctor of Engineering Science, Professor, Academician of the Russian Academy of Sciences, Institute of Oil and Gas Geology and Geophysics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences (Novosibirsk, Russia)

### Editor-in-chief

**I. V. Erofeeva**, Doctor of Philology, Associate Professor

### Executive Secretary

**E. V. Sedina**, Candidate of Culturology

Corrector V. K. Demidenko,  
Editor of the English Translation V. N. Eremina,  
Make-up G. A. Zenkova,  
Cover design M. R. Koptelova

Signed to print 13.09.2019.

Date of publication 18.09.2019.

Format 60 × 84 1/8. Offset paper. Headset "Times".

Operative printing.

Conv. quires 10,3. Ed.-print quires 8,0. Order № 19110.  
Circulation 1000 copies. (first impression 1–100 copies).

Free price

Printed by FSBEI HE "Transbaikal  
State University"  
672039, Russia, Chita, 30 Aleksandro-Zavodskaya st.

© Transbaikal State University, 2019

# СОДЕРЖАНИЕ

## ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ. АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

<i>Ефимова И. А.</i> О фильтрации жидкости под точечной плотиной в двухслойном грунте, ограниченном снизу водоупором.....	6
<i>Толпаев В. А., Бондаренко М. А., Захаров В. В., Кравцов А. М., Петросяниц М. Т.</i> Прикладная модель фильтрации сжимаемой жидкости к скважине в пористой среде .....	12
<i>Холодовский С. Е.</i> Решение краевых задач для уравнения Пуассона на полуплоскости, ограниченной плёнкой .....	24
<i>Холодовский С. Е., Хонина М. Г.</i> Однослойные плёнки на границе круга для уравнения Пуассона .....	31
<i>Яковлева Г. М.</i> Решение краевых задач для уравнения Лапласа на полуплоскости, ограниченной слабопроницаемой плёнкой и содержащей сильнопроницаемую плёнку .....	41

## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ. ЭКСПЕРИМЕНТ

<i>Березин С. Я.</i> Исследование пластических свойств цветных сплавов в условиях резбобыдавливания .....	49
<i>Бордонский Г. С.</i> Методика измерений действительной части относительной диэлектрической проницаемости переохлаждённой воды в микроволновом диапазоне .....	58
<i>Гурулев А. А.</i> Электрические потенциалы и фазовые переходы раствора хлористого <i>натрия</i> .....	66
<i>Сосновчик Ю. Ф., Лукьянов П. Ю.</i> Физико-математическая модель преодоления огненным фронтом препятствия в виде барьера в условиях низового лесного и степного пожаров .....	75

# CONTENTS

## PROBLEMS OF MATHEMATICAL PHYSICS. ANALYTICAL METHODS

<i>Efimova I. A.</i> Filtration of a Fluid under a Point Dam in a Two-Layer Primer Bounded from Below by an Aquitard .....	6
<i>Tolpayev V. A., Bondarenko M. A., Zaharov V. V., Kravtsov A. M., Petrosyants M. T.</i> Applied Filtration Model of Compressible Fluid to a Well in a Porous Medium .....	12
<i>Kholodovskii S. Ye.</i> Solving Boundary Value Problems for the Poisson Equation on a Half-Plane Bounded by a Film .....	24
<i>Kholodovskii S. Ye., Honina M. G.</i> Single-Layer Films on the Boundary of the Circle for the Poisson Equation .....	31
<i>Yakovleva G. M.</i> Solution of Boundary Value Problems for the Laplace Equation on a Half-Plane Bounded by a Weakly Permeable Film and Containing a Strongly Permeable Film .....	41

## MATHEMATICAL MODELS. EXPERIMENT

<i>Berezin S. Ya.</i> The Study of the Plastic Properties of Non-Ferrous Alloys in Relation to the Self-Tapping Processes .....	49
<i>Bordonskiy G. S.</i> Methods of Measuring the Real Part of Supercooled Water Relative Dielectric Constant at Microwaves.....	58
<i>Gurulev A. A.</i> Electrical Potentials and Phase Transitions of Sodium Chloride Solution .....	66
<i>Sosnowchik Yu. F., Lukyanov P. Yu.</i> Physical-Mathematical Model of the Flame Front Overcoming of an Obstacle in the Form of a Barrier under the Conditions of Lowflow Forest and Steppe Fire .....	75

**ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ.  
АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ**

**PROBLEMS OF MATHEMATICAL PHYSICS.  
ANALYTICAL METHODS**

УДК 532.546

DOI: 10.21209/2308-8761-2019-14-3-6-11

*Ирина Анатольевна Ефимова,  
кандидат физико-математических наук, доцент,  
Забайкальский институт предпринимательства  
(672086, Россия, г. Чита, ул. Ленинградская, 16),  
e-mail: yefimova79@yandex.ru*

**О фильтрации жидкости под точечной плотинкой в двухслойном грунте,  
ограниченном снизу водоупором**

Рассмотрены смешанные краевые задачи типа (1), (2) для уравнения Лапласа в одно-  
родной и кусочно-однородной полосе с условиями сопряжения на горизонтальной линии.  
Задачи моделируют фильтрацию жидкости под точечной плотинкой, когда область филь-  
трации ограничена снизу водоупором. Решения задач получены в явном виде.

**Ключевые слова:** краевые задачи в кусочно-однородной полосе, условия сопряжения,  
фильтрация жидкости под плотинкой

Рассмотрим в вертикальной плоскости с декартовыми координатами  $x, y$  филь-  
трацию жидкости под точечной плотинкой, когда ось  $x$  расположена вдоль линии  
бьефов ( $x > 0$  – нижний бьеф,  $x < 0$  – верхний бьеф) и область фильтрации име-  
ет вид горизонтальной полосы  $D = (x \in R) \times (-\pi/2 < y < 0)$ . Пусть полоса  $D$   
ограничена снизу непроницаемым грунтом (водоупором)  $y = -\pi/2$ .

1. Рассмотрим сначала случай однородной полосы  $D$  с постоянной проницаемо-  
стью. Отсюда, отсчитывая давление от давления в нижнем бьефе, для потенциала  
 $f(x, y)$  в полосе  $D$  получим смешанную краевую задачу вида [1; 2, с. 37]:

$$\Delta_{xy} f = 0, \quad \partial_y f|_{y=-\pi/2} = 0, \quad f|_{y=0} = \begin{cases} p, & x < 0, \\ 0, & x > 0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\Delta_{xy} = \partial_{xx} + \partial_{yy}$  – оператор Лапласа,  $\partial_{xx} = \partial^2/\partial x^2$ ,  $\partial_y = \partial/\partial y$ ,  $p < 0$  – постоянная.

Для решения задачи (1) рассмотрим аналитическую функцию  $\zeta = e^z$ , отображающую точки плоскости  $z = x + iy$  на точки плоскости  $\zeta = \xi + i\eta$ . При этом полоса  $D$  конформно отображается на квадрант  $D_0(\xi > 0, \eta < 0)$ , где

$$\xi = e^x \cos y, \quad \eta = e^x \sin y. \quad (2)$$

В переменных  $\xi, \eta$  задача (1) для функции  $f_1(\xi, \eta) = f(x, y)$  в квадранте  $D_0$  примет вид

$$\Delta_{\xi\eta} f_1 = 0, \quad \partial_{\xi} f_1|_{\xi=0} = 0, \quad f_1|_{\eta=0} = \begin{cases} p, & 0 < \xi < 1, \\ 0, & 1 < \xi < \infty. \end{cases} \quad (3)$$

Соответствующая задача для функции Грина  $G(\xi, \eta, \xi_0, \eta_0)$  в квадранте  $D_0$  имеет вид

$$\Delta_{\xi\eta} G = \delta(\xi - \xi_0, \eta - \eta_0), \quad \partial_{\xi} G|_{\xi=0} = 0, \quad G|_{\eta=0} = 0, \quad (4)$$

где  $\delta(\xi - \xi_0, \eta - \eta_0)$  – дельта-функция Дирака [2, с. 385]. Функция Грина  $G$  (4) строится методом отражения и имеет вид

$$G(\xi, \eta, \xi_0, \eta_0) = \frac{1}{4\pi} [l(\xi_0, \eta_0) - l(\xi_0, -\eta_0) - l(-\xi_0, -\eta_0) + l(-\xi_0, \eta_0)],$$

где  $l(\xi_0, \eta_0) = \ln[(\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2]$ . Из формулы Грина для области  $D_0$  вида [2, с. 163]

$$\iint_{D_0} (f_1 \Delta_{\xi\eta} G - G \Delta_{\xi\eta} f_1) d\xi d\eta = \int_{\partial D_0} \left( f_1 \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial f_1}{\partial n} \right) ds$$

с учётом условий задач (3), (4) и основного свойства  $\delta$ -функции [2, с. 395] найдём

$$f_1(\xi_0, \eta_0) = p \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} d\xi, \quad (5)$$

где  $\partial/\partial n$  – производная по внешней нормали к границе  $\partial D_0$  квадранта  $D_0$ ,

$$\frac{\partial G}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = -\frac{\eta_0}{\pi} \left[ \frac{1}{(\xi - \xi_0)^2 + \eta_0^2} + \frac{1}{(\xi + \xi_0)^2 + \eta_0^2} \right].$$

Отсюда, вычисляя интеграл (5) и переходя по формулам (2) на плоскость  $(x, y)$ , получим решение исходной задачи (1) в элементарных функциях в конечном виде

$$f(x, y) = \frac{p}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{sh} x}{\sin y} + \frac{p}{2}. \quad (6)$$

2. Рассмотрим случай кусочно-однородной полосы  $D$ , состоящей из двух слоёв  $D_1 = (x \in R) \times (-l < y < 0)$  и  $D_2 = (x \in R) \times (-\pi/2 < y < -l)$  с различной постоянной проницаемостью  $k_i$  в  $D_i$ , где  $0 < l < \pi/2$ . Отсюда для потенциалов  $u_i(x, y)$  в  $D_i$  задача имеет вид [1]

$$\Delta_{xy} u_i = 0, \quad \partial_y u_2|_{y=-\pi/2} = 0, \quad u_1|_{y=0} = \varphi(x) = \begin{cases} p, & x < 0, \\ 0, & x > 0, \end{cases} \quad (7)$$

$$y = -l : \quad u_1 = u_2, \quad k_1 \partial_y u_1 = k_2 \partial_y u_2, \quad (8)$$

где условия сопряжения (8) выражают непрерывность потенциала и нормальной скорости на линии разрыва проницаемости. Аналогичная задача в двухслойной полуплоскости рассмотрена в статье [3].

Задача (7), (8) является задачей сопряжения со смешанными граничными условиями первого и второго рода на границах полосы  $D$  при кусочно-постоянной граничной функции. При этом граничная функция  $\varphi(x)$  (7) не разлагается в интеграл Фурье, т.е. здесь классический метод Фурье неприменим.

Представим решение задачи (7), (8) в виде

$$u_1(x, y) = f(x, y) + v_1(x, y), \quad -l < y < 0, \quad (9)$$

$$u_2(x, y) = f(x, y) + v_2(x, y), \quad -\frac{\pi}{2} < y < -l, \quad (10)$$

где функция  $f(x, y)$  является решением задачи (1) и имеет вид (6). Отсюда для функций  $v_i(x, y)$  в слоях  $D_i$  получим задачу

$$\Delta_{xy} v_i = 0, \quad i = 1, 2; \quad v_1|_{y=0} = 0, \quad \partial_y v_2|_{y=-\pi/2} = 0, \quad (11)$$

$$y = -l : \quad v_1 = v_2, \quad k_1 \partial_y v_1 - k_2 \partial_y v_2 = (k_2 - k_1) \partial_y f(x, -l), \quad (12)$$

где

$$\partial_y f(x, -l) = \frac{p \operatorname{sh} x \cos l}{\pi(\operatorname{sh}^2 x + \sin^2 l)}.$$

При этом последняя функция является нечётной и в силу  $\partial_y f(x, -l) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \pm\infty$  эта функция разлагается в интеграл Фурье [4, с. 529]:

$$\partial_y f(x, -l) = \int_0^{\infty} g(x, \lambda) d\lambda, \quad (13)$$



где

$$g(x, \lambda) = -\frac{2p \sin \lambda x \cos l}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} t \sin \lambda t}{\operatorname{sh}^2 t + \sin^2 l} dt. \quad (14)$$

Будем искать функции  $v_i(x, y)$  (11), (12) также в виде разложений Фурье:

$$v_1(x, y) = \int_0^{\infty} a_1(\lambda) g(x, \lambda) \operatorname{sh} \lambda y d\lambda, \quad -l < y < 0, \quad (15)$$

$$v_2(x, y) = \int_0^{\infty} a_2(\lambda) g(x, \lambda) \operatorname{ch} \lambda(y + \pi/2) d\lambda, \quad -\frac{\pi}{2} < y < -l, \quad (16)$$

где  $a_i(\lambda)$  – неизвестные функции. Отсюда функции (15), (16) удовлетворяют уравнению и граничным условиям (11) (при условии сходимости и дифференцируемости интегралов (15), (16)). Из условий сопряжения (12) с учётом разложения (13) для функций  $a_i(\lambda)$  получим систему линейных уравнений

$$a_1 \operatorname{sh} \lambda l + a_2 \operatorname{ch} \lambda(\pi/2 - l) = 0, \quad k_1 a_1 \operatorname{ch} \lambda l - k_2 a_2 \operatorname{sh} \lambda(\pi/2 - l) = \frac{k_2 - k_1}{\lambda},$$

решение которой найдём в виде

$$a_1(\lambda) = \frac{2(k_2 - k_1) \operatorname{ch} \lambda b}{\lambda h(\lambda)}, \quad a_2(\lambda) = \frac{2(k_1 - k_2) \operatorname{sh} \lambda l}{\lambda h(\lambda)}, \quad (17)$$

где  $h(\lambda) = 2(k_2 \operatorname{sh} \lambda b \operatorname{sh} \lambda l + k_1 \operatorname{ch} \lambda b \operatorname{ch} \lambda l)$ ,  $b = \pi/2 - l$ , при этом  $h(\lambda) > 0$  при  $0 \leq \lambda < \infty$ . Отсюда решение задачи (7), (8) строится по формулам (9), (10), (15), (16), (17):

$$u_1(x, y) = f(x, y) + 2(k_2 - k_1) \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \lambda y \operatorname{ch} \lambda(\pi/2 - l)}{\lambda h(\lambda)} g(x, \lambda) d\lambda, \quad -l < y < 0, \quad (18)$$

$$u_2(x, y) = f(x, y) - 2(k_2 - k_1) \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \lambda l \operatorname{ch} \lambda(y + \pi/2)}{\lambda h(\lambda)} g(x, \lambda) d\lambda, \quad -\frac{\pi}{2} < y < -l, \quad (19)$$

где  $h(\lambda) = (k_1 + k_2) \operatorname{ch} \lambda\pi/2 + (k_1 - k_2) \operatorname{ch} \lambda(2l - \pi/2)$ , функции  $f(x, y)$  и  $g(x, \lambda)$  имеют соответственно вид (6) и (14). При этом подынтегральные функции в выражениях

(18), (19) при  $\lambda \rightarrow \infty$  имеют асимптотику  $O(\lambda^{-1}e^{-\lambda|l+y|})$  для соответствующих значений  $y$ . При  $\lambda \rightarrow 0$  указанные подынтегральные функции имеют конечные пределы. Отсюда интегралы (18), (19) и их производные сходятся.

### Список литературы

1. Ефимова И. А. Метод функции Грина в задачах фильтрации под плотинами в неоднородных анизотропных грунтах: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.05. Чита, 1990. 24 с.
2. Арсенин В. Я. Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1974. 432 с.
3. Ефимова И. А. Решение задачи фильтрации жидкости под точечной плотиной в двухслойной полуплоскости // Учёные записки Забайкальского государственного университета. 2018. Т. 13, № 3. С. 6–10.
4. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука, 1969. Т. 3. 656 с.

*Статья поступила в редакцию 22.04.2019; принята к публикации 27.05.2019*

### Библиографическое описание статьи

Ефимова И. А. О фильтрации жидкости под точечной плотиной в двухслойном грунте, ограниченном снизу водоупором // Учёные записки Забайкальского государственного университета. 2019. Т. 14, № 3. С. 6–11. DOI: 10.21209/2308-8761-2019-14-3-6-11.

*Irina A. Efimova,  
Candidate of Physics and Mathematics,  
Associate Professor,  
Transbaikal Institute of Entrepreneurship  
(16 Leningradskaya st., Chita, 672086, Russia),  
e-mail: yefimova79@yandex.ru*

## Filtration of a Fluid Under a Point Dam in a Two-Layer Primer Bounded from Below by an Aquitard

Mixed boundary value problems of type (1,2) for the Laplace equation in a homogeneous and piecewise homogeneous strip with conjugation conditions on a horizontal line are considered. The problems simulate the filtration of a fluid under a point dam when the filtration area is bounded from below by an aquitard. Solutions of the problems are obtained in an explicit form.

**Keywords:** boundary value problems in a piecewise-homogeneous strip, conjugation conditions, filtration of a fluid under a dam

*References*

1. Efimova I. A. Metod funktsii Grina v zadachakh filtratsii pod plotinami v neodnorodnykh anizotropnykh gruntakh: avtoref. dis. ... kand. fiz.-mat. nauk: 01.02.05. Chita, 1990. 24 s.
2. Arsenin V. Ya. Metody matematicheskoy fiziki i spetsialnyye funktsii. M.: Nauka. 1974. 432 s.
3. Efimova I. A. Resheniye zadachi filtratsii zhidkosti pod tochechnoy plotinoy v dvukhsloynoy poluploskosti // Uchenyye zapiski Zabaykalskogo gosudarstvennogo universiteta. 2018. T. 13, № 3. S. 6–10.
4. Fikhtengolts G. M. Kurs differentsialnogo i integralnogo ischisleniya. M.: Nauka, 1969. T. 3. 656 s.

*Received: April 22, 2019; accepted for publication May 27, 2019*

**Reference to article**

*Efimova I. A.* Filtration of a Fluid Under a Point Dam in a Two-Layer Primer Bounded from Below by an Aquitard // Scholarly Notes of Transbaikal State University. 2019. Vol. 14, No. 3. PP. 6–11. DOI: 10.21209/2308-8761-2019-14-3-6-11.

УДК 622

DOI: 10.21209/2308-8761-2019-14-3-12-23

**Владимир Александрович Толпаев<sup>1</sup>**,  
доктор физико-математических наук, профессор,  
Ставропольский филиал ООО «Газпром проектирование»  
(355000, Россия, г. Ставрополь, ул. Ленина, 419),  
e-mail: TolpaevVA@scnipigaz.ru

**Мария Александровна Бондаренко<sup>2</sup>**,  
кандидат технических наук, АО «СевКавНИПИгаз»  
(355000, Россия, г. Ставрополь, ул. Ленина, 419),  
e-mail: BondarenkoMA@scnipigaz.ru

**Владимир Викторович Захаров<sup>3</sup>**,  
кандидат физико-математических наук, доцент,  
Ставропольский государственный аграрный университет  
(355017, г. Ставрополь, пер. Зоотехнический, 12),  
e-mail: vvakharov@mail.ru

**Александр Михайлович Кравцов<sup>4</sup>**,  
кандидат физико-математических наук,  
Ставропольский филиал ООО «Газпром проектирование»  
(355000, Россия, г. Ставрополь, ул. Ленина, 419),  
e-mail: KravcovAM@scnipiaz.ru

**Мушег Тигранович Петросянц<sup>5</sup>**,  
младший научный сотрудник,  
Ставропольский филиал ООО «Газпром проектирование»  
(355000, Россия, г. Ставрополь, ул. Ленина, 419),  
e-mail: PetrosyancMT@scnipigaz.ru

### Прикладная модель фильтрации сжимаемой жидкости к скважине в пористой среде

Предложен прикладной закон фильтрации с кинематической поправкой для сжимаемого флюида, фильтрующегося в пористой среде. В приближении плоской волны получены в замкнутом виде асимптотические решения уравнений фильтрации по закону Дарси и по уточнённому закону с кинематической поправкой. Получены оценки для размеров области фильтрации. Приведены иллюстрации с графиками распределений давлений и плотности потока упругой энергии в потоке сжимаемого флюида. Приведены расчётные оценки размеров области фильтрации для практического примера.

<sup>1</sup>В. А. Толпаев – организатор исследования.

<sup>2</sup>М. А. Бондаренко – систематизирует материалы исследования.

<sup>3</sup>В. В. Захаров – систематизирует материалы исследования.

<sup>4</sup>А. М. Кравцов систематизирует материалы исследования, оформляет статью.

<sup>5</sup>М. Т. Петросянц формулирует выводы и обобщает итоги реализации коллективного исследования.

**Ключевые слова:** фильтрация жидкости, закон фильтрации, плотность упругой энергии, плоскорадиальный поток

В отсутствие массовых сил медленные течения жидкостей и газов (флюидов) в пористых средах описываются законом фильтрации вида [1]

$$\nabla p = -\Phi(|w|) \frac{w}{|w|}, w \neq 0,$$

где  $p$  – давление в фильтрационном потоке,  $w$  – скорость фильтрации,  $\Phi$  – заданная неотрицательная функция фильтрационного закона. В слабо пористых средах, например в глинах, принимают  $\Phi$  линейной функцией скорости и закон фильтрации представляется так:

$$\begin{cases} \nabla p = -\left(\frac{\eta}{k} |w| + G\right) \frac{w}{|w|}, w \neq 0, \\ |\nabla p| < G, w = 0. \end{cases}$$

Здесь  $\eta$  – кинематическая вязкость флюида,  $k$  – проницаемость пористой среды,  $G$  – абсолютная величина начального градиента давления, при котором начинается фильтрационный процесс. Если принять  $G = 0$ , то получим в качестве частного случая закон фильтрации Дарси

$$\nabla p = -\frac{\eta}{k} w.$$

Вместе с тем, очевидно, в законах фильтрации должны присутствовать и кинематические слагаемые. Это можно обосновать формулой, применяемой в термодинамике для оценки скорости истечения сжимаемого флюида в случае адиабатического расширения [2, с. 97]

$$c_2 = \sqrt{\frac{2\gamma p_1 v_1}{\gamma - 1} \left(1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}}\right)}. \quad (1)$$

Здесь флюид расширяется от состояния, характеризуемого нулевой скоростью  $c_1 = 0$  поступательного движения, давлением и удельным объёмом  $p_1 v_1$  до противодавления  $p_2$ , ускоряясь до скорости поступательного движения  $c_2$ ,  $\gamma$  – показатель адиабаты расширения. Здесь удельный объём  $v$  связан с плотностью флюида соотношением  $\rho v = 1$ . Для адиабатического процесса расширения флюида справедливо уравнение состояния

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^\gamma. \quad (2)$$

В условиях высоких скоростей фильтрации и высоких давлений вязкость начинает играть меньшую роль, при этом начинает проявляться влияние кинематических эффектов. Если рассматривать (1) как закон течения, то такой закон допускает развитие в потоке сжимаемого флюида слабых ударных волн [3]. Возникновение ударных волн в потоке флюида и диффузионное размывание их фронтов – два конкурирующих процесса, определяющих течение флюида в ПС. При низких скоростях

движения флюида кинематические эффекты оказывают существенно меньшее влияние на течение по сравнению с диффузионными эффектами, например, вследствие низкой пьезопроводности ПС. В этом случае для описания используется уравнение фильтрации вида [4]

$$\frac{k}{\eta} \Delta P = \frac{\partial(\rho m)}{\partial t}, \quad (3)$$

где  $P$  – функция Лейбензона для идеального газа, которая имеет вид

$$P = \frac{\rho_1 p^2}{p_1 2},$$

$\Delta$  – оператор Лапласа,  $k$  – проницаемость,  $m$  – пористость пород слагающих ПС,  $\rho$  – плотность,  $\eta$  – кинематическая вязкость сжимаемого флюида в поровом пространстве ПС. Закон фильтрации Дарси в принятых обозначениях имеет вид

$$w = -\frac{k}{\eta} \frac{\partial p}{\partial r}.$$

Построим для уравнения (3) решение в приближении плоской волны. Для этого рассмотрим асимптотику решений уравнения (3) вдали от забоя скважины, ось которой связана с центром цилиндрических координат, при  $r = R$ ,  $R \gg 1$ . Уравнение (3) для плоскорадиального потока флюида к скважине в полярной системе координат, связанной с исходной цилиндрической системой координат, с учётом уравнения состояния идеального газа (2) при  $\gamma = 1$ , примет вид

$$\kappa \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) P(r, t)^2 = \frac{\partial}{\partial t} P(r, t), \quad (4)$$

где  $\kappa = kp_1/(2\eta m)$  – коэффициент пьезопроводности ПС,  $P(r, t) = p(r, t)/p_1$  – приведённое давление,  $p_1$  – давление флюида, отнесенное к пластовому давлению. При  $r \approx R$  уравнение можно приблизить уравнением с постоянными коэффициентами, зафиксировав  $r$

$$\kappa \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \right) P(r, t)^2 = \frac{\partial}{\partial t} P(r, t). \quad (5)$$

Представим решение уравнения (5) в виде плоской волны

$$P(r, t) = f(X), \quad X = r - Ut, \quad (6)$$

где  $U$  – скорость волны давления. Для операторов дифференцирования справедливы соотношения

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{d}{dX}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = -U \frac{d}{dX}. \quad (7)$$

Проинтегрируем (5) один раз. Отсюда, принимая во внимание представления (6) и связь дифференциальных операторов (7), получим

$$\kappa \left( \frac{d}{dX} + \frac{1}{R} \right) f(X)^2 = C - Uf(X). \quad (8)$$

Здесь константа интегрирования  $C$  и скорость  $U$  подлежат определению из условий для давления на забое и на бесконечности:

$$f(X) \longrightarrow \sigma, X \longrightarrow -\infty \text{ и } f(X) \longrightarrow 1, X \longrightarrow +\infty, \quad (9)$$

где  $\sigma = p_2/p_1$ .

Условия (9) позволяют записать систему линейных алгебраических уравнений для определения постоянных

$$\begin{cases} C - U = \frac{\kappa}{R}, \\ C - U\sigma = \frac{\kappa}{R}\sigma^2. \end{cases} \quad (10)$$

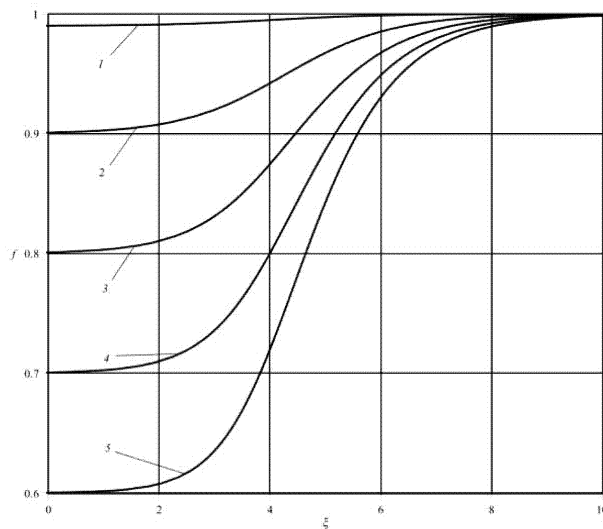
Из (10) найдём выражения для  $C$  и  $U$

$$C = -\frac{\kappa\sigma}{R}, \quad U = \frac{\kappa}{R}(1 + \sigma). \quad (11)$$

Проинтегрируем (8) ещё один раз. Тогда, учитывая найденные выражения (11), получим

$$(1 - \sigma) \frac{X - X_0}{2R} = \ln \left( \frac{(f(X) - \sigma)^\sigma}{1 - f(X)} \right). \quad (12)$$

Здесь  $X_0$  – константа интегрирования, определяющая относительное положение фронта волны. На рис. 1 приведены графики зависимости нормированного давления  $P = f(X)$  от безразмерной координаты  $\xi = (1 - \sigma)(X - X_0)/(2R)$ .



**Рис. 1.** Графики зависимости приведённого давления сжимаемого флюида от радиальной координаты, линиям 1, 2, 3, 4, 5 соответствуют значения  $\sigma = 0.99, 0.9, 0.8, 0.7, 0.6$

**Fig. 1.** Plots of reduced pressure of compressible fluid on the radial coordinate, lines 1, 2, 3, 4, 5 the values of  $\sigma = 0.99, 0.9, 0.8, 0.7, 0.6$  correspond

На рис. 1 заметно увеличение крутизны фронта давления с увеличением разницы давлений на забое скважины и в ПС. При малых значениях  $\sigma$  профиль волны имеет вид «ступеньки».

Расстояние от скважины до границы области, в которой происходит фильтрация флюида, можно найти в рамках решения задачи фильтрации в классической постановке с неизвестной границей области типа задачи Стефана [6]. В данной работе для определения относительного положения «ступеньки» воспользуемся соотношениями для потока упругой энергии. Движение сжимаемого флюида в ПС осуществляется в основном за счёт потери им части упругой энергии. Поток упругой энергии задаётся вектором Умова Пойнтинга [5]

$$\mathbf{E}_i = -\sigma_{ij}\mathbf{w}_j. \quad (13)$$

Здесь  $\mathbf{E}_i$  – компоненты вектора потока упругой энергии,  $\sigma_{ij}$  – компоненты тензора упругих напряжений,  $\mathbf{w}_j$  – компоненты вектора скорости, по индексу  $j$  идёт суммирование. В рассматриваемом случае тензор напряжений является шаровым с компонентами, равными давлению флюида; из компонент скорости присутствует только радиальная компонента. Выражение для потока упругой энергии упрощается, при этом для радиальной компоненты потока получим соотношение

$$\mathbf{E}_r = -pw. \quad (14)$$

С учётом фильтрационного закона Дарси и введённой нормировки давления выражение для радиальной компоненты потока упругой энергии перепишем в виде

$$\mathbf{E}_r = \frac{\kappa p_1}{2} \frac{\partial}{\partial r} P^2. \quad (15)$$

Отсюда, принимая во внимание уравнение (7), окончательно получим

$$\mathbf{E}_r = \frac{\kappa p_1}{2R} (P - \sigma)(1 - P). \quad (16)$$

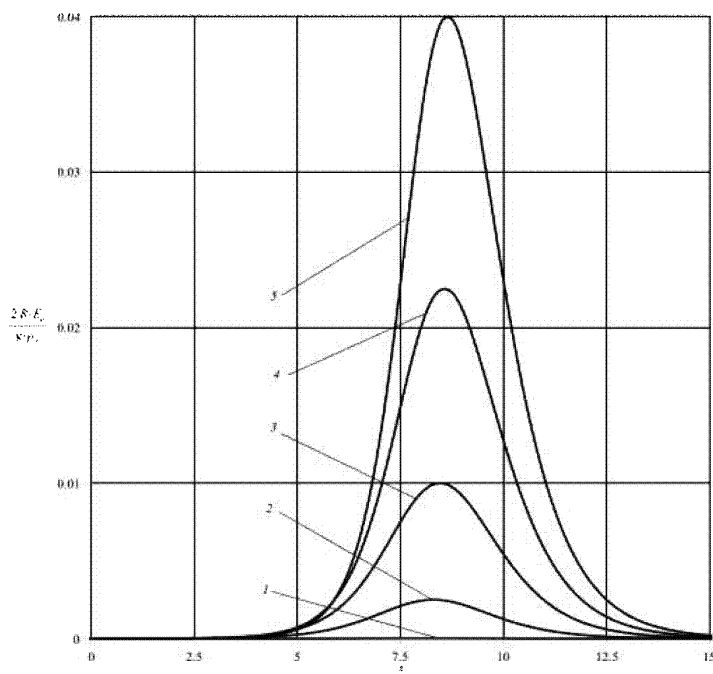
На рис. 2 представлены графики распределения упругой энергии вдоль радиальной координаты.

Из формулы (15) следует, что плотность потока квадратично зависит от приведённого давления, и максимум плотности потока упругой энергии сосредоточен вблизи фронта волны давления. Плотность потока резко падает перед фронтом волны давления и за ним.

Таким образом, основным признаком расположения фронта волны давления можно считать резкий рост плотности потока упругой энергии на фронте волны давления.

Распределение плотности потока вдоль радиальной координаты указывает на то, что ускорение движения сжимаемого флюида вследствие его расширения происходит неравномерно на протяжении всего движения к забою скважины. В основном флюид расширяется на значительном удалении от забоя. Последующее ускорение движения связано не с расширением флюида, а с сужением площади сечения потока по радиусу к скважине. При этом давление меняется уже незначительно (рис. 1).





**Рис. 2.** Графики зависимости потока упругой энергии  $E_r$  в сжимаемом флюиде от радиальной координаты. Линии 1, 2, 3, 4, 5 соответствуют значениям  $\sigma$  – 0.99, 0.9, 0.8, 0.7, 0.6

**Fig. 2.** Graphs of the flow of the elastic energy  $E_r$  in a compressible fluid from the radial coordinate. Lines 1, 2, 3, 4, 5 correspond to the values  $\sigma$  – 0.99, 0.9, 0.8, 0.7, 0.6

Движение флюида в ПС к скважине является движением в суживающемся канале. Поэтому расширение флюида ограничено критическими параметрами. Так, критическая скорость ограничивается величиной [2]

$$c_{кр} = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma + 1} p_1 v_1}. \quad (17)$$

Для критического давления выражение имеет вид

$$p_{кр} = p_1 \left( \frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}. \quad (18)$$

Сверхкритическое расширение флюида сопровождается потерями энергии сжатого флюида. Чтобы избежать потерь упругой энергии в ходе дальнейшего расширения флюида в закритическом режиме, следует использовать расширяющиеся каналы. Устройства, в которых суживающая часть дополнена расширяющейся частью (так называемые сопла Лаваля), позволяют осуществлять полное расширение флюида без потерь на выходе. В условиях скважины расширяющаяся часть может быть обустроена при помощи скважинного фильтра, пористость которого заметно превосходит пористость призабойной зоны скважины. Другим вариантом обеспечения большей проницаемости призабойной зоны скважины является гидроразрыв пласта, который также приводит к увеличению объёма пространства для течения флюида к скважине. Оптимальным считается угол конусности расширяющихся к скважине

каналов 8–12° [2]. Расход флюида можно определить по минимальному сечению горловины канала. Обычно это – забой скважины или штуцер на её устье, при этом

$$Q_{\max} = F_{\min} \lambda_{\text{кр}} \sqrt{2 \frac{p_1}{v_1}}, \quad (19)$$

где

$$\lambda_{\text{кр}} = \frac{1}{2} \left( \frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \sqrt{\gamma(\gamma + 1)}.$$

По известному массовому расходу флюида из (19) можно оценить площадь критического сечения

$$F_{\min} = \frac{Q_{\max}}{\lambda_{\text{кр}} \sqrt{2 \frac{p_1}{v_1}}}.$$

Из приведённых рассуждений следует, что ключевыми моментами в организации энергоэффективного фильтрационного течения к забою скважины являются:

- определение предельного положения фронта волны расширения флюида, распространяющейся от забоя скважины вглубь пласта;
- определения положения узкого места – горловины потока.

Если положение фронта определяет добычные возможности скважины (размер области в ПС, из которой возможна фильтрация к скважине), то положение горловины потока влияет на эффективность расходования упругой энергии расширяющегося в процессе добычи флюида.

Классическая модель течения, использующая закон фильтрации Дарси, позволяет качественно оценить фильтрационный процесс. Так, из формулы для скорости волны (11) вытекает замедление волны давления при её продвижении вглубь ПС, при этом скорость может снизиться до нуля только на бесконечности. Поэтому, пользуясь классической моделью, оценить положение границы области фильтрации не представляется возможным. Положение фронта волны давления и его форма определяются конкурирующими кинематическими и диффузионными процессами в фильтрационном потоке. Для получения оценки этих параметров необходимо добавить в закон фильтрации кинематический член вида (1):

$$w = w_c \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}} - \frac{\kappa}{p_1} \nabla p, \quad (20)$$

где  $w_c$  – значение скорости фильтрационного течения на забое скважины, которое обусловлено расширением флюида при движении в поровом пространстве. В предельном случае для идеального газа выражение (20) запишется в виде

$$w = w_c \sqrt{\frac{\ln\left(\frac{p}{p_1}\right)}{\ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)}} - \frac{\kappa}{p_1} \nabla p.$$

Вариант фильтрационного закона (20) содержит в себе возможность описания слабых нелинейных ударных волн, а также учитывает диффузионные эффекты.

Используем закон фильтрации к скважине (20) для построения уточненной модели фильтрационного течения в ПС. Для этого воспользуемся уравнением неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho w) = 0. \quad (21)$$

Перепишем (20) с учётом уравнения состояния (2) в виде

$$\rho w = Q(\rho) - \frac{\kappa}{p_1} \rho \nabla p, \quad (22)$$

где

$$Q(\rho) = Q_c \frac{\rho}{\rho_2} \sqrt{1 - \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^{\gamma-1}}, \quad Q_c = \frac{\rho_2 w_c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{\gamma-1}}}. \quad (23)$$

Плоскорадиальное течение к скважине предполагает наличие вектора скорости и вектора потока с одной ненулевой компонентой, направленной по радиусу к центру скважины. Подставим в уравнение неразрывности выражение для скорости фильтрации (10). Отсюда с учётом уравнения состояния (2) получим

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + c(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial r} + \frac{1}{r} Q(\rho) = \frac{\kappa}{\rho_1} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \rho \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\rho}{\rho_1} \right)^\gamma \right), \quad (24)$$

где  $c(\rho) = Q'(\rho)$ . Первые два слагаемых в (24) определяют волновой характер движения сжимаемого флюида, а правая часть уравнения описывает диффузионные явления.

Решение уравнения (24) необходимо подчинить начальным условиям вида

$$\rho(r, 0) = f(r), \quad (25)$$

где  $f$  – распределение плотности флюида в ПС в начальный момент времени. Краевые условия имеют вид

$$\rho(r_c, t) = g(t) \quad (26)$$

или

$$\frac{\partial \rho(r_c, t)}{\partial r} = h(t). \quad (27)$$

Важной практической задачей является изучение установившегося режима течения флюида к забою скважины. От забоя скважины, вообще говоря, распространяется волна разрежения со скоростью, зависящей от радиальной координаты. Решение можно искать в приближении плоской волны в виде

$$\rho(r, t) \approx \psi(r - Ut). \quad (28)$$

Распространяющаяся волна имеет вид «сглаженной ступеньки». За фронтом волны плотность практически не отличается от плотности флюида на забое, а перед фронтом плотность совпадает с плотностью флюида в нетронутой ПС.

Построим решение уравнения в области «остановившегося» фронта волны  $r \approx R$ . Уравнение (24) с учётом уравнения состояния флюида (2) запишется так:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + c(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial r} + \frac{1}{r} Q(\rho) = \frac{\kappa \gamma \rho_1}{\gamma + 1} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \right) \left( \frac{\rho}{\rho_1} \right)^{\gamma+1}. \quad (29)$$

Подставляя (28) в (29) и учитывая, что для производных справедливы соотношения

$$\frac{\partial}{\partial t} \longrightarrow -U \frac{d}{dX}, \quad \frac{\partial}{\partial r} \longrightarrow \frac{d}{dX},$$

получим

$$-U \psi'(X) + c(\psi(X)) \psi'(X) + \frac{1}{R} Q(\rho) = \frac{\kappa \gamma \rho_1}{\gamma + 1} \left( \frac{d^2}{dX^2} + \frac{1}{R} \frac{d}{dX} \right) \left( \frac{\psi(X)}{\rho_1} \right)^{\gamma+1}, \quad (30)$$

где  $X = r - Ut$ .

В (30) слагаемое  $Q(\rho)/R$  мало по сравнению с остальными ( $Q(\rho)/R \rightarrow 0$  при  $R \rightarrow \infty$ ) и его можно отбросить. Принимая во внимание, что

$$\psi \longrightarrow \rho_2 \text{ при } r \longrightarrow r_c \quad (31)$$

$$\psi \longrightarrow \rho_1 \text{ при } r \longrightarrow \infty \quad (32)$$

проинтегрируем один раз (30):

$$-U \psi(X) + Q(\psi(X)) + C \rho_1 = \frac{\kappa \gamma \rho_1}{\gamma + 1} \left( \frac{d}{dX} + \frac{1}{R} \right) \left( \frac{\psi(X)}{\rho_1} \right)^{\gamma+1}. \quad (33)$$

Из условий (21), (22) для определения  $C$  и  $U$  получим уравнения

$$\begin{cases} C - U = \frac{\kappa \gamma}{\gamma + 1} \frac{1}{R}, \\ C - U \frac{\rho_2}{\rho_1} + \frac{w_c \rho_2}{\rho_1} = \frac{\kappa \gamma}{\gamma + 1} \frac{1}{R} \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{\gamma+1}. \end{cases} \quad (34)$$

Из (24) найдём

$$C = \frac{\mu}{1 - \mu}(\kappa_1(1 - \mu^\gamma) - w_c), \quad U = -\frac{1}{1 - \mu}(\kappa_1(1 - \mu^{\gamma+1}) - \mu w_c), \quad (35)$$

где

$$\kappa_1 = \frac{\kappa\gamma}{(\gamma + 1)R}, \quad \mu = \frac{\rho_2}{\rho_1}.$$

Из (35) можно оценить положение границы зоны фильтрации скважины  $R_0$ . Волна разрежения «останавливается» на границе зоны  $U \approx 0$

$$R_0 = \frac{\gamma(1 - \mu^{\gamma+1})}{(\gamma + 1)\mu} \frac{\kappa}{w_c}. \quad (36)$$

Уравнение (33) можно проинтегрировать ещё раз, принимая во внимание выражения (35):

$$X = \frac{\kappa\gamma\rho_1}{\gamma + 1} \int_{\rho}^{\rho_1} \left(\frac{\psi}{\rho_1}\right)^{\gamma+1} \left(Q(\psi) - U\psi + C\rho_1 - \frac{\kappa\gamma\rho_1}{\gamma + 1} \frac{1}{R_0} \left(\frac{\psi}{\rho_1}\right)^{\gamma+1}\right)^{-1} d\psi. \quad (37)$$

Решение  $\psi(X)$  уравнения (37) может быть получено численным интегрированием.

Для модельных данных при значениях параметров близких к встречающимся в нефтегазовой практике [4]:  $w_c = 0.01$  м/с,  $\gamma = 1.3$ ,  $\kappa = 5$  м<sup>2</sup>/с,  $p_2/p_1 = 0.95$ , оценка границы по (36) даёт  $R_0 \approx 25.5$  м.

Приведённый в работе анализ процесса течения сжимаемого флюида к скважине в приближении плоской волны с привлечением прикладного закона фильтрации, содержащего кинематический член, даёт более реалистичное описание процесса течения, как в качественном аспекте (зона активной фильтрации имеет конечный радиус  $R_0$ ), так и в количественном аспекте (порядок величины  $R_0$  согласуется с наблюдаемыми на практике значениями [4]). Полученные в работе приближённые формулы, могут применяться для оценки размеров фильтрационной зоны вокруг скважины.

### Список литературы

1. Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984. 211 с.
2. Поршаков Б. П., Романов Б. А. Основы термодинамики и теплотехники. М.: Недра, 1988. 300 с.
3. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 624 с.
4. Басниев К. С., Кочина И. Н., Максимов В. М. Подземная гидромеханика. М.: Недра, 1993. 416 с.
5. Зарембо Л. К., Красильников В. А. Введение в нелинейную акустику. М.: Наука, 1981. 519 с.
6. Бондаренко М. А., Кравцов А. М., Прийменко С. А. Обобщения полиномов Берштейна в нелинейных моделях процессов фильтрации природного газа // Вузовская наука – Северо-Кавказскому региону: материалы XIV Научно-технической конференции. Ставрополь: СевКавГТУ, 2010. С. 153.

*Статья поступила в редакцию 19.04.2019; принята к публикации 15.05.2019*

**Библиографическое описание статьи**

Толпаев В. А., Бондаренко М. А., Захаров В. В., Кравцов А. М., Петросянц М. Т.  
Прикладная модель фильтрации сжимаемой жидкости к скважине в пористой среде // Учёные записки Забайкальского государственного университета. 2019. Т. 14, № 3. С. 12–23.  
DOI: 10.21209/2308-8761-2019-14-3-12-23.

**Vladimir A. Tolpayev<sup>1</sup>,**

*Doctor of Physics and Mathematics, Professor,  
Gazprom Proektirovaniye, LLC, Stavropol Branch  
(419 Lenina st., Stavropol, 355000, Russia),  
e-mail: TolpaevVA@scnipigaz.ru*

**Mariya A. Bondarenko<sup>2</sup>,**

*Candidate of Engineering Science,  
АО „SevKavNIPigaz“  
(419 Lenina st., Stavropol, 355000, Russia),  
e-mail: BondarenkoMA@scnipigaz.ru*

**Vladimir V. Zaharov<sup>3</sup>,**

*Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor,  
Stavropol State Agrarian University  
(12 Zootechnical lane, Stavropol, 355017, Russia),  
e-mail: vvakharov@mail.ru*

**Aleksandr M. Kravtsov<sup>4</sup>,**

*Candidate of Physics and Mathematics,  
Gazprom Proektirovaniye, LLC, Stavropol Branch  
(419 Lenina st., Stavropol, 355000, Russia),  
e-mail: KravcovAM@scnipiaz.ru*

**Musheg T. Petrosyants<sup>5</sup>,**

*Junior Researcher,  
Gazprom Proektirovaniye, LLC, Stavropol Branch  
(419 Lenina st., Stavropol, 355000, Russia),  
e-mail: PetrosyancMT@scnipigaz.ru*

## **Applied Filtration Model of Compressible Fluid to a Well in a Porous Medium**

A filtration law with kinematic correction for compressible fluid filtered in a porous medium is proposed. In the approximation of a plane wave, asymptotic solutions of the filtration equations were obtained in a closed form according to the Darcy law and according to the amended law with a kinematic correction. The illustrations are presented with graphs of the distribution of pressure and density of the flow of elastic energy in a stream of compressible fluid. The calculated estimates of the size of the filtration area are given for a practical example.

**Keywords:** fluid filtration, filtration law, elastic energy density, flat radial flow

---

<sup>1</sup>V. A. Tolpayev is an organizer of the research.

<sup>2</sup>M. A. Bondarenko systematization of research materials.

<sup>3</sup>V. V. Zaharov, systematization of research materials.

<sup>4</sup>A. M. Kravtsov systematization of research materials, preparation of the manuscript.

<sup>5</sup>M. T. Petrosyants formulates insights and summarizes the results of a collective research.

*References*

1. Barenblatt G. I., Entov V. M., Ryzhik V. M. Dvizhenie zhidkostej i gazov v prirodnyh plastah. M.: Nedra, 1984. 211 s.
2. Porshakov B. P., Romanov B. A. Osnovy termodinamiki i teplotekhniki. M.: Nedra, 1988. 300 s.
3. Uizem Dzh. Linejnye i nelinejnye volny. M.: Mir, 1977. 624 s.
4. Basniev K. S., Kochina I. N., Maksimov V.M. Podzemnaya gidromekhanika. M.: Nedra, 1993. 416 s.
5. Zarembo L. K., Krasil'nikov V. A. Vvedenie v nelinejnyyu akustiku. M.: Nauka, 1981. 519 s.
6. Bondarenko M. A., Kravcov A. M., Prijmenko S. A. Obobshcheniya polinomov Bershtejna v nelinejnyh modelyah processov fil'tracii prirodnogo gaza // Vuzovskaya nauka – Severo-Kavkazskomu regionu: materialy XIV Nauchno-tekhnicheskoj konferencii. Stavropol': SevKavGTU, 2010. S. 153.

*Received: April 19, 2019; accepted for publication May 15, 2019*

**Reference to article**

*Tolpayev V. A., Bondarenko M. A., Zaharov V. V., Kravtsov A. M., Petrosyants M. T. Applied Filtration Model of Compressible Fluid to a Well in a Porous Medium // Scholarly Notes of Transbaikal State University. 2019. Vol. 14, No. 3. PP. 12–23. DOI: 10.21209/2308-8761-2019-14-3-12-23.*

УДК 517.956

DOI: 10.21209/2308-8761-2019-14-3-24-30

*Святослав Евгеньевич Холодовский,  
доктор физико-математических наук, профессор,  
Забайкальский государственный университет  
(672039, Россия, г. Чита, ул. Александрo-Заводская, 30),  
e-mail: hol47@yandex.ru*

### Решение краевых задач для уравнения Пуассона на полуплоскости, ограниченной плёнкой

Рассмотрены краевые задачи для уравнения Пуассона на полуплоскости с неоднородными граничными условиями типа слабо- и сильнопроницаемой плёнки на границе. Выведены формулы, выражающие решения рассмотренных задач через решения классических задач соответственно Дирихле и Неймана на полуплоскости. Доказаны теоремы существования и единственности.

**Ключевые слова:** краевые задачи, слабопроницаемая плёнка, сильнопроницаемая плёнка, метод свёртывания разложений Фурье

При экранировании загрязнённых зон, звуко- и теплоизоляции, при производстве композитных материалов, в нанотехнологиях и т.д. широко применяются разнообразные плёночные покрытия соответствующих объектов. Поэтому большой интерес имеет исследование процессов тепломассопереноса в областях, ограниченных сильно- и слабопроницаемыми плёнками. При решении задач с плёночными включениями, как правило, рассматриваются однородные уравнения или однородные граничные условия [1–5]. В данной статье рассмотрены неоднородные уравнения и граничные условия и выведены формулы, выражающие решения рассмотренных задач с плёнками в квадратурах.

**1. Слабопроницаемая плёнка на границе полуплоскости.** Рассмотрим на полуплоскости  $D(x \in R, y < 0)$  для функции  $u(x, y)$  краевую задачу

$$\Delta u = H(x, y), \quad bu + u_{y|y=0} = h(x), \quad (1)$$

где  $b > 0$  – постоянная;  $H(x, y)$  и  $h(x)$  – заданные функции,  $\Delta u$  – оператор Лапласа, буквенные индексы обозначают соответствующие частные производные. Граничное условие (1) моделирует условие на слабопроницаемой плёнке  $y = 0$  с параметром  $1/b$  [3]. Функции  $h(x)$  и  $H(x, y)$  (1) предполагаются такими, для которых классическая задача Дирихле для уравнения Пуассона на полуплоскости  $D(x \in R, y < 0)$  относительно функции  $F(x, y)$  вида

$$\Delta F = H_1(x, y), \quad y < 0; \quad F_{|y=0} = h(x) \quad (2)$$



корректна, где

$$H_1(x, y) = bH(x, y) + H_y(x, y). \quad (3)$$

Последняя задача (2) решается методом функции Грина, и её решение выражается через заданные функции в квадратурах [6, с. 156]

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^0 G(x, y, \xi, \eta) H_1(\xi, \eta) d\eta + \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi) \frac{\partial G(x, y, \xi, 0)}{\partial \eta} d\xi, \quad (4)$$

где  $G(x, y, \xi, \eta)$  – функция Грина задачи (2)

$$G(x, y, \xi, \eta) = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}{(x - \xi)^2 + (y + \eta)^2}.$$

С помощью метода свёртывания разложений Фурье [3; 4] выразим решение задачи (1) через решение  $F(x, y)$  (4) классической задачи (2).

Рассмотрим вспомогательную задачу на полуплоскости  $y < 0$  относительно функции  $v(x, y)$  для уравнения Лапласа с граничным условием (1):

$$\Delta v = 0, \quad y < 0; \quad bv + v_{y|y=0} = h(x). \quad (5)$$

Выразим решение этой задачи через решение  $F_1(x, y)$  задачи Дирихле для уравнения Лапласа

$$\Delta F_1 = 0, \quad y < 0; \quad F_{1|y=0} = h(x). \quad (6)$$

Предположим сначала, что граничная функция  $h(x)$  (5), (6) разлагается в интеграл Фурье

$$h(x) = \int_0^{\infty} g(x, \lambda) d\lambda, \quad g(x, \lambda) = g_1(\lambda) \sin \lambda x + g_2(\lambda) \cos \lambda x, \quad (7)$$

где  $g_{1,2}(\lambda)$  – коэффициенты Фурье функции  $h(x)$

$$g_1(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \sin \lambda x dx, \quad g_2(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \cos \lambda x dx. \quad (8)$$

Отсюда, применяя метод Фурье, решение задачи Дирихле (6) получим в виде

$$F_1(x, y) = \int_0^{\infty} e^{\lambda y} g(x, \lambda) d\lambda, \quad y < 0. \quad (9)$$

Решение задачи (5) также будем искать в виде разложения Фурье

$$v(x, y) = \int_0^{\infty} p(\lambda) e^{\lambda y} g(x, \lambda) d\lambda, \quad y < 0, \quad (10)$$

где  $p(\lambda)$  – искомая функция. Функция  $v(x, y)$  (10) при  $y < 0$  удовлетворяет уравнению Лапласа (5) (при условии сходимости и дифференцируемости интеграла (10)). С учётом разложения функции  $h(x)$  (7) из граничного условия (5) для функции  $p(\lambda)$  получим алгебраическое уравнение, решение которого имеет вид

$$p(\lambda) = \frac{1}{\lambda + b}.$$

Отсюда решение (10) задачи (5) получим в виде

$$v(x, y) = \int_0^{\infty} \frac{e^{\lambda y} g(x, \lambda)}{\lambda + b} d\lambda, \quad y < 0. \quad (11)$$

Найденное решение (11) задачи (5) содержит двукратные несобственные интегралы (внешний и внутренний в коэффициентах Фурье (8)) от осциллирующих тригонометрических функций. При этом граничная функция  $h(x)$  должна удовлетворять необходимому условию [7, с. 529]

$$h(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \pm\infty. \quad (12)$$

Заменяя в разложении  $F_1(x, y)$  (9) переменную  $y$  на  $y - t$ , умножая полученное равенство на  $e^{-bt}$  и интегрируя по  $t \in (0, \infty)$ , получим формулу

$$\int_0^{\infty} e^{-bt} F_1(x, y - t) dt = \int_0^{\infty} \frac{e^{\lambda y} g(x, \lambda)}{\lambda + b} d\lambda, \quad y < 0.$$

Отсюда решение (11) задачи (5) непосредственно выражается через решение  $F_1(x, y)$  задачи Дирихле (6) по формуле

$$v(x, y) = \int_0^{\infty} e^{-bt} F_1(x, y - t) dt. \quad (13)$$

Решение (13) задачи (5) с одной стороны проще решения (11), полученного методом Фурье, а с другой стороны решение (13) справедливо для более широкого класса граничных функций  $h(x)$

$$h(x) = O(e^{\gamma|x|}), \quad x \rightarrow \pm\infty, \quad 0 < \gamma < b \quad (14)$$

по сравнению с классом функций (12).

Представим решение исходной задачи (1) в виде (13)

$$u(x, y) = \int_0^{\infty} e^{-bt} F(x, y - t) dt, \quad (15)$$

где функция  $F(x, y)$  принадлежит классу (14) и удовлетворяет граничному условию Дирихле (2). При этом функция (15) удовлетворяет граничному условию (1) тождественно для любой дифференцируемой функции  $F(x, y)$  класса (14). Пусть функция  $F(x, y)$ , кроме граничного условия Дирихле (2), удовлетворяет в полуплоскости  $y < 0$  уравнению Пуассона (2):  $\Delta F = H_1(x, y)$  с некоторой правой частью  $H_1(x, y)$ . Подберём функцию  $H_1(x, y)$  так, чтобы функция  $u(x, y)$  (15) удовлетворяла уравнению Пуассона (1):  $\Delta u = H(x, y)$  с заданной функцией  $H(x, y)$ . Отсюда с учётом уравнения (2):  $\Delta F = H_1(x, y)$  для функции  $H_1(x, y)$  получим интегральное уравнение

$$\int_0^{\infty} e^{-bt} H_1(x, y - t) dt = H(x, y). \quad (16)$$

Для нахождения функции  $H_1(x, y)$  продифференцируем уравнение (16) по  $y$  и вычислим полученный интеграл по частям:

$$\int_0^{\infty} e^{-bt} \frac{\partial H_1(x, y - t)}{\partial z} dt = H_1(x, y) - b \int_0^{\infty} e^{-bt} H_1(x, y - t) dt = H_y(x, y),$$

где  $z = y - t$ , при этом в формуле интегрирования по частям полагаем  $u(t) = e^{-bt}$ ,  $dv(t) = -b \partial H_1 / \partial z \cdot dt \Rightarrow du(t) = -e^{-bt} dt$ ,  $v(t) = -H_1(x, y - t)$ . Отсюда с учётом равенства (16) найдём функцию  $H_1(x, y)$  в виде (3).

**Теорема 1.** Если функция  $F(x, y)$  является решением корректной задачи Дирихле (2), то решение задачи (1) существует, единственно и выражается через функцию  $F(x, y)$  по формуле (15).

Существование решения задачи (1) в виде (15) доказано выше.

Функция (15) представляет собой оператор  $u(x, y) = A[F(x, y)]$ , действующий на функцию  $F(x, y)$  по одной переменной  $y$ . Построим оператор, обратный оператору  $A$ . Для этого, дифференцируя равенство (15) по  $y$  и вычисляя полученный интеграл по частям, найдём

$$F(x, y) = bu(x, y) + u_y(x, y), \quad (17)$$

где  $u(x, y)$  – решение задачи (1). Полученная функция (17) с учётом условий задачи (1) удовлетворяет условиям задачи (2), что проверяется непосредственно. При этом функция  $F(x, y)$  по формуле (17) и функция  $u(x, y)$  по формуле (15) определяются однозначно. Отсюда в силу корректности задачи (2) следует единственность решения вида (15) задачи (1). Теорема доказана.

**2. Сильнопроницаемая плёнка на границе полуплоскости.** Пусть полуплоскость  $D(x \in R, y < 0)$  ограничена сильнопроницаемой плёнкой с параметром  $1/a$ . Для функции  $u(x, y)$  при  $y < 0$  рассмотрим соответствующую задачу [3]

$$\Delta u = H(x, y), \quad au_y + u_{yy}|_{y=0} = h(x), \quad (18)$$

где функции  $H(x, y)$  и  $h(x)$  предполагаются такими, для которых классическая задача Неймана вида

$$\Delta F = H_1(x, y), \quad y < 0; \quad F_{y|y=0} = h(x) \quad (19)$$

корректна, где

$$H_1(x, y) = aH(x, y) + H_y(x, y). \quad (20)$$

Решение задачи (19) строится в квадратурах [6, с. 156]

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^0 G(x, y, \xi, \eta) H_1(\xi, \eta) d\eta - \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi) G(x, y, \xi, 0) d\xi, \quad (21)$$

где  $G(x, y, \xi, \eta)$  – функция Грина задачи (19)

$$G(x, y, \xi, \eta) = \frac{1}{4\pi} \ln[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2] + \frac{1}{4\pi} \ln[(x - \xi)^2 + (y + \eta)^2].$$

Решение задачи (18) будем искать в виде (15)

$$u(x, y) = \int_0^{\infty} e^{-at} F(x, y - t) dt, \quad (22)$$

где функция  $F(x, y)$  – решение задачи (19). При этом функция (22) удовлетворяет граничному условию (18) тождественно для любой функции  $F(x, y)$ , удовлетворяющей условию Неймана (19) класса (14). Подставляя функцию  $u(x, y)$  (22) в уравнение Пуассона (18) с учётом уравнения (19), получим интегральное уравнение относительно функции  $H_1(x, y)$  вида

$$\int_0^{\infty} e^{-at} H_1(x, y - t) dt = H(x, y).$$

Решение этого уравнения строится аналогично уравнению (16) и имеет вид (20).

**Теорема 2.** Если функция  $F(x, y)$  является решением корректной задачи Неймана (19) (с точностью до аддитивной постоянной), то решение задачи (18) существует, единственно (с точностью до аддитивной постоянной) и выражается через функцию  $F(x, y)$  по формуле (22).

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 1, при этом оператор, обратный оператору (22), имеет вид

$$F(x, y) = au(x, y) + u_y(x, y).$$

Таким образом, решения задач (1) и (18) строятся по формулам (15), (4) и (22), (21) в квадратурах.

### Список литературы

1. Васильев Б. А. Плоская стационарная задача теории теплопроводности для составной клиновидной области // Дифференциальные уравнения. 1984. Т. 20, № 3. С. 530–533.
2. Холодовский С. Е. О многослойных плёнках на границе полупространства // Математические заметки. 2016. Т. 99, вып. 3. С. 421–427.
3. Холодовский С. Е. Решение краевой задачи для уравнения Лапласа в кусочно-однородной полуплоскости, ограниченной слабопроницаемой плёнкой // Обзорение прикладной и промышленной математики. 2018. Т. 25, вып. 2. С. 187–188.
4. Холодовский С. Е. Метод свёртывания разложений Фурье в решении краевых задач с пересекающимися линиями сопряжения // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2007. Т. 47, № 9. С. 1550–1556.
5. Холодовский С. Е. Метод свёртывания разложений Фурье. Случай трещины (завесы) в неоднородном пространстве // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45, № 8. С. 1204–1208.
6. Арсенин В. Я. Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1974. 735 с.
7. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука, 1962. Т. 3. 656 с.

*Статья поступила в редакцию 29.04.2019; принята к публикации 18.05.2019*

### Библиографическое описание статьи

Холодовский С. Е. Решение краевых задач для уравнения Пуассона на полуплоскости, ограниченной плёнкой // Учёные записки Забайкальского государственного университета. 2019. Т. 14, № 3. С. 24–30. DOI: 10.21209/2308-8761-2019-14-3-24-30.

*Svyatoslav Ye. Kholodovskii,*  
*Doctor of Physics and Mathematics, Professor,*  
*Transbaikal State University*  
*(30 Aleksandro-Zavodskaya st., Chita, Russia, 672039),*  
*e-mail: hol47@yandex.ru*

## Solving Boundary Value Problems for the Poisson Equation on a Half-Plane Bounded by a Film

Boundary-value problems for the Poisson equation on half-planes with inhomogeneous boundary conditions of the type of weakly and strongly permeable films on the boundary are considered. The formulas expressing solutions to the problems considered through solutions of the classical problems of Dirichlet and Neumann, respectively, on a half-plane, are derived. The theorems of existence and uniqueness are proved.

**Keywords:** boundary value problems, weakly permeable film, strongly permeable film, method of convolution of Fourier expansions

### References

1. Vasil'ev B. A. Ploskaya stacionarnaya zadacha teorii teploprovodnosti dlya sostavnoj klinovidnoj oblasti // *Differencial'nye uravneniya*. 1984. T. 20, № 3. S. 530–533.
2. Holodovskij S. E. O mnogoslujnyh plynkah na granice poluprostranstva // *Matematicheskie zametki*. 2016. T. 99, vyp. 3. S. 421–427.
3. Holodovskij S. E. Reshenie kraevoj zadachi dlya uravneniya Laplasya v kusochno-odnorodnoj poluploskosti, ogranichennoj slabopronicaemoj plynkoj // *Obozrenie prikladnoj i promyshlennoj matematiki*. 2018. T. 25, vyp. 2. S. 187–188.
4. Holodovskij S. E. Metod svyortyvaniya razlozhenij Fur'e v reshenii kraevyh zadach s peresekayushchimisya liniyami sopryazheniya // *ZHurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki*. 2007. T. 47, № 9. S. 1550–1556.
5. Holodovskij S. E. Metod svyortyvaniya razlozhenij Fur'e. Sluchaj treshchiny (zavesy) v neodnorodnom prostranstve // *Differencial'nye uravneniya*. 2009. T. 45, № 8. S. 1204–1208.
6. Arsenin V. Ya. *Metody matematicheskoj fiziki i special'nye funkicii*. M.: Nauka, 1974. 735 s.
7. Fihhtengol'c G. M. *Kurs differencial'nogo i integral'nogo ischisleniya*. M.: Nauka, 1962. T. 3. 656 s.

*Received: April 29, 2019; accepted for publication May 18, 2019*

### Reference to article

*Kholodovskii S. Ye.* Solving Boundary Value Problems for the Poisson Equation on a Half-Plane Bounded by a Film // *Scholarly Notes of Transbaikal State University*. 2019. Vol. 14, No 3. PP. 24–30. DOI: 10.21209/2308-8761-2019-14-3-24-30.

УДК 517.956

DOI: 10.21209/2308-8761-2019-14-3-31-40

*Святослав Евгеньевич Холодовский,*  
доктор физико-математических наук, профессор,  
Забайкальский государственный университет  
(672039, Россия, г. Чита, ул. Александро-Заводская, 30),  
e-mail: hol47@yandex.ru

*Мария Геннадьевна Хонина,*  
студентка,  
Забайкальский государственный университет  
(672039, Россия, г. Чита, ул. Александро-Заводская, 30),  
e-mail: mariahonina28@gmail.com

### Однослойные плёнки на границе круга для уравнения Пуассона

Рассмотрены краевые задачи для уравнения Пуассона в круге, ограниченном слабо- или сильнопроницаемой плёнкой. Выведены граничные условия на плёнках. Доказаны теоремы существования и единственности. Решения краевых задач получены в квадратурах.

**Ключевые слова:** краевые задачи, слабопроницаемая плёнка, сильнопроницаемая плёнка, метод свёртывания разложений Фурье

Актуальность краевых задач в областях, ограниченных плёнками, обусловлена развитием нанотехнологий, созданием композитных материалов, миниатюризацией приборов и т. д. В работах [1–3] рассматриваются прямолинейные плёночные включения и плёночные границы. В данной статье рассмотрены кольцевые плёночные границы областей.

**1. Вывод граничного условия на кольцевой слабопроницаемой плёнке.** Рассмотрим на плоскости с полярными координатами  $(r, \alpha)$  круг  $D = (r < 1) \times (0 < \alpha < 2\pi)$ , ограниченный слабопроницаемой плёнкой  $r = 1$ . Следуя работам [1–3], слабопроницаемую плёнку моделируем бесконечно тонким слоем с бесконечно малой проницаемостью. При этом слабопроницаемая плёнка характеризуется параметром

$$B = \lim_{\Delta r \rightarrow 0, k_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{k_0}, \quad (1.1)$$

где  $\Delta r$  – толщина слоя, вырождающегося в плёнку,  $k_0$  – его проницаемость.

Выведем граничное условие для функции  $u(r, \alpha)$  на слабопроницаемой плёнке  $r = 1$ . Для этого предположим, что в окрестности границы  $r = 1$  функция  $u(r, \alpha)$  удовлетворяет уравнению Лапласа

$$r(ru_r)_r + u_{\alpha\alpha} = 0, \quad (1.2)$$

где буквенные индексы  $r$  и  $\alpha$  обозначают соответствующие частные производные, например,  $u_{0,r} = \partial u_0 / \partial r$ . С физической точки зрения в данном случае в окрестности границы  $r = 1$  имеет место некоторый установившийся процесс тепломассопереноса с потенциалом  $u(r, \alpha)$ , где  $u(r, \alpha)$  – температура, давление, концентрация соответственно в задачах теплопроводности, фильтрации, диффузии [4, с. 30; 5, с. 7]. Заменяем плёнку  $r = 1$  слоем  $D_0 = (1 < r < b) \times (0 < \alpha < 2\pi)$  конечной толщины  $\Delta r = b - 1$  и проницаемости  $k_0$  при идеальном контакте слоя  $D_0$  с кругом  $D$  и с внешней средой. Отсюда, обозначая потенциал в слое  $D_0$  через  $u_0(r, \alpha)$ , на общей границе  $r = 1$  областей  $D$  и  $D_0$  получим классические условия сопряжения, выражающие непрерывность потенциала и нормальной скорости на линии  $r = 1$  разрыва проницаемости

$$u|_{r=1} = u_0|_{r=1}, \quad ku_r|_{r=1} = k_0 u_{0,r}|_{r=1}, \quad (1.3)$$

где постоянная  $k > 0$  – проницаемость круга  $D$ . При этом функция  $u_0(r, \alpha)$  в слое  $D_0$  также удовлетворяет уравнению Лапласа (1.2)

$$r(ru_{0,r})_r + u_{0,\alpha\alpha} = 0. \quad (1.4)$$

Пусть на внешней границе  $r = b$  определены значения потенциала  $h(\alpha)$  и нормальной скорости  $V(\alpha)$ . Тогда, применяя теорему Лагранжа о среднем [6, с. 180], с учётом условий (1.3) приращения потенциала и нормальной скорости на границах слоя  $D_0$  получим в виде

$$h(\alpha) - u|_{r=1} = u_0|_{r=b} - u_0|_{r=1} = \frac{\Delta r}{k_0} v_0|_{r=c_1}, \quad (1.5)$$

$$V(\alpha) - v|_{r=1} = v_0|_{r=b} - v_0|_{r=1} = k_0 \Delta r u_{0,rr}|_{r=c_2}, \quad (1.6)$$

где  $v = ku_r$ ,  $v_0 = k_0 u_{0,r}$  – нормальные составляющие скорости к окружности  $r = 1$  соответственно в  $D$  и в  $D_0$ ;  $c_i \in (1, b)$ .

Пусть слой  $D_0$  вырождается в слабопроницаемую плёнку с параметром  $B$ , т. е.  $\Delta r \rightarrow 0$ ,  $k_0 \rightarrow 0$ ,  $\Delta r/k_0 \rightarrow B$  (1.1). Переходя в равенстве (1.6) к пределу при  $\Delta r \rightarrow 0$  ( $b \rightarrow 1$ ),  $k_0 \rightarrow 0$ , для средней части этого равенства с учётом второго условия (1.3):  $v|_{r=1} = v_0|_{r=1}$  в предел получим

$$\lim v_0|_{r=b-0} = \lim v_0|_{r=1+0} = v|_{r=1-0}. \quad (1.7)$$



Отсюда  $\lim v_{0|r=c_1} = v_{|r=1}$  для  $\forall c_1 \in (1, b)$ . Действительно, дифференцируя уравнение (1.4) по  $r$  и умножая полученное равенство на  $r$ , для функции  $s(r, \alpha) = rv_0/k_0 = ru_{0,r}(r, \alpha)$  получим уравнение Лапласа в  $D_0$ :

$$r(rs_r)_r + s_{\alpha\alpha} = 0, \quad (1.8)$$

при этом из (1.7) следует  $\lim s_{|r=b-0} = \lim s_{|r=1+0}$  при  $b \rightarrow 1, k_0 \rightarrow 0$ . Отсюда  $\lim s_{|r=c_1} = \lim s_{|r=1+0}$  для  $\forall c_1 \in (1, b)$ , т.к. иначе график функции  $s(r, \alpha)$  имеет бесконечную кривизну, что противоречит ограниченности  $s_{rr}$  и  $s_{\alpha\alpha}$  в  $D_0$  (1.8).

В результате условия (1.5), (1.6) для слабопроницаемой плёнки  $r = 1$  (при  $b \rightarrow 1, k_0 \rightarrow 0$ ) примут вид

$$u + Bku_{r|r=1-0} = h(\alpha), \quad v_{|r=1-0} = V(\alpha). \quad (1.9)$$

Из полученных условий (1.9) следует, что на слабопроницаемой плёнке нормальная скорость непрерывна, а потенциал терпит разрыв – скачок, равный  $h(\alpha) - u = Bku_{r|r=1}$ , т.е. чтобы «прорвать» слабопроницаемую плёнку на ней нужно поддерживать определённую разность потенциалов. При этом нормальная скорость потока сквозь плёнку пропорциональна разности потенциалов на плёнке:  $Bku_r = \Delta u$  при  $r = 1$ , где

$$\Delta u = h(\alpha) - u, \quad (1.10)$$

что согласуется с физическими представлениями.

При решении краевых задач обычно на границе области задаются либо значения потенциала  $h(\alpha)$ , либо значения нормальной скорости  $V(\alpha)$ .

В учебниках по математической физике рассматриваются граничные условия третьего рода, совпадающие с первым граничным условием (1.9). Граничное условие третьего рода в задачах теплопроводности соответствует условию при теплообмене с внешней средой по закону Ньютона [4, с. 39; 5, с. 179]. Предложенная выше модель граничного условия третьего рода при наличии слабопроницаемой плёнки более физична, т. к. при идеальном контакте области с внешней средой (т.е. без плёнки) в случае граничного условия третьего рода  $u + Bku_{r|r=1} = h(\alpha)$  на границе  $r = 1$  имеет место бесконечно большая скорость теплового потока, обусловленная скачком потенциала (температуры) в точках границы. А именно, в случае скачка потенциала на границе, т.е. при  $\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \Delta u \neq 0$  (1.10), скорость теплового потока  $v = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} k\Delta u/\Delta r = \infty$ . Если же на границе  $r = 1$  имеет место слабопроницаемая плёнка, то в силу непрерывности нормальной скорости на слабопроницаемой плёнке ( $v = v_0$  при  $r = 1$  (1.3)) с учётом (1.1), (1.10) получим конечную скорость в окрестности плёнки:

$$v = v_0 = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} k_0 \frac{\Delta u}{\Delta r} = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{k_0}{\Delta r} \Delta u = \frac{1}{B} [h(\alpha) - u_{|r=1-0}].$$

Отсюда, с частности, следует первое граничное условие (1.9) на плёнке.

Таким образом, граничное условие третьего рода может иметь место лишь при неидеальном контакте области с внешней средой.

В работе [3] дана классификация граничных условий на многослойных плёнках, согласно которой граничные условия на многослойных плёнках бывают первого или второго типов. Для первого типа на внешней стороне плёнки задаются значения искомого потенциала, а для второго типа на внешней стороне плёнки задаются значения нормальной скорости. При этом отмечается, что классическое граничное условие третьего рода является граничным условием первого типа, когда на границе имеет место слабопроницаемая плёнка.

**2. Решение задачи для кольцевой слабопроницаемой плёнки.** Рассмотрим краевую задачу первого типа (1.9) для уравнения Пуассона в круге  $D(r < 1)$ , ограниченном слабопроницаемой плёнкой с параметром  $B$ :

$$r(ru_r)_r + u_{\alpha\alpha} = H(r, \alpha), \quad \gamma u + u_r|_{r=1} = h(\alpha), \quad (2.1)$$

где

$$\gamma = \frac{1}{Bk} > 0, \quad (2.2)$$

функция  $H(r, \alpha) = 0$  в окрестности плёнки  $r = 1 - 0$ . Здесь заданные функции  $H(r, \alpha)$  и  $h(\alpha)$  предполагаются такими, для которых аналогичная классическая задача Дирихле в круге  $D$  (без плёнки) относительно функции  $F(r, \alpha)$

$$r(rF_r)_r + F_{\alpha\alpha} = H_1(r, \alpha), \quad F|_{r=1} = h(\alpha) \quad (2.3)$$

корректна, где

$$H_1(r, \alpha) = \gamma H(r, \alpha) + rH_r(r, \alpha). \quad (2.4)$$

Отметим, что решение задачи Дирихле (2.3) строится в квадратурах [4, с. 170]

$$F(r, \alpha) = \frac{1 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{h(t)dt}{1 + r^2 - 2r \cos(\alpha - t)} + \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} G(r, \alpha, \rho, t) H_1(\rho, t) dt, \quad (2.5)$$

где  $G(r, \alpha, \rho, t)$  – функция Грина задачи (2.3)

$$G(r, \alpha, \rho, t) = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\alpha - t)}{r^2\rho^2 + 1 - 2r\rho \cos(\alpha - t)}.$$

Применяя метод свёртывания разложений Фурье [1; 2], выразим решение задачи

(2.1) через решение  $F(r, \alpha)$  (2.5) задачи Дирихле (2.3).

Рассмотрим две вспомогательные задачи в круге  $r < 1$  для уравнения Лапласа вида

$$r(rw_r)_r + w_{\alpha\alpha} = 0, \quad \gamma w + w_r|_{r=1} = h(\alpha) \quad (2.6)$$

и

$$r(rU_r)_r + U_{\alpha\alpha} = 0, \quad U|_{r=1} = h(\alpha). \quad (2.7)$$

Выразим решение задачи (2.6) через решение задачи Дирихле (2.7). Решение задачи Дирихле (2.7) найдём в виде разложения Фурье

$$U(r, \alpha) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n g_n(\alpha), \quad g_n(\alpha) = a_n \cos n\alpha + b_n \sin n\alpha, \quad (2.8)$$

где  $a_n, b_n$  – коэффициенты Фурье разложения граничной функции  $h(\alpha)$  [7, с. 384]

$$h(\alpha) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} g_n(\alpha), \quad (2.9)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(\alpha) \cos n\alpha \, d\alpha, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(\alpha) \sin n\alpha \, d\alpha. \quad (2.10)$$

Решение задачи (2.6) будем искать в виде

$$w(r, \alpha) = \frac{a_0}{2\gamma} + \sum_{n=1}^{\infty} p_n r^n g_n(\alpha), \quad (2.11)$$

где  $p_n$  – искомые коэффициенты,  $\gamma$  имеет вид (2.2). Функция  $w(r, \alpha)$  (2.11) при  $r < 1$  удовлетворяет уравнению Лапласа (2.6) (при условии сходимости и дифференцируемости ряда (2.11)). Из граничного условия (2.6) с учётом (2.9) найдём

$$p_n = \frac{1}{n + \gamma}.$$

Отсюда решение (2.11) задачи (2.6) примет вид

$$w(r, \alpha) = \frac{a_0}{2\gamma} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n g_n(\alpha)}{n + \gamma}, \quad (2.12)$$

где функции  $g_n(\alpha)$  определены в (2.8). Найденное решение  $w(r, \alpha)$  задачи (2.6) содержит осциллирующие тригонометрические функции (2.8) и интегралы от них (2.10), т. е. имеет достаточно сложный вид. Приведём решение (2.12) к виду, не содержащему

му осциллирующих функций.

Заменяя в разложении  $U(r, \alpha)$  (2.8) переменную  $r < 1$  на  $e^{-t}r < 1$ , где  $t > 0$ , умножая полученное равенство на  $e^{-\gamma t}$  и интегрируя по  $t \in (0, \infty)$ , получим формулу

$$\int_0^{\infty} e^{-\gamma t} U(e^{-t}r, \alpha) dt = \frac{a_0}{2\gamma} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n g_n(\alpha)}{n + \gamma}.$$

Отсюда функцию (2.12) приведём к виду без разложений Фурье

$$w(r, \alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} U(e^{-t}r, \alpha) dt. \quad (2.13)$$

Функция (2.13) удовлетворяет условиям задачи (2.6), что проверяется непосредственно, при этом учитывается, что если  $U(r, \alpha)$  – решение уравнения Лапласа (2.7), то и функция  $U(cr, \alpha)$  также является решением этого уравнения, где  $c = const$ . Для проверки граничного условия (2.6) приведём интегралы в левой части к одному интегралу посредством интегрирования по частям второго слагаемого в (2.6)

$$w_{r|r=1} = \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} U_z(e^{-t}, \alpha) e^{-t} dt = U|_{r=1} - \gamma \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} U(e^{-t}, \alpha) dt,$$

где  $z = e^{-t}$ , при этом в формуле интегрирования по частям полагаем

$$u(t) = e^{-\gamma t}, \quad dv(t) = U_z(e^{-t}, \alpha) e^{-t} dt \Rightarrow du(t) = -\gamma e^{-\gamma t} dt, \quad v(t) = -U(e^{-t}, \alpha).$$

Представим решение исходной задачи для неоднородного уравнения (2.1) в виде (2.13)

$$u(r, \alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} F(e^{-t}r, \alpha) dt, \quad (2.14)$$

где функция  $F(r, \alpha)$  удовлетворяет граничному условию Дирихле (2.3). При этом функция (2.14) удовлетворяет граничному условию (2.1) тождественно для любой указанной функции  $F(r, \alpha)$ . Пусть функция  $F(r, \alpha)$  в круге  $D(r < 1)$  удовлетворяет уравнению Пуассона (2.3) с некоторой правой частью  $H_1(r, \alpha)$ . Отсюда, подставляя функцию  $u(r, \alpha)$  (2.14) в уравнение (2.1), для функции  $H_1(r, \alpha)$  получим интегральное уравнение

$$\int_0^{\infty} e^{-\gamma t} H_1(e^{-t}r, \alpha) dt = H(r, \alpha). \quad (2.15)$$

Дифференцируя это уравнение по  $r$ , умножая на  $r$  и вычисляя полученный интеграл по частям, находим

$$\int_0^{\infty} e^{-\gamma t} H_{1,z}(e^{-t}r, \alpha) e^{-t}r dt = H_1(r, \alpha) - \gamma \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} H_1(e^{-t}r, \alpha) dt = rH_r(r, \alpha),$$

где  $z = e^{-t}r$ , при этом в формуле интегрирования по частям полагаем

$$u(t) = e^{-\gamma t}, \quad dv(t) = H_{1,z}(e^{-t}r, \alpha) e^{-t}r dt \Rightarrow du(t) = -\gamma e^{-\gamma t} dt, \quad v(t) = -H_1(e^{-t}r, \alpha).$$

Отсюда с учётом равенства (2.15) найдём функцию  $H_1(r, \alpha)$  в виде (2.4).

**Теорема 1.** Если функция  $F(r, \alpha)$  является решением корректной задачи Дирихле (2.3), то решение задачи (2.1) существует, единственно и выражается через функцию  $F(r, \alpha)$  по формуле (2.14), где  $\gamma$  имеет вид (2.2).

**Доказательство.** Существование решения задачи (2.1) в виде (2.14) доказано выше. Функция (2.14) представляет собой оператор  $u(r, \alpha) = L[F(r, \alpha)]$ , действующий на функцию  $F(r, \alpha)$  по одной переменной  $r$ . Построим оператор, обратный оператору  $L$ . Для этого, дифференцируя равенство (2.14) по  $r$ , умножая полученное выражение на  $r$  и вычисляя интеграл по частям, найдём обратный оператор в виде

$$F(r, \alpha) = \gamma u(r, \alpha) + ru_r(r, \alpha), \quad (2.16)$$

где  $u(r, \alpha)$  – решение задачи (2.1). Полученная функция  $F(r, \alpha)$  (2.16) с учётом условий задачи (2.1) удовлетворяет условиям задачи (2.3), что проверяется непосредственно. При этом функция  $F(r, \alpha)$  по формуле (2.16) и функция  $u(r, \alpha)$  по формуле (2.14) выражаются одна через другую однозначно. Отсюда в силу корректности задачи (2.3) следует единственность решения вида (2.14) задачи (2.1). Теорема доказана.

**3. Вывод граничного условия на кольцевой сильнопроницаемой плёнке.** Пусть теперь круг  $D = (r < 1) \times (0 < \alpha < 2\pi)$  ограничен сильнопроницаемой плёнкой  $r = 1$ , которую моделируем бесконечно тонким слоем с бесконечно большой проницаемостью. При этом сильнопроницаемая плёнка характеризуется параметром [1; 3]:

$$A = \lim_{\Delta r \rightarrow 0, k_0 \rightarrow \infty} k_0 \Delta r, \quad (3.1)$$

где  $\Delta r$  и  $k_0$  – толщина и проницаемость слоя, вырождающегося в плёнку.

Для вывода граничного условия на сильнопроницаемой плёнке  $r = 1$ , как и выше, заменим её слоем  $D_0 = (1 < r < b) \times (0 < \alpha < 2\pi)$  толщины  $\Delta r = b - 1$  и проницаемости  $k_0$  при идеальном контакте слоя  $D_0$  с кругом  $D$  и с внешней средой. Отсюда

на границе  $r = 1$  областей  $D$  и  $D_0$  имеют место классические условия сопряжения (1.3). При этом приращения потенциала и нормальной скорости на границах слоя  $D_0$  имеют вид (1.5), (1.6).

Пусть слой  $D_0$  вырождается в сильнопроницаемую плёнку с параметром  $A$  (3.1). Переходя в равенстве (1.5) к пределу при  $\Delta r \rightarrow 0$  ( $b \rightarrow 1$ ),  $k_0 \rightarrow \infty$ , для средней части этого равенства с учётом первого условия (1.3):  $u|_{r=1} = u_0|_{r=1}$  в пределе получим  $\lim u_0|_{r=b-0} = \lim u_0|_{r=1+0} = u|_{r=1-0}$ . Отсюда

$$\lim u_0|_{r=c_2} = u|_{r=1-0} \quad (3.2)$$

для  $\forall c_2 \in (1, b)$ . Дифференцируя дважды выражение (3.2) по свободной переменной  $\alpha$ , с учётом уравнений Лапласа (1.2) и (1.4), получим  $\lim(ru_{0,r})_{r=c_2} = (ru_r)_{r=1-0}$ , т. е.  $\lim(ru_{0,rr} + u_{0,r})_{r=c_2} = (ru_r)_{r=1-0}$ .

Отсюда  $\lim u_{0,rr}|_{r=c_2} = (ru_r)_{r=1-0}$ , т. к. из ограниченности скорости  $v_0 = k_0 u_{0,r}$  в кольце  $D_0$  следует  $u_{0,r} \rightarrow 0$  при  $k_0 \rightarrow \infty$ . Тогда из равенств (1.5), (1.6) при  $\Delta r \rightarrow 0$ ,  $k_0 \rightarrow \infty$ ,  $k_0 \Delta r \rightarrow A$  получим граничные условия на сильнопроницаемой плёнке в виде

$$u|_{r=1} = h(\alpha), \quad ku_r + A(ru_r)_{r=1} = V(\alpha). \quad (3.3)$$

Из условий (3.3) следует, что на сильнопроницаемой плёнке потенциал непрерывен, а нормальная скорость терпит разрыв:  $V(\alpha) - ku_r = A(ru_r)_{r=1}$ . Последнее, например, в теории фильтрации объясняется тем, что частицы жидкости, попадая в сильнопроницаемую плёнку, двигаются в ней и могут вытекать в точках, отличных от точек втекания, что согласуется с физическими представлениями.

**4. Решение задачи для кольцевой сильнопроницаемой плёнки.** Рассмотрим краевую задачу второго типа (3.3) для уравнения Пуассона в круге  $D(r < 1)$ , ограниченном сильнопроницаемой плёнкой с параметром  $A$ :

$$r(ru_r)_r + u_{\alpha\alpha} = H(r, \alpha), \quad \gamma u_r + (ru_r)_{r=1} = V(\alpha), \quad (4.1)$$

где

$$\gamma = \frac{k}{A} > 0, \quad (4.2)$$

функция  $H(r, \alpha) = 0$  в окрестности плёнки  $r = 1 - 0$ . Здесь заданные функции  $H(r, \alpha)$  и  $h(\alpha)$  являются такими, для которых аналогичная классическая задача Неймана в круге  $D$  (без плёнки) относительно функции  $F(r, \alpha)$

$$r(rF_r)_r + F_{\alpha\alpha} = H_1(r, \alpha), \quad F_r|_{r=1} = V(\alpha) \quad (4.3)$$

корректна, где

$$H_1(r, \alpha) = \gamma H(r, \alpha) + rH_r(r, \alpha). \quad (4.4)$$

(решение задачи (4.3) единственно с точностью до аддитивной постоянной).

Пусть решение  $F(r, \alpha)$  задачи Неймана (4.3) известно [8, с. 442]. Выразим решение задачи (4.1) через функцию  $F(r, \alpha)$  (4.3). Решение задачи (4.1) будем искать в виде (2.14)

$$u(r, \alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} F(e^{-t}r, \alpha) dt, \quad (4.5)$$

где функция  $F(r, \alpha)$  – решение задачи (4.3), постоянная  $\gamma$  имеет вид (4.2). Отсюда функция (4.5) удовлетворяет граничному условию (4.1) тождественно для любой функции  $F(r, \alpha)$ , удовлетворяющей граничному условию Неймана (4.3), что проверяется непосредственно, при этом второе слагаемое в граничном условии (4.1) вычисляется интегрированием по частям:

$$[ru_r(r, \alpha)]_{r|_{r=1}} = F_{r|_{r=1}} - \gamma \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} F_z(e^{-t}, \alpha) e^{-t} dt = V(\alpha) - \gamma u_{r|_{r=1}},$$

где  $z = e^{-t}$ . Из уравнения Пуассона (4.1) с учётом уравнения (4.3), для функции  $H_1(r, \alpha)$  получим интегральное уравнение (2.15), решение которого имеет вид (4.4).

**Теорема 2.** *Если функция  $F(r, \alpha)$  является решением корректной задачи Неймана (4.3) (с точностью до аддитивной постоянной), то решение задачи (4.1) существует, единственно (с точностью до аддитивной постоянной) и выражается через функцию  $F(r, \alpha)$  по формуле (4.5).*

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 1.

### Список литературы

1. Холодовский С. Е. Метод свёртывания разложений Фурье в решении краевых задач с пересекающимися линиями сопряжения // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2007. Т. 47, № 9. С. 1550–1556.
2. Холодовский С. Е. Метод свёртывания разложений Фурье. Случай трещины (завесы) в неоднородном пространстве // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45, № 8. С. 1204–1208.
3. Холодовский С. Е. О многослойных плёнках на границе полупространства // Математические заметки. 2016. Т. 99, вып. 3. С. 421–427.
4. Арсенин В. Я. Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1974. 735 с.
5. Положий Г. Н. Уравнения математической физики. М.: Высшая школа, 1964. 560 с.
6. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа. М.: Наука, 1968. Т. 1. 440 с.
7. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа. М.: Наука, 1968. Т. 2. 464 с.
8. Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н. Сборник задач по математической физике. М.: Наука, 1980. 680 с.

Статья поступила в редакцию 10.05.2019; принята к публикации 15.06.2019

**Библиографическое описание статьи**

Холодовский С. Е., Хонина М. Г. Однослойные плёнки на границе круга для уравнения Пуассона // Учёные записки Забайкальского государственного университета. 2019. Т. 14, № 3. С. 31–40. DOI: 10.21209/2308-8761-2019-14-3-31-40.

**Svyatoslav Ye. Kholodovskii,**

*Doctor of Physics and Mathematics, Professor,*

*Transbaikal State University*

*(30 Aleksandro-Zavodskaya st., Chita, Russia, 672039),*

*e-mail: hol47@yandex.ru*

**Mariya G. Honina,**

*Student,*

*Transbaikal State University*

*(30 Aleksandro-Zavodskaya st., Chita, Russia, 672039),*

*e-mail: mariahonina28@gmail.com*

**Single-Layer Films on the Boundary of the Circle for the Poisson Equation**

Boundary value problems for the Poisson equation in a circle bounded by a weakly or strongly permeable on films are derived. Derived boundary conditions on films. The derived theorems of existence and uniqueness are proved. Solutions of boundary value problems are obtained in quadratures.

**Keywords:** boundary value problems, weakly permeable film, strongly permeable film, method of convolution of Fourier expansions

**References**

1. Holodovskij S. E. Metod svyortyvaniya razlozhenij Fur'e v reshenii kraevyh zadach s peresekayushchimisya liniyami sopryazheniya // Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoy fiziki. 2007. T. 47, № 9. S. 1550–1556.
2. Holodovskij S. E. Metod svyortyvaniya razlozhenij Fur'e. Sluchaj treshchiny (zavesy) v neodnorodnom prostranstve // Differencial'nye uravneniya. 2009. T. 45, № 8. S. 1204–1208.
3. Holodovskij S. E. O mnogoslojnyh plyonkah na granice poluprostranstva // Matematicheskie zametki. 2016. T. 99, vyp. 3. S. 421–427.
4. Arsenin V. YA. Metody matematicheskoy fiziki i special'nye funkicii. M.: Nauka, 1974. 735 s.
5. Polozhij G. N. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M.: Vysshaya shkola, 1964. 560 s.
6. Fihtengol'c G.M. Osnovy matematicheskogo analiza. M.: Nauka, 1968. T. 1. 440 s.
7. Fihtengol'c G.M. Osnovy matematicheskogo analiza. M.: Nauka, 1968. T. 2. 464 s.
8. Budak B. M., Samarskij A. A., Tihonov A. N. Sbornik zadach po matematicheskoy fizike. M.: Nauka, 1980. 680 s.

*Received: May 10, 2019; accepted for publication June 15, 2019*

**Reference to article**

*Kholodovskii S. Ye., Honina M. G. Single-Layer Films on the Boundary of the Circle for the Poisson Equation // Scholarly Notes of Transbaikal State University. 2019. Vol. 14, No. 3. PP. 31–40. DOI: 10.21209/2308-8761-2019-14-3-31-40.*



УДК 517.956

DOI: 10.21209/2308-8761-2019-14-3-41-48

*Галина Михайловна Яковлева,*  
*магистрант,*  
*Забайкальский государственный университет*  
*(672039, Россия, г. Чита, ул. Александрo-Заводская, 30),*  
*e-mail: y.g.m@mail.ru*

### Решение краевых задач для уравнения Лапласа на полуплоскости, ограниченной слабопроницаемой плёнкой и содержащей сильнопроницаемую плёнку

Рассмотрены краевые задачи для уравнения Лапласа на кусочно-однородной полуплоскости, ограниченной слабопроницаемой плёнкой и состоящей из двух квадрантов, разделённых сильнопроницаемой плёнкой. Методом свёртывания разложений Фурье решение задачи выражено в квадратурах через решение классической задачи Дирихле на однородной полуплоскости (без плёнок).

**Ключевые слова:** краевые задачи, сильнопроницаемая плёнка, слабопроницаемая плёнка, метод свёртывания разложений Фурье

При решении практических задач для управления потоками тепломассопереноса применяются сильно- и слабопроницаемые плёнки, моделирующие экраны, изоляторы, дренажи, проводники, мембраны и т. д. Поэтому большой интерес имеет исследование процессов тепломассопереноса в областях с плёночными включениями и плёночными границами. В математических моделях задачи с плёнками описываются краевыми задачами математической физики с обобщёнными условиями сопряжения и обобщёнными граничными условиями на плёнках. При этом для установившихся процессов искомые потенциалы внутри области удовлетворяют уравнению Лапласа. В литературе при решении краевых задач с плёнками, как правило, рассматриваются одиночные плёночные включения. В данной статье рассматривается комбинация плёночного включения и плёночной границы для различных типов плёнок.

Рассмотрим на кусочно-однородной полуплоскости  $D(x \in R, y < 0)$ , состоящей из двух квадрантов  $D_1(x < 0, y < 0)$  и  $D_2(x > 0, y < 0)$ , для функций  $u_i(x, y)$  в  $D_i$  задачу

$$\Delta u_1 = 0, \quad Bu_1 + \partial_y u_1|_{y=0} = 0, \quad x < 0, \quad (1)$$

$$\Delta u_2 = 0, \quad Bu_2 + \partial_y u_2|_{y=0} = h(x), \quad x > 0, \quad (2)$$

$$x = 0 : \quad u_2 = u_1, \quad k_2 \partial_x u_2 - k_1 \partial_x u_1 = A \partial_x^2 u_1, \quad (3)$$

где  $B, A$  – положительные постоянные;  $h(x)$  – заданная кусочно-непрерывная ограниченная при  $x \in (0, \infty)$  функция,  $\Delta u$  – оператор Лапласа, постоянные  $k_i > 0$  характеризуют проницаемость соответствующей зоны  $D_i$ ,  $\partial_y = \partial/\partial y$ ,  $\partial_x^2 = \partial^2/\partial x^2$ . Граничные условия (1), (2) и условия сопряжения (3) моделируют соответственно условия на слабопроницаемой плёнке  $y = 0$  с параметром  $1/B$  и условия на сильнопроницаемой плёнке  $x = 0$  с параметром  $A$  [1]. В задаче (1)–(3) граничные условия однородны при  $x < 0$ , что не умаляет общности, т. к. задача с однородными условиями при  $x > 0$  решается аналогично, а в общем случае неоднородных граничных условий при  $x \in R$  решение задачи имеет вид суммы решений указанных задач.

Наряду с задачей (1)–(3) рассмотрим на однородной полуплоскости  $D(x \in R, y < 0)$  аналогичную классическую задачу Дирихле с сохранением граничной функции

$$\Delta F = 0, \quad y < 0; \quad F|_{y=0} = f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ h(x), & x > 0. \end{cases} \quad (4)$$

Отметим, что решение задачи Дирихле (4) строится в квадратурах по формуле Пуассона [2, с. 327]:

$$F(x, y) = -\frac{y}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{h(\xi)d\xi}{(x - \xi)^2 + y^2}, \quad y < 0.$$

Для кусочно-постоянной граничной функции

$$h_i(x) = \begin{cases} c_i, & x \in (x_i, x_{i+1}), \\ 0, & x \notin (x_i, x_{i+1}) \end{cases}$$

( $c_i, x_i, x_{i+1}$  – постоянные,  $x_i > 0$ ) решение задачи Дирихле (4) строится в конечном виде

$$F_i(x, y) = \frac{c_i}{\pi} \left( \operatorname{arctg} \frac{x - x_{i+1}}{y} - \operatorname{arctg} \frac{x - x_i}{y} \right). \quad (5)$$

При этом, аппроксимируя с заданной точностью произвольную кусочно-непрерывную граничную функцию  $h(x)$  кусочно-постоянной функцией

$$h(x) = \sum_{i=1}^n h_i(x),$$

решение задачи Дирихле (4) получим в конечном виде (с той же точностью в силу корректности задачи Дирихле (4)):

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^n F_i(x, y),$$

где функции  $F_i(x, y)$  имеют вид (5). Отметим, что на практике граничные функции строятся приближённо посредством той или иной аппроксимации точечных опытных данных.

Методом свёртывания разложений Фурье [1; 3] выразим решение задачи (1)–(3) через решение  $F(x, y)$  задачи Дирихле (4). Для этого выведем две формулы для функций, тождественно удовлетворяющих условиям на плёнках  $y = 0$  и  $x = 0$  (1)–(3). Рассмотрим две вспомогательные задачи.

Первая задача на однородной полуплоскости  $D(x \in R, y < 0)$  имеет вид

$$\Delta v = 0, \quad Bv + \partial_y v|_{y=0} = f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ h(x), & x > 0. \end{cases} \quad (6)$$

Выразим решение  $v(x, y)$  этой задачи через решение  $F(x, y)$  задачи Дирихле (4).

Предположим сначала, что граничная функция  $f(x)$  (4), (6) разлагается в интеграл Фурье с коэффициентами Фурье  $f_{1,2}(\lambda)$  [4, с. 529]:

$$f(x) = \int_0^{\infty} g(x, \lambda) d\lambda, \quad g(x, \lambda) = f_1(\lambda) \sin \lambda x + f_2(\lambda) \cos \lambda x. \quad (7)$$

Отсюда, применяя метод Фурье, решение задачи Дирихле (4) получим в виде

$$F(x, y) = \int_0^{\infty} e^{\lambda y} g(x, \lambda) d\lambda, \quad y < 0. \quad (8)$$

Будем искать решение задачи (6) также в виде интеграла Фурье

$$v(x, y) = \int_0^{\infty} a(\lambda) e^{\lambda y} g(x, \lambda) d\lambda, \quad y < 0, \quad (9)$$

где  $a(\lambda)$  – искомая функция,  $g(x, \lambda)$  имеет вид (7), при этом функция  $v(x, y)$  (9) удовлетворяет уравнению Лапласа (6) (при условии сходимости и дифференцируемости интеграла (9)). Из граничного условия (6) с учётом разложения (7) находим

$$a(\lambda) = \frac{1}{\lambda + B}.$$

Тогда функция (9) примет вид

$$v(x, y) = \int_0^{\infty} \frac{e^{\lambda y} g(x, \lambda)}{\lambda + B} d\lambda, \quad y < 0. \quad (10)$$

Из разложения (8) следует формула [1; 3]

$$\int_0^{\infty} e^{-Bt} F(x, y-t) dt = \int_0^{\infty} \frac{e^{\lambda y} g(x, \lambda)}{\lambda + B} d\lambda, \quad y < 0, \quad (11)$$

где функция  $g(x, \lambda)$  имеет вид (7). Отсюда решение (10) задачи (6) непосредственно выражается через решение  $F(x, y)$  задачи Дирихле (4) по формуле без разложений Фурье

$$v(x, y) = \int_0^{\infty} e^{-Bt} F(x, y-t) dt, \quad y < 0. \quad (12)$$

**Замечание 1.** Полученная функция  $v(x, y)$  (12) тождественно удовлетворяет граничному условию на слабопроницаемой плёнке (6) для произвольной дифференцируемой по  $y$  функции  $F(x, y)$ , удовлетворяющей граничному условию Дирихле (4), что проверяется непосредственно путём интегрирования по частям интеграла, входящего в  $\partial_y v|_{y=0}$ , в граничном условии (6).

Вторая вспомогательная задача рассматривается на всей кусочно-однородной плоскости  $(x, y) \in R^2$ , разделённой сильнопроницаемой плёнкой  $x = 0$  на две полуплоскости  $G_1(x < 0)$  и  $G_2(x > 0)$ . Рассмотрим относительно функций  $w_i(x, y)$  в  $G_i$  задачу

$$\Delta w_1 = 0, \quad x < 0; \quad \Delta w_2 = H(x, y), \quad x > 0, \quad (13)$$

$$x = 0 : \quad w_2 = w_1, \quad k_2 \partial_x w_2 - k_1 \partial_x w_1 = A \partial_x^2 w_1, \quad (14)$$

где  $H(x, y)$  – некоторая заданная функция, удовлетворяющая условию корректности аналогичной классической задачи (без плёнки) для уравнения Пуассона на однородной плоскости [2, с. 276]

$$\Delta V = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ H(x, y), & x > 0. \end{cases} \quad (15)$$

При этом решение  $V(x, y)$  задачи (15) строится методом функции Грина в квадратурах [5, с. 156]. Выразим решение задачи (13), (14) через решение задачи (15). Предположим сначала, что решение  $V(x, y)$  задачи (15) при  $x = 0$  разлагается в интеграл Фурье с коэффициентами Фурье  $V_{1,2}(\lambda)$

$$V(0, y) = \int_0^{\infty} Q(y, \lambda) d\lambda, \quad Q(y, \lambda) = V_1(\lambda) \sin \lambda y + V_2(\lambda) \cos \lambda y. \quad (16)$$

Тогда решение задачи (15) при  $x \leq 0$  (где функция  $V(x, y)$  удовлетворяет уравнению Лапласа) представимо в виде интеграла Фурье

$$V(x, y) = \int_0^{\infty} e^{\lambda x} Q(y, \lambda) d\lambda, \quad x \leq 0 \quad (17)$$

(левая и правая части равенства (17) являются решением задачи Дирихле в полуплоскости  $x \leq 0$  для уравнения Лапласа с граничной функцией  $V(0, y)$ ).

Будем искать решение задачи (13), (14) в виде разложений Фурье

$$w_1(x, y) = \int_0^{\infty} a_1(\lambda) e^{\lambda x} Q(y, \lambda) d\lambda, \quad x < 0; \quad (18)$$

$$w_2(x, y) = V(x, y) + \int_0^{\infty} a_2(\lambda) e^{-\lambda x} Q(y, \lambda) d\lambda, \quad x > 0, \quad (19)$$

где  $a_i(\lambda)$  искомые функции,  $V(x, y)$  – решение задачи (15),  $Q(y, \lambda)$  – имеет вид (16), при этом функции  $w_i(x, y)$  (18), (19) удовлетворяют соответствующему уравнению (13). Приравнявая в условиях сопряжения на плёнке (14) под знаками интегралов коэффициенты при функции  $Q(y, \lambda)$ , с учётом разложения (17) для функций  $a_i(\lambda)$  получим систему алгебраических уравнений  $1 + a_2 = a_1$ ,  $k_2(1 - a_2) - k_1 a_1 = A\lambda a_1$ , решение которой имеет вид

$$a_1(\lambda) = \frac{2k_2}{A(\lambda + \gamma)}, \quad a_2(\lambda) = -1 + \frac{2k_2}{A(\lambda + \gamma)},$$

где

$$\gamma = \frac{k_1 + k_2}{A}. \quad (20)$$

Отсюда функции (18), (19) с учётом разложения (17) приводятся к виду

$$w_1(x, y) = \frac{2k_2}{A} \int_0^{\infty} \frac{e^{\lambda x} Q(y, \lambda)}{\lambda + \gamma} d\lambda, \quad x < 0, \quad (21)$$

$$w_2(x, y) = V(x, y) - V(-x, y) + \frac{2k_2}{A} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda x} Q(y, \lambda)}{\lambda + \gamma} d\lambda, \quad x > 0. \quad (22)$$

Из разложения (17) следует формула, аналогичная формуле (11)

$$\int_0^{\infty} e^{-\gamma \tau} V(x - \tau, y) d\tau = \int_0^{\infty} \frac{e^{\lambda x} Q(y, \lambda)}{\lambda + \gamma} d\lambda, \quad x < 0,$$

где функция  $Q(y, \lambda)$  имеет вид (16). Отсюда решение (21), (22) задачи (13), (14) непосредственно выражается через решение классической задачи (15) без разложений Фурье в виде

$$w_1(x, y) = \frac{2k_2}{A} \int_0^{\infty} e^{-\gamma\tau} V(x - \tau, y) d\tau, \quad x < 0, \quad (23)$$

$$w_2(x, y) = V(x, y) - V(-x, y) + \frac{2k_2}{A} \int_0^{\infty} e^{-\gamma\tau} V(-x - \tau, y) d\tau, \quad x > 0, \quad (24)$$

где постоянная  $\gamma > 0$  имеет вид (20).

**Замечание 2.** Функции  $w_i(x, y)$  (23), (24) тождественно удовлетворяют условиям сопряжения (14) на сильнопроницаемой плёнке  $x = 0$  для произвольной дважды дифференцируемой по  $x$  функции  $V(x, y)$ , удовлетворяющей достаточно слабому условию на бесконечности

$$V(x, y) = O(e^{\alpha|x|}), \quad \partial_x V(x, y) = O(e^{\alpha|x|}), \quad x \rightarrow -\infty, \quad \alpha < \gamma,$$

что проверяется непосредственно.

Решение исходной задачи (1)–(3) выражается в квадратурах через решение  $F(x, y)$  задачи Дирихле (4) в виде композиции операторов (23), (24), (12) по формулам

$$u_1(x, y) = \frac{2k_2}{A} \int_0^{\infty} e^{-\gamma\tau} v(x - \tau, y) d\tau, \quad x < 0, \quad (25)$$

$$u_2(x, y) = v(x, y) - v(-x, y) + \frac{2k_2}{A} \int_0^{\infty} e^{-\gamma\tau} v(-x - \tau, y) d\tau, \quad x > 0, \quad (26)$$

где функция  $v(x, y)$  имеет вид (12)

$$v(x, y) = \int_0^{\infty} e^{-Bt} F(x, y - t) dt, \quad y < 0.$$

Действительно, в силу замечания 2 функции  $u_i(x, y)$  (25), (26) тождественно удовлетворяют условиям сопряжения (3) на сильнопроницаемой плёнке  $x = 0$ . Обозначая оператор граничного условия (6) на слабопроницаемой плёнке через  $Mv = Bv + \partial_y v$ , запишем это условие в виде

$$Mv(x, y)|_{y=0} = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ h(x), & x > 0. \end{cases} \quad (27)$$

Отсюда функции (25), (26) удовлетворяют граничным условиям (1), (2) при  $y = 0$

$$Mu_{1|y=0} = \frac{2k_2}{A} \int_0^{\infty} e^{-\gamma\tau} Mv(x - \tau, y)|_{y=0} d\tau = 0, \quad x < 0,$$

$$Mu_{2|y=0} = Mv(x, y)|_{y=0} - Mv(-x, y)|_{y=0} +$$

$$+ \frac{2k_2}{A} \int_0^{\infty} e^{-\gamma\tau} Mv(-x - \tau, y)|_{y=0} d\tau = h(x), \quad x > 0.$$

Здесь учитывается замечание 1 и то, что первые аргументы  $x$  подынтегральных функций  $Mv(x, y)$  меньше нуля, и для этих аргументов граничное условие (27) однородно. Уравнение Лапласа (1), (2) для функций  $u_i(x, y)$  (25), (26) выполняется в силу выполнения уравнения Лапласа для функции  $v(x, y)$  (6) при  $x \in R, y < 0$ .

### Список литературы

1. Холодовский С. Е. О многослойных плёнках на границе полупространства // Математические заметки. 2016. Т. 99, вып. 3. С. 421–427.
2. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 735 с.
3. Холодовский С. Е. Метод свёртывания разложений Фурье в решении краевых задач с пересекающимися линиями сопряжения // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2007. Т. 47, № 9. С. 1550–1556.
4. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука, 1962. Т. 3. 656 с.
5. Арсенин В. Я. Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1974. 735 с.

*Статья поступила в редакцию 26.05.2019; принята к публикации 18.06.2019*

### Библиографическое описание статьи

Яковлева Г. М. Решение краевых задач для уравнения Лапласа на полуплоскости, ограниченной слабопроницаемой плёнкой и содержащей сильнопроницаемую плёнку // Учёные записки Забайкальского государственного университета. 2019. Т. 14, № 3. С. 41–48. DOI: 10.21209/2308-8761-2019-14-3-41-48.

*Galina M. Yakovleva,*  
*Student undergraduate,*  
*Transbaikal State University*  
*(30 Aleksandro-Zavodskaya st., Chita, Russia, 672039),*  
*e-mail: y.g.m@mail.ru*

**Solution of Boundary Value Problems for the Laplace Equation  
on a Half-Plane Bounded by a Weakly  
Permeable Film and Containing a Strongly Permeable Film**

Boundary-value problems for the Laplace equation on a piecewise-homogeneous half-plane bounded by a weakly permeable film and consisting of two quadrants separated by a strongly permeable film are considered. By the method of convolution of Fourier expansions, the solution of the problem is expressed in quadratures by solving the classical Dirichlet problem on a homogeneous half-plane (without films).

**Keywords:** boundary value problems, strongly permeable film, weakly permeable film, the method of convolution of Fourier expansions

**References**

1. Holodovskij S. E. O mnogoslojnyh plenkah na granice poluprostranstva // *Matematicheskie zametki*. 2016. T. 99, vyp. 3. S. 421–427.
2. Tihonov A. N., Samarskij A. A. *Uraveniya matematicheskoy fiziki*. M.: Nauka, 1972. 735 s.
3. Holodovskij S. E. Metod svertyvaniya razlozhenij Fur'e v reshenii kraevykh zadach s peresekayushchimisya liniyami sopryazheniya // *ZHurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoy fiziki*. 2007. T. 47, № 9. S. 1550–1556.
4. Fihtengol'c G. M. *Kurs differencial'nogo i integral'nogo ischisleniya*. M.: Nauka, 1962. T. 3. 656 s.
5. Arsenin V. Ya. *Metody matematicheskoy fiziki i special'nye funkicii*. M.: Nauka, 1974. 735 s.

*Received: May 26, 2019; accepted for publication June 18, 2019*

**Reference to article**

*Yakovleva G. M.* Solution of Boundary Value Problems for the Laplace Equation on a Half-Plane Bounded by a Weakly Permeable Film and Containing a Strongly Permeable Film // *Scholarly Notes of Transbaikal State University*. 2019. Vol. 14, No 3. PP. 41–48. DOI: 10.21209/2308-8761-2019-14-3-41-48.



## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ. ЭКСПЕРИМЕНТ

### MATHEMATICAL MODELS. EXPERIMENT

УДК 621.88.002.72

DOI: 10.21209/2308-8761-2019-14-3-49-57

*Сергей Яковлевич Березин,  
доктор технических наук, профессор,  
Забайкальский государственный университет  
(673039, Россия, г. Чита, ул. Александрo-Заводская, 30),  
e-mail: Berlog\_berezin2011@mail.ru*

#### **Исследование пластических свойств цветных сплавов в условиях резьбовыдавливания**

В статье рассмотрены теоретические положения и экспериментальные исследования контактных напряжений пластического деформирования методом вдавливания конического индентора. Получены эмпирические зависимости показателей пластических свойств в форме контактных напряжений и пределов текучести от температуры, скорости и степени деформации для основных типов цветных сплавов. Для определения степени деформации при вдавливании конуса применен метод аналогии с процессом вдавливания шарового индентора. Установлена коррелирующая взаимосвязь контактных напряжений с параметрами твёрдости материала по Бринеллю и удельного веса. На основании эмпирических зависимостей определён характер влияния независимых факторов на уровень контактных напряжений.

**Ключевые слова:** резьба, степень деформации, индентор, контактные напряжения, твёрдость материала, Бринелль, пластическая твёрдость

Процесс получения резьб пластическим деформированием сопровождается значительными усилиями и крутящими моментами. Для технологического обеспечения таких процессов необходимо иметь данные о контактных напряжениях, возникающих на рабочих поверхностях резьбообразующего инструмента. Напряжение  $\sigma_K$  как расчётный параметр входит в аналитические зависимости силовых показателей процессов. Резьбообразование происходит при разных условиях, сопровождающихся температурой, скоростями, усилиями, степенями деформации. Возникающие при резьбовыдавливании силовые показатели определяются напряжённым состоянием в области деформирующего витка и контактными напряжениями на деформирующих участках инструмента. Во многих работах устанавливается определённая связь контактных напряжений с показателями твёрдости материала [1; 2].

Большое количество методик и формул для определения контактных напряжений  $\sigma_K$  не решает одной важной задачи. Она заключается в том, что для расчётов усилий и моментов резьбовывадавливания необходимы универсальные и удобные формулы, позволяющие оценить контактные напряжения с учётом таких факторов, как твёрдость в исходном состоянии, температура в зоне контакта, степень и скорость деформации.

Универсальным методом определения  $\sigma_K$  является метод вдавливания шаровых и конических инденторов [1–3]. Например, в работе [2] величина контактных напряжений пластической деформации устанавливалась в зависимости от показателя твёрдости материала по Бринеллю для упрощённых зависимостей типа

$$\begin{aligned}\sigma_K &= (1,17 - 1,32)HB, [\text{кг/см}^2], \\ \sigma_K &= (11,46 - 12,94)HB, [\text{МПа}].\end{aligned}\quad (1)$$

Для оценки пластических свойств материалов М. С. Дрозд, М. М. Матлин, Ю. И. Сидякин рекомендуют величину пластической твёрдости  $HD$ , которая также связана с величиной  $HB$  и получена на основе испытаний материала методом оценки отпечатка от вдавливания шарика [3]

$$HB = 1,96 \cdot HD^{0,89}, [\text{МПа}], \quad (2)$$

где  $HD$  — величина пластической твёрдости.

Значения  $HD$  достаточно близки величине  $\sigma_K$ , определённой по формулам (1).

Однако в реальных процессах пластического деформирования на материал влияют такие факторы, как температура в зоне формообразования, скорость деформации и её степень. Поэтому задачей настоящих исследований было, используя метод вдавливания конического индентора, определить форму более универсальных зависимостей вида

$$\sigma_K = f(HB, T, V, \psi), \quad (3)$$

где  $T$  — температура в деформируемой зоне;  $V, \psi$  — скорость и степень деформации соответственно.

Исследования проводились по методике и с применением оборудования, которые были представлены в работе [4]. Испытуемые образцы устанавливались на специальное приспособление, имеющее внедряемый конический индентор, на который усилие передавалось от штока пресса через тензометрический динамометр. Одновременно контролировались усилие, глубина внедрения и температура образца.

Предварительно для получения экспериментальных зависимостей такого типа следовало установить ряд соотношений, а именно:

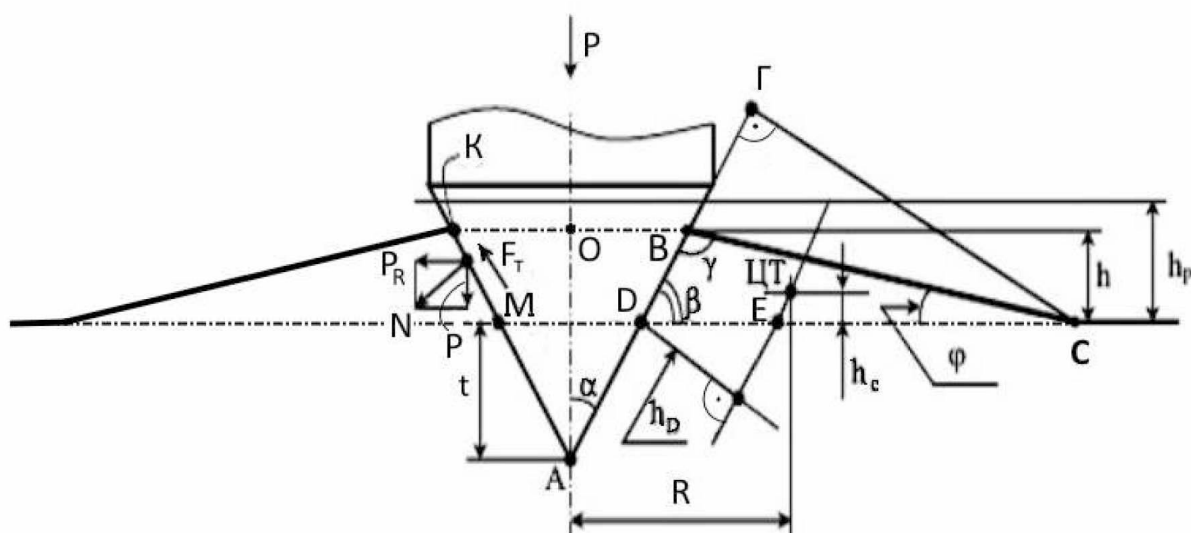
1. По глубине  $t$  и времени  $\tau$  вдавливания конусного индентора определить среднюю скорость деформации

$$V_\tau = \frac{t}{\tau \cos \alpha}, \text{ мм/с.}$$

2. По глубине вдавливания рассчитать боковую поверхность контакта  $S$  и степень деформации  $\psi$ , которые определялись на основе геометрических параметров процесса внедрения конуса в материал образца, представленных на рис. 1.

$$\begin{cases} S = \pi \cdot OB \cdot AB = \pi(t + h)^2 \operatorname{tg} \alpha, \\ \psi = \frac{V}{V_P}. \end{cases} \quad (4)$$

где  $h$  – высота выдавленного металла в виде кольцевого пояска вокруг индентора;  $V$  – объём внедрённой части конуса;  $V_P$  – некоторый расчётный объём внедрения, относительно которого степень, определяемая по 2-й формуле системы (4), будет соразмерна степеням деформации, соответствующим процессам выдавливания метрических резьб  $\psi=0,4-0,45$ .



**Рис. 1.** Схема процесса вдавливания конусного индентора в поверхность материала образца

**Fig. 1.** Diagram of the process of indentation of a conical indenter into the surface of the sample material

Таким образом, глубина внедрения будет являться комплексным расчётным показателем при условии, если определено теоретическое соотношение между ней и высотой  $h$  подъёма кольцевого наплыва (первая формула системы (4)). Контактные напряжения, в соответствии с рис. 1, определяются в конце вдавливания из условия:

$$\sigma_K = \frac{P}{S(\sin \alpha + f \cos \alpha)}, \quad \text{при } t = t_K \quad (5)$$

где  $P$  – усилие вдавливания конуса;  $S$  – площадь контакта по боковой поверхности конуса;  $\alpha$  – половина угла конуса при вершине;  $f$  – коэффициент трения в контакте;  $t$  и  $t_K$  – текущая и конечная глубина вдавливания.

При вдавливании конуса на глубину  $t$  образуется кольцевой наплыв с сечением в виде треугольника  $DBC$ . Очевидно, что объём вдавленной части конуса  $AMD$  будет равен объёму кольцевого наплыва

$$V_{AMD}^K = V_{DBC}^H \quad (6)$$

Из системы (4) определим площадь боковой контактной поверхности конуса с учётом высоты наплыва  $h$ . Полный угол конуса при вершине для измерительной установки был принят равным  $2 \cdot \alpha = 60^\circ$ .

Объём конуса, внедрённого от начальной поверхности, равен

$$V_{AMD}^K = \frac{1}{3} \pi t^3 \operatorname{tg}^2 \alpha = 0,348t^3. \quad (7)$$

Объём кольцевого наплыва можно рассчитать, используя теорему Паппа

$$V_{DBC}^H = \pi \cdot DC \cdot h \cdot R. \quad (8)$$

где  $DC$  – длина основания треугольника  $DBC$ ;  $R$  – радиус вращения центра тяжести (ЦТ) треугольника  $DBC$  вокруг оси конуса.

Для определения  $DC$  необходимо установить значения углов  $\varphi$  и  $\gamma$  треугольника  $DBC$ . Выразим через высоту подъёма  $h$  стороны  $DC$  и  $BC$ , а далее по теореме синусов найдём соотношения углов  $\varphi$  и  $\gamma$ :

$$BC = \frac{h}{\sin \varphi}; \quad \frac{DC}{\sin \gamma} = \frac{BC}{\sin \beta}; \quad DC = h \left( \frac{1}{\operatorname{tg} \beta} + \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} \right).$$

При  $\beta = \pi/2 - \alpha = 60^\circ$  соотношение сторон  $DC$  и  $BC$  приводит к формуле

$$\sin \gamma = 0,5 \sin \varphi + 0,866 \cos \varphi,$$

которая справедлива при значении углов  $\gamma = 102^\circ 49'$  и  $\varphi = 17^\circ 11'$ .

В равенстве (6) находим сторону  $DC$  и радиус  $R$  по следующей цепочке вычислений:

$$\begin{cases} DC = h \cdot \frac{\sin \gamma}{\cos \alpha \cdot \sin \varphi}; \\ DB = \frac{h}{\cos \alpha}; \\ BC = t + \frac{h}{\cos \alpha}. \end{cases} \quad (9)$$

$\Pi = DC + DB + BC$  – периметр треугольника,

$$\begin{cases} R = (t + h_C) \cdot \operatorname{tg} \alpha + DE; \\ h_C = \frac{h DB + BC}{2 \Pi} = 0,5h \frac{t + 2h}{t + 5,389h}; \\ DE = \frac{h_D}{\cos \alpha}; \\ h_D = \frac{\partial D DC + BC}{2 \Pi} = \frac{DC}{2} \sin \beta \frac{DC + BC}{\Pi}. \end{cases} \quad (10)$$

Подставляя значения углов  $\alpha, \beta, \gamma, \varphi$  в системы (9), (10), находим значения деформируемых объёмов (7), (8). Приравняв объёмы и решая уравнение (6) относительно

$t$  и  $h$ , после преобразований получаем его окончательный вид

$$h^4 + 0,062h^3t^2 - 0,0103ht^3 - 0,00192t^4 = 0. \quad (11)$$

При средней глубине внедрения конуса 2 мм, для решения уравнения (11) применим метод подстановки соотношений. Он позволяет получить равенство (12), удовлетворяющее условию (11)

$$h = 0,206t, \quad (12)$$

с учётом чего формула площади боковой поверхности примет окончательный вид  $S = 2,63t^3$ .

Расчёт степени деформации при вдавливании конуса связан с решением задачи определения расчётной глубины  $t_P$ . Для этого сравним процесс вдавливания шарика диаметром 10 мм (определение твёрдости по Бринеллю) с анализируемым процессом.

Степень деформации при вдавливании шара можно определить как отношение объёма вдавленной части шара  $V_C$  к половине его полного объёма  $V_{Ш}$ :

$$\psi = \frac{V_C}{V_{Ш}} = \frac{4t^2(3/2 \cdot D - t)}{D^3}, \quad (13)$$

где  $D$  – диаметр шара.

Объём внедрённой части конуса с учётом высоты подъёма металла  $h$  равен:

$$V_0 = \frac{1}{12}\pi D_0^2(t + h) = 0,193\pi t^3,$$

где  $D_0$  – диаметр основания по линии ВК (рис. 1).

Степень деформации для конического индентора можно определить в виде

$$\psi = \frac{t^3}{t_P^3}, \quad (14)$$

где  $t, t_P$  – текущая и расчётная глубина внедрения, соответствующая объёмам  $V$  и  $V_P$  (система 5).

Подставив в формулу (14) среднюю степень деформации для метрических резёб  $\psi = 0,43$ , получим выражение для расчёта  $t_P$

$$t_P = t\sqrt[3]{\psi^{-1}} = 1,325t.$$

Подставив значение  $t_P$  из последней формулы в формулу (14) и приравняв (13) и (14), получим следующее выражение:

$$6t^2D - 4t^3 = 0,43D^3. \quad (15)$$

Введём обозначение  $K = D/t$  и приведём выражение (15) к кубической форме:

$$K^3 - 14,02K + 9,346 = 0. \quad (16)$$

Уравнение (16) имеет отрицательный дискриминант и три действительных корня:

$$K_1 = -4,04; \quad K_2 = 3,35; \quad K_3 = 0,69.$$

Какой из двух положительных корней взять за расчётный, покажет характер кривых степеней деформации, изображённых на рис. 2.

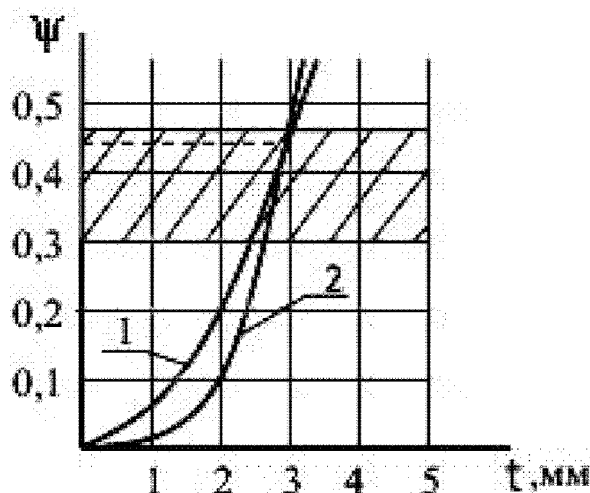


Рис. 2. Расчётные кривые степеней деформации: 1 – шар; 2 – конус

Fig. 2. Calculated curves for the degree of deformation: 1 – ball; 2 – cone

Кривая 1, соответствующая вдавливанию шарика диаметром 10 мм, получена путём расчёта степеней деформации по формуле (13). Для построения кривой 2 использовали формулу (14). Обе кривые пересекаются в точке ( $t=2,985$  мм;  $\psi=0,429$ ). Это соответствует значению корня  $K_2$ . Заметим, что пересечение кривых находится в области, соответствующей степеням деформации при выдавливании метрических резьб (заштрихована на рис. 2).

Таким образом, предельное значение расчётной глубины вдавливания конуса будет соответствовать величине

$$t_p = 1,325K_2 = 3,955 \text{ мм}.$$

Округлив его до 4 мм, окончательно получим расчётные формулы для проведения экспериментов

$$\begin{cases} \sigma_K = \frac{P}{2,637t^2}; \\ V_\tau = \frac{1}{\tau \cos \alpha}; \\ \psi = \frac{t^3}{64}. \end{cases} \quad (17)$$

Их проводили на специальном приспособлении, представленном в работе [4]. Образцы изготавливали из алюминиевых и магниевых сплавов АЛ9, АЛ5, АК4, МЛ5.

Значения определяющих факторов в процессе исследований варьировались в следующих пределах:

$$V_T = 0,4 - 1,6 \text{ мм/с}; \quad t = 2 - 3,5 \text{ мм}; \quad T = 20^\circ - 300^\circ \text{C}; \quad \psi = 0,36 - 0,48.$$

В результате статистической обработки данных были получены экспериментальные формулы контактных напряжений в МПа, которые приведены в таблице. При подстановке в формулы значений скорости  $V$  необходимо учитывать, что это не окружная скорость завинчивания, а скорость внедрения деформирующей грани в металл. Она связана с геометрией заходного витка следующей зависимостью

$$V = 10^3 V_0 \sin \varphi \sin \psi \text{ мм/с}, \quad (18)$$

где  $V_0$  – окружная скорость.

Значения контактных напряжений можно использовать как для теоретических расчётов силовых показателей процесса резбообразования, подставляя их значения в формулы крутящих моментов, давлений и усилий, так и для оценки пластических свойств цветных сплавов при различных условиях деформирования.

Результаты исследования для сходных условий хорошо согласуются с результатами, полученными в других работах [1; 3]. Однако они более точны в силу одновременного учёта трёх параметров деформации  $V, T, \psi$ .

В таблице приведены экспериментальные зависимости контактных напряжений от исследуемых параметров, а на рис. 3 дан геометрический образ одной из зависимостей для сплава АК4 в факторном пространстве:

$$\begin{cases} V \Rightarrow [0...0,45] \text{ мм/с}; \\ \psi \Rightarrow [0...0,5]; \\ T = 20^\circ \text{C}. \end{cases}$$

Таблица

**Результаты обработки экспериментов по исследованию контактных напряжений для 4 марок сплавов**

Сплав	Твёрдость $HV$ , МПа	Плотность $\gamma$ , г/см <sup>3</sup>	Экспериментальные формулы для расчёта контактных напряжений $\sigma_k$ , МПа
АК4	109–117	2,8	$\sigma_K = 842,9 - 0,45T + 77,7\psi + 527,8\psi^2 - 886,1V + 1092,6V^2$
АЛ9	60–70	2,66	$\sigma_K = 633,7 - 0,34T + 58,5\psi + 396,8\psi^2 - 666,2V + 8215V^2$
АЛ4	45–70	2,65	$\sigma_K = 460,6 - 0,24T + 42,5\psi + 288,4\psi^2 - 487,2V + 597,1V^2$
МЛ5	24–28	1,8	$\sigma_K = 296,8 - 0,16T + 27,4\psi + 185,8\psi^2 - 312,0V + 384,7V^2$

Как видим из рис. 3, скорость и степень деформации оказывают значительное влияние на  $\sigma_k$ . С ростом температуры сплавов уровень контактных напряжений снижается. На это указывает знак «минус» в экспериментальных формулах. Исследования проводились при трёх ступенях температур образцов: 20, 100 и 200 °С. При

повышении степени сопротивление деформации повышается, а при увеличении скорости, наоборот – падает. Влияние независимых факторов на  $\sigma_k$  имеет в основном нелинейный характер и во всём диапазоне факторного пространства разброс значений  $\sigma_k$  весьма широк. В соответствии с рис. 3 для сплава АК4 он составляет от 570 МПа до 930 МПа.

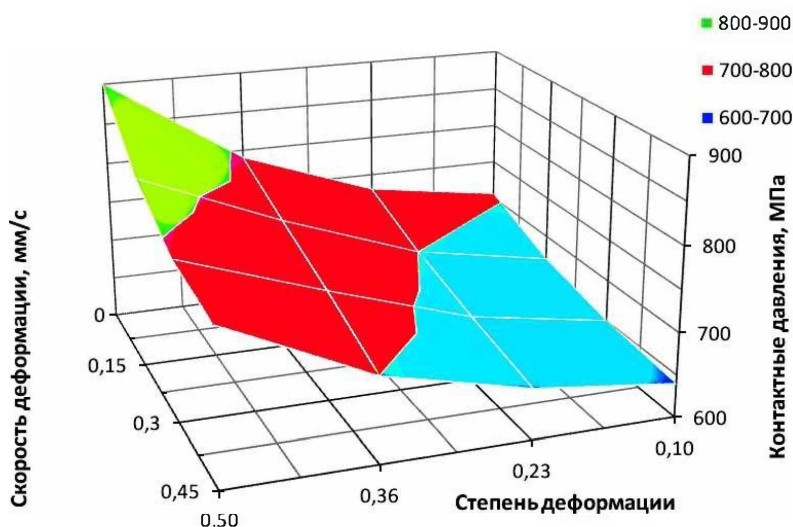


Рис. 3. Поверхность отклика, соответствующая экспериментальной формуле для сплава АК4 при нормальной температуре деформации

Fig. 3. The response surface corresponding to the experimental formula for AK4 alloy at normal deformation temperature

На основе полученных данных можно установить и другие показатели пластических свойств конструкционных материалов, например пределов текучести  $\sigma_T$ . Для исходного состояния материалов, т. е. при нормальной температуре, минимальных степенях деформации и скоростях, для всех 4 марок исследуемых сплавов можно рекомендовать более простые формулы определения пластических свойств:

$$\begin{cases} \sigma_K = 7,93HB + 25,47\gamma; \\ \sigma_T = 0,647HB + 48,38\gamma. \end{cases}$$

где  $\gamma$  – плотность материала, показанная в таблице.

Данный метод исследования пластических свойств конструкционных материалов достаточно универсален и применялся для малоуглеродистых сталей и даже таких хрупких материалов, как серые чугуны, которые, как показывает опыт, могут выдерживать в малых объёмах деформации, степени до 0,45.

#### Список литературы

1. Кузьменко А. Г. Исследование метода индентирования поверхности шаром с определением новых механических характеристик металла // Проблемы трибологии (Problems of Tribology). 2011. № 1. С. 100–114.
2. Сагарда А. А., Чеповецкий И. Х., Мишнаевский Л. Л. Алмазно-абразивная обработка деталей машин. Киев: Техника, 1974. 162 с.



3. Дрозд М. С., Матлин М. Н., Сидякин Ю. И. Инженерные расчёты упругопластической деформации. М.: Машиностроение, 1986. 224 с.

4. Березин С. Я. Исследование контактных напряжений при резьбообразовании методом вдавливания конического индентора // Технология металлов. 2003. № 9. С. 28–31.

*Статья поступила в редакцию 03.05.2019; принята к публикации 30.05.2019*

#### **Библиографическое описание статьи**

*Березин С. Я.* Исследование пластических свойств цветных сплавов в условиях резьбовываивания // Учёные записки Забайкальского государственного университета. 2019. Т. 14, № 3. С. 49–57. DOI: 10.21209/2308-8761-2019-14-3-49-57.

*Sergey Ya. Berezin,*

*Doctor of Engineering Sciences, Professor,  
Transbaikal State University*

*(30 Aleksandro-Zavodskaya st., Chita, 672039, Russia),  
e-mail: Berlog\_berezin2011@mail.ru*

### **The Study of the Plastic Properties of Non-Ferrous Alloys in Relation to the Self-Tapping Processes**

The article deals with the theoretical provisions and experimental studies of contact stresses of plastic deformation by pressing a conical indenter. Empirical dependences of indicators of plastic properties in the form of contact stresses and yield stress on temperature, speed and degree of deformation for the main types of non-ferrous alloys are obtained. The method of analogy with the process of ball indenter indentation is used to determine the degree of deformation during cone indentation. The correlation of contact stresses with the Brinell hardness and relative weight parameters of the material is established. The nature of the influence of independent factors on the level of contact stresses is determined on the basis of empirical dependences.

**Keywords:** thread, degree of deformation, indenter, contact stresses, material hardness, Brinell, plastic hardness

#### *References*

1. Kuz'menko A. G. Issledovanie metoda indentirovaniya poverhnosti sharom s opredeleniem novykh mekhanicheskikh harakteristik metalla // Problemi tribologii (Problems of Tribology). 2011. № 1. S. 100–114.

2. Sagarda A. A., Шеровецкий И. Н. Mishnaevskij L. L. Almazno-abrazivnaya obrabotka detalej mashin. Kiev: Tekhnika, 1974. 162 s.

3. Drozd M. S., Matlin M. N., Sidyakin Yu. I. Inzhenernye raschyoty uprugoplasticheskoy deformacii. M.: Mashinostroenie, 1986. 224 s.

4. Berezin S. Ya. Issledovanie kontaktnyh napryazhenij pri rez'boobrazovanii metodom vдавливания конического индентора // Tekhnologiya metallov. 2003. № 9.

*Received: May 03, 2019; accepted for publication May 30, 2019*

#### **Reference to article**

*Berezin S. Ya.* The Study of the Plastic Properties of Non-Ferrous Alloys in Relation to the Self-Tapping Processes // Scholarly Notes of Transbaikal State University. 2019. Vol. 14, No 3. PP. 49–57. DOI: 10.21209/2308-8761-2019-14-3-49-57.

УДК 537.874

DOI: 10.21209/2308-8761-2019-14-3-58-65

*Георгий Степанович Бордонский,*  
*доктор физико-математических наук, профессор,*  
*главный научный сотрудник,*  
*Институт природных ресурсов, экологии и криологии СО РАН,*  
*(672014, Россия, г. Чита, ул. Недорезова, 16а),*  
*e-mail: lgc255@mail.ru,*  
*ORCID: 0000-0002-0009-0822*

### **Методика измерений действительной части относительной диэлектрической проницаемости переохлаждённой воды в микроволновом диапазоне**

Диэлектрические характеристики переохлаждённой воды требуются для решения задач микроволнового дистанционного зондирования природной среды. В настоящее время отсутствуют измерения действительной части относительной диэлектрической проницаемости для температур ниже  $-18\text{ }^{\circ}\text{C}$ . В работе предложена методика измерений действительной части относительной диэлектрической проницаемости с использованием волноводных резонаторов. В резонатор помещают дисперсную увлажнённую среду с порами нанометровых размеров для достижения глубокого переохлаждения воды. Для устранения влияния неоднородностей среды, вызванной миграцией влаги при её замерзании и проявлении искажений резонансных кривых, предлагается использовать волноводные резонаторы повышенных размеров. При этом из-за усреднения свойств среды по объёму происходит сглаживание осцилляций на резонансных кривых пропускания резонатора и значительно уменьшается влияние неоднородностей на результаты определения параметров резонанса. В выполненном эксперименте использован прямоугольный резонатор с длиной, равной длине волны в волноводе, соответствующего сечения. По сравнению с полуволновым резонатором удалось получить существенно более правильную форму резонансной кривой и определить сдвиг резонансной частоты при понижении температуры влажной среды. Рассмотрены возможные ошибки восстановления диэлектрических характеристик переохлаждённой воды, которые следует учитывать при измерениях. Предполагается достижение точности измерений действительной части диэлектрической проницаемости порядка десяти процентов в сантиметровом диапазоне длин волн при температурах от  $-20$  до  $-60\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

**Ключевые слова:** переохлаждённая вода, диэлектрическая проницаемость, микроволновый диапазон, нанопористая среда, резонаторные измерения

**Введение.** Знание диэлектрической проницаемости переохлаждённой воды для микроволнового диапазона представляет значительный интерес для изучения атмосферных образований, для коррекции переноса излучения в задачах спутникового мониторинга и для определения характеристик мёрзлых земных покровов [5; 8; 10].

Однако измерения комплексной относительной диэлектрической проницаемости ( $\epsilon$ ), особенно при температуре ( $T$ ) ниже  $-20\text{ }^{\circ}\text{C}$ , представляет сложную задачу [12]. В работе [9] её решили с использованием микроэмulsion воды, где удалось охладить

образцы до  $-18\text{ }^{\circ}\text{C}$  и выполнить измерения действительной ( $\epsilon'$ ) и мнимой ( $\epsilon''$ ) частей  $\epsilon$  на частоте 9,6 ГГц.

В работах [1; 2] эту проблему решали с использованием увлажнённых нанопористых силикатов, в которых воду можно переохладить до  $-90\text{ }^{\circ}\text{C}$  [4]. В этих работах были найдены зависимости  $\epsilon''$  от  $T$  и частоты ( $f$ ). В случае использования нанопористых сред для глубокого переохлаждения воды возникли трудности в определении  $\epsilon$  из-за возникновения в образцах проводящих кластеров, которые сильно усложняют восстановление  $\epsilon$  [3].

Устранить влияние неоднородностей и возникающую при этом пространственную дисперсию в среде удалось путём значительно понижения весовой влажности и усреднением зондирующих сигналов по объёму исследуемых образцов [1; 2]. Однако в этих работах были найдены только зависимости  $\epsilon''$  от  $f$  и температуры.

Цель настоящей работы заключалась в разработке методики измерений  $\epsilon'$  в микроволновом диапазоне с использованием резонаторов. Резонансная частота чувствительна к малым изменениям свойств среды, что позволяет проводить температурные измерения слабо увлажнённых образцов. При этом необходимо решить вопрос о нивелировании эффектов пространственной дисперсии среды, т. е. искажений резонансной кривой.

**Методика измерений.** Как было установлено в [6] измерение  $\epsilon'$  в полуволновом прямоугольном резонаторе не позволяет достаточно точно определять изменение  $\epsilon'$  увлажнённой дисперсной среды от температуры из-за сильных искажений резонансной кривой пропускания резонатора.

Для того, чтобы устранить это явление, предлагается модификация резонаторного метода измерения  $\epsilon$  на более высоких видах колебаний, что позволяет увеличить объём среды и выполнить усреднение по большему числу макроскопических неоднородностей.

Резонансные частоты прямоугольного резонатора для среды без потерь представляются следующей формулой [7]:

$$f_{mnp} = \left( c \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{p^2}{l^2}} \right) / \left( 2\sqrt{\epsilon'} \right),$$

где  $m, n, p = 0, 1, 2, \dots$ ,  $a, b, l$  – размеры резонатора вдоль осей,  $c$  – скорость электромагнитных волн в вакууме.

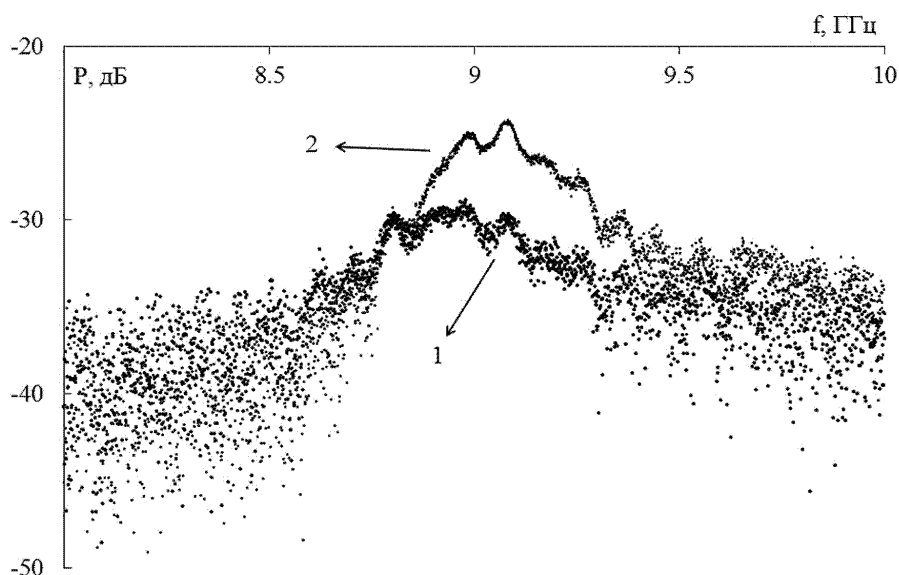
Для волн типа  $H_{10}$  в прямоугольном волноводе и распространения излучения вдоль оси  $z$  часто используют резонаторы с типом колебаний  $H_{10p}$ , где  $p = 1, 2, 3 \dots$ . В предлагаемой методике необходимо использовать виды колебаний для  $p > 1$ , т. е.  $H_{102}$ ,  $H_{103}$  и т. д.

**Проверка предлагаемой методики.** Определение  $\epsilon'$  среды при полном заполнении резонатора осуществляется по изменениям резонансной частоты резонатора со средой и  $f_0$  – резонатора без среды. Из ширины резонансной кривой находят  $\epsilon''$ .

В выполненном эксперименте первоначально был исследован резонатор с размерами  $a = 23$  мм,  $b = 10$  мм,  $l = 10$  мм. Диффрагмы с круглыми отверстиями связи диаметром 6 мм устанавливали в плоскости  $x, y$ , где сечение подводящих волноводов равнялось  $23 \times 10$  мм<sup>2</sup>. Этому резонатору соответствуют значения  $m = 1, n = 0$  и в нём могут наблюдаться виды колебаний для  $p = 1, 2, 3 \dots$ , т. е.

$$f_{10p} = \left( c \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{p^2}{l^2}} \right) / (2\sqrt{\varepsilon'}).$$

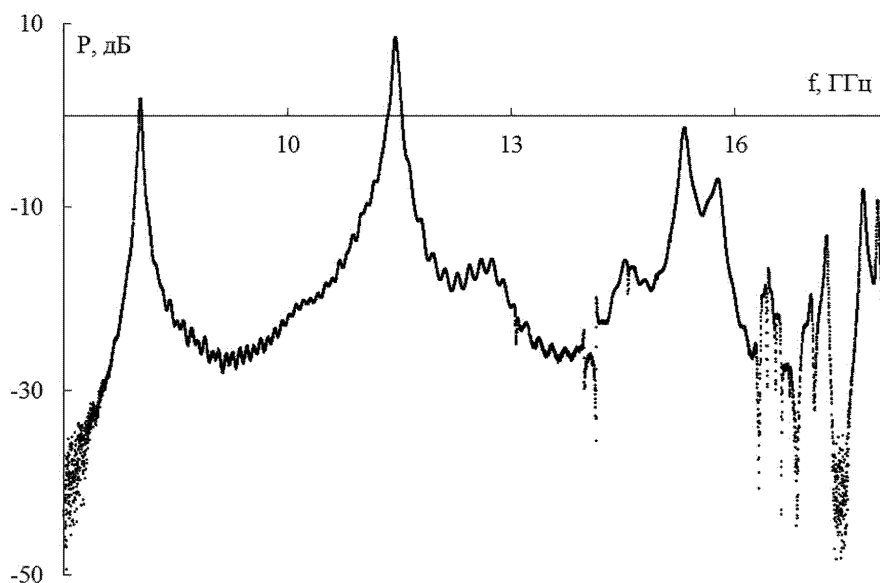
Для иллюстрации влияния неоднородностей на рис. 1 приведены формы резонансной кривой данного полуволнового резонатора, для которого  $l = \lambda_W/2$  ( $l = 10$  мм,  $p = 1$ ,  $\lambda_W$  – длина волны в волноводе сечением  $23 \times 10$  мм<sup>2</sup>). Резонатор был заполнен силикагелем марки Acros-60 (силикагель для хроматографии со средним размером пор 6 нм) с весовой влажностью 14 %. Резонансная частота пустого резонатора 12,0 ГГц. Как следует из графиков рис. 1, наблюдается неравномерность в полосе пропускания с отсутствием чётко выраженного максимума, что делает практически невозможным определение резонансной частоты и ширины пропускания мощности ( $P$ ) резонатора по уровню  $-3$  дБ от максимума.



**Рис. 1.** Резонансные кривые полуволнового прямоугольного резонатора с увлажнённым силикагелем для двух температур:  $-30$  °С (1) и  $-60$  °С (2)

**Fig. 1.** Resonance curves of a half-wave rectangular resonator with moistened silica gel for two temperatures:  $-30$  °С (1) and  $-60$  °С (2)

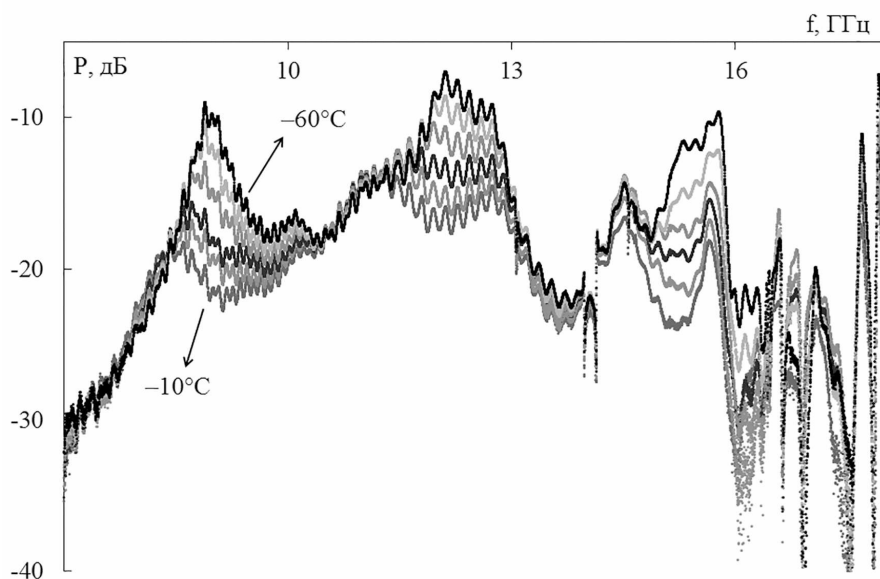
Для увеличения объёма резонатора следует выбрать  $l$ , на которой укладывается большее число полуволн. На рис. 2 приведены контрольные зависимости пропускания мощности излучения для пустого резонатора с  $l = 2(\lambda_W/2)$ . Мощность проходящего излучения представлена в логарифмических единицах (децибелах). Наблюдается два низших резонанса для  $p = 1, 2$  вблизи 7,5 ГГц и 11,2 ГГц. Резонансы для  $p = 3$  и выше искажены из-за появления высших видов колебаний в резонаторе, определяемых более высокими значениями  $m$  и  $n$ .



**Рис. 2.** Резонансные кривые для пустого резонатора с размером  $l = 20$  мм

**Fig. 2.** Resonance curves for an empty resonator with a size of  $l = 20$  mm

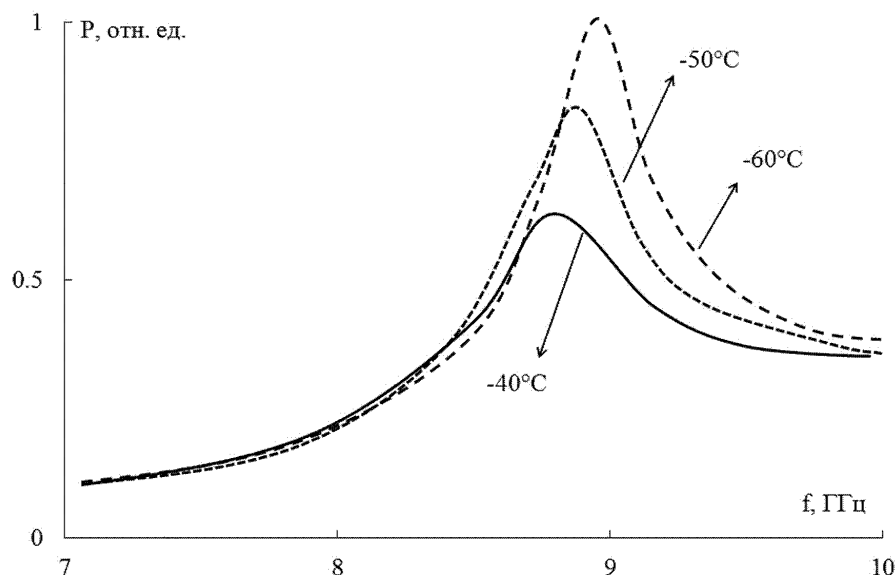
При заполнении резонатора увлажнённой средой с наноразмерными порами кривые пропускания приобретают следующий вид (рис. 3). При этом резонанс с  $p = 1$  сдвигается в низкочастотную область, где излучение не распространяется в используемом сечении волновода, т. к. он становится запредельным. Резонанс вблизи 9 ГГц соответствует  $p = 2$ . Для  $p = 3$  выделить резонанс затруднительно из-за наложения высших резонансов и они практически не наблюдаемы.



**Рис. 3.** График зависимости мощности пропускания от частоты для силикагеля марки КСКГ с весовой влажностью 3 % для различных температур среды от  $-10$  до  $-60$  °С, через каждые 10 °С

**Fig. 3.** Graph of transmission power versus frequency for silica gel SG05 with a weight humidity of 3 % for various ambient temperatures from  $-10$  °С to  $-60$  °С, every 10 °С

Резонанс с  $p = 2$  при использовании процедуры сглаживания небольших осцилляций на кривых позволяет определить значение резонансной частоты. На рис. 4 приведены результаты такой процедуры для температуры  $-40\text{ }^\circ\text{C}$ ,  $-50\text{ }^\circ\text{C}$  и  $-60\text{ }^\circ\text{C}$ . Графики нормированы на единицу для резонансной кривой при  $-60\text{ }^\circ\text{C}$ .



*Рис. 4.* Усреднённые резонансные кривые для вида колебаний  $H_{102}$ , соответствующие представленным на рис. 3. Мощность в относительных единицах

*Fig. 4.* Averaged resonance curves for the mode of oscillations  $H_{102}$ , corresponding to those shown in Fig. 3. Power in relative units

Как следует из графиков рис. 4, возможно определение резонансных частот с точностью  $\sim 10$  МГц. Общий сдвиг резонансных частот при охлаждении силикагеля КСКГ влажностью 3 % составил приблизительно 400 МГц, т. е. имеется возможность определения  $\varepsilon'$  среды с точностью  $\sim 2$  %. Однако на ошибку определения  $\varepsilon'$  воды влияют ошибки нахождения доли объёмной воды в порах. Общее содержание воды определяли термостатно-весовым способом. Часть воды находится в связанном состоянии и её свойства зависят от размеров пор и степени увлажнения среды [6].

Следует также учитывать, что при понижении температуры объёмная вода постепенно вымерзает, поэтому при температурах ниже  $-40\text{ }^\circ\text{C}$  требуется учитывать и этот эффект. Как было показано в [2], для используемого материала и низком увлажнении полное замерзание имеет место приблизительно при  $-70\text{ }^\circ\text{C}$ . Кроме того, в случае высоких потерь в среде (что имеет место для температур  $-10 \dots -30\text{ }^\circ\text{C}$ ) необходимо учитывать их влияние на частоту резонанса. Это влияние можно определить из измерений ширины резонансной кривой с последующей коррекцией значений  $\varepsilon'$ . Предполагается дальнейшее исследование данных вопросов.

#### **Выводы.**

1. Предложена методика измерений действительной части относительной комплексной диэлектрической проницаемости переохлаждённой воды в микроволновом диапазоне для температур ниже  $-10\text{ }^\circ\text{C}$  с использованием резонаторов. Она основана на глубоком переохлаждении воды в нанопористых силикатах. В этой методике для

усреднения влияния неоднородностей в среде, возникающих из-за появления проводящих кластеров, определяемых миграцией влаги в среде при её замораживании, измерения проводят в резонаторах с относительно большим объёмом.

2. Для проверки методики выполнен эксперимент с использованием прямоугольного резонатора, длина которого равна длине волны излучения в волноводе. Полученные результаты показали возможность определения параметров резонансных кривых для последующего вычисления действительной части относительной диэлектрической проницаемости глубоко переохлаждённой воды.

3. По предлагаемой методике может достигаться точность измерений  $\epsilon'$  среды в волноводном резонаторе порядка 1 %. Однако реальная точность определяется точностью определения объёма воды, имеющей свойства свободной воды. Эта величина зависит от ряда параметров: доли связанной воды, доли не вымерзающей воды при понижении температуры образца, точности определения резонансной частоты, значения поглощения в среде и некоторых других параметров. Поэтому ожидаемая точность определения значения диэлектрической проницаемости составляет десятки процентов. Такая точность является достаточной для построения приближённых моделей диэлектрической проницаемости переохлаждённой воды ниже  $-18\text{ }^\circ\text{C}$ , т. к. в настоящее время сведения о измеренной  $\epsilon'$  в научной литературе отсутствуют.

#### Список литературы

1. Бордонский Г. С., Орлов А. О., Крылов С. Д. Изучение фактора потерь переохлаждённой поровой воды на частотах 60...140 ГГц // Радиотехника и электроника. 2019. Т. 64, № 4. С. 350–355.
2. Бордонский Г. С., Орлов А. О., Хапин Ю. Б. Коэффициент затухания и диэлектрическая проницаемость переохлаждённой объёмной воды в интервале температур 0...–90 °С на частотах 11...140 ГГц // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. 2017. Т. 14, № 3. С. 255–270.
3. Бордонский Г. С., Филиппова Т. Г. Влияние перколяции на диэлектрические свойства мёрзлых дисперсных сред // Конденсированные среды и межфазные границы. 2002. Т. 4, № 1. С. 21–26.
4. Гурулев А. А. Резонаторные исследования пресного льда на частоте 3.3 ГГц // Учёные записки Забайкальского государственного гуманитарно-педагогического университета им. Н.Г. Чернышевского. 2009. № 2. С. 131–133.
5. Кутуза Б. Г., Данилычев М. В., Яковлев О. И. Спутниковый мониторинг Земли: Микроволновая радиометрия атмосферы и поверхности. М.: ЛЕНАНД, 2016. 336 с.
6. Орлов А. О. Микроволновые свойства переохлаждённой поровой воды на частотах 11 ÷ 140 ГГц: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.04.03. М., 2017. 164 с.
7. Семенов Н. А. Техническая электродинамика. М.: Связь, 1973. 480 с.
8. Шарков Е. А. Радиотепловое дистанционное зондирование Земли: физические основы: в 2 т. Т. 1. М.: ИКИ РАН, 2014. 544 с.
9. Bertolini D., Cassettari M., Salvetti G. The dielectric relaxation time of supercooled water // J. Chem. Phys. 1982. Vol. 76, is. 6. P. 3285–3290.
10. Ellison W. J. Permittivity of pure water, at standard atmospheric pressure, over the frequency range 0–25 THz and the temperature range 0–100 °C // J. Chem. Phys. Ref. Data. 2007. Vol. 36, No. 1. P. 1–18.
11. Limmer D. T., Chandler D. Phase diagram of supercooled water confined to hydrophilic nanopores // J. Chem. Phys. 2012. Vol. 137, is. 4. P. 1841–1844.

12. Rosenkranz P. W. A Model for the complex dielectric constant of supercooled liquid water at microwave frequencies // IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing. 2015. Vol. 53, is. 3. P. 1387–1393.

*Статья поступила в редакцию 12.04.2019; принята к публикации 16.05.2019*

#### **Библиографическое описание статьи**

*Бордонский Г. С.* Методика измерений действительной части относительной диэлектрической проницаемости переохлаждённой воды в микроволновом диапазоне // Учёные записки Забайкальского государственного университета. 2019. Т. 14, № 3. С. 58–65. DOI: 10.21209/2308-8761-2019-14-3-58-65.

*Georgy S. Bordonskiy,  
Doctor of Physics and Mathematics,  
Chief Scientific Employee,  
Institute of Natural Resources, Ecology and Cryology,  
Siberian Branch, Russian Academy of Sciences,  
(16a Nedorezova st., Chita, 672014, Russia),  
e-mail: lgc255@mail.ru,  
ORCID: 0000-0002-0009-0822*

### **Methods of Measuring the Real Part of Supercooled Water Relative Dielectric Constant at Microwaves**

The dielectric characteristics of supercooled water are required for solving problems of microwave remote sensing of the natural environment. At present, there are no measurements of the real part of the relative dielectric constant for temperatures below  $-18^{\circ}\text{C}$ . The paper proposes a method for measuring the real part of relative dielectric constant using waveguide resonators. A dispersed humidified medium with nanometer-sized pores is placed in the resonator to achieve a deep supercooling of water. To eliminate the influence of medium inhomogeneities caused by moisture migration during its freezing and manifestation of distortions of resonant curves, it is proposed to use waveguide resonators of increased sizes. In this case, due to averaging of the properties of the medium over the cavity volume, oscillation is smoothed on the resonance transmission curves of the resonator and the effect of inhomogeneities on the results of determining the resonance parameters is eliminated. In the performed experiment, a rectangular resonator with a length equal to the wavelength in the waveguide, corresponding to the cross section, was used. Compared with the half-wave resonator, it was possible to obtain significantly better form of resonant curve and determine the shift of the resonant frequency with decreasing temperature of the humid medium. Possible errors in the recovery of the dielectric characteristics of supercooled water are given, which should be taken into account in the measurements. It is supposed to achieve an accuracy of measuring the real part of the dielectric constant of about ten percent at centimeter wavelength range for temperatures from  $-20$  to  $-60^{\circ}\text{C}$ .

**Keywords:** supercooled water, dielectric constant, microwaves, nanoporous medium, resonator measurements



*References*

1. Bordonskij G. S., Orlov A. O., Krylov S. D. Izuchenie faktora poter' pereohlazhdyonnoj porovoj vody na chastotah 60...140 GGc // Radiotekhnika i elektronika. 2019. T. 64, № 4. S. 350–355.
2. Bordonskij G. S., Orlov A. O., Hapin YU. B. Koefficient zatuhaniya i dielektricheskaya pronicaemost' pereohlazhdyonnoj ob"yomnoj vody v intervale temperatur 0... – 90 °C na chastotah 11...140 GGc // Sovremennye problemy distancionnogo zondirovaniya Zemli iz kosmosa. 2017. T. 14, № 3. S. 255–270.
3. Bordonskij G. S., Filippova T. G. Vliyanie perkolyacii na dielektricheskie svojstva myorzlyh dispersnyh sred // Kondensirovannye sredy i mezhfaznye granicy. 2002. T. 4, № 1. S. 21–26.
4. Gurulev A. A. Rezonatornye issledovaniya presnogo l'da na chastote 3.3 GGc // Uchyonye zapiski Zabajkal'skogo gosudarstvennogo gumanitarno-pedagogicheskogo universiteta im. N. G. Chernyshevskogo. 2009. № 2. S. 131–133.
5. Kutuza B. G., Danilychev M. V., YAKovlev O. I. Sputnikovyy monitoring Zemli: Mikrovolnovaya radiometriya atmosfery i poverhnosti. M.: LENAND, 2016. 336 s.
6. Orlov A. O. Mikrovolnovye svojstva pereohlazhdyonnoj porovoj vody na chastotah 11 ÷ 140 GGc: dis. ... kand. fiz.-mat. nauk: 01.04.03. M., 2017. 164 s.
7. Semenov N. A. Tekhnicheskaya elektrodinamika. M.: Svyaz', 1973. 480 s.
8. Sharkov E. A. Radioteplovoe distancionnoe zondirovanie Zemli: fizicheskie osnovy: v 2 t. T. 1. M.: IKI RAN, 2014. 544 s.
9. Bertolini D., Cassettari M., Salvetti G. The dielectric relaxation time of supercooled water // J. Chem. Phys. 1982. Vol. 76, is. 6. P. 3285–3290.
10. Ellison W. J. Permittivity of pure water, at standard atmospheric pressure, over the frequency range 0–25 THz and the temperature range 0–100 °C // J. Chem. Phys. Ref. Data. 2007. Vol. 36, No. 1. P. 1–18.
11. Limmer D. T., Chandler D. Phase diagram of supercooled water confined to hydrophilic nanopores // J. Chem. Phys. 2012. Vol. 137, is. 4. P. 1841–1844.
12. Rosenkranz P. W. A Model for the complex dielectric constant of supercooled liquid water at microwave frequencies // IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing. 2015. Vol. 53, is. 3. P. 1387–1393.

*Received: April 12, 2019; accepted for publication May 16, 2019*

**Reference to article**

*Bordonskiy G. S. Methods of Measuring the Real Part of Supercooled Water Relative Dielectric Constant at Microwaves // Scholarly Notes of Transbaikal State University. 2019. Vol. 14, No. 3. PP. 58–65. DOI: 10.21209/2308-8761-2019-14-3-58-65.*

УДК 544.635

DOI: 10.21209/2308-8761-2019-14-3-67-74

*Александр Александрович Гурулев,*  
*кандидат физико-математических наук,*  
*старший научный сотрудник,*  
*Институт природных ресурсов, экологии и криологии,*  
*Сибирский филиал Сибирской академии наук*  
*(672014, Россия, г. Чита, ул. Недорезова, 16а),*  
*e-mail: lgc255@mail.ru,*  
*ORCID: 0000-0003-2232-3583*

### **Электрические потенциалы и фазовые переходы раствора хлористого натрия**

Ввиду широкого распространения солевых растворов в природе (в водоёмах, в почвах, в растительности и т. п.) актуальной задачей является исследование физико-химических процессов, протекающих в них не только при положительных температурах, но и при отрицательных. В настоящей работе выполнено исследование электрокинетических эффектов, сопровождающих процесс кристаллизации водно-солевых растворов, на примере раствора хлористого натрия. Измерения выполнялись при монотонном изменении температуры раствора хлористого натрия со скоростью 0,28 °С/мин с одновременным измерением ЭДС, возникающей между платиновым и медным электродами, и температуры. В результате проведённых экспериментов была обнаружена корреляция сигналов ЭДС в растворе хлористого натрия с процессом кристаллизации образца при эвтектической температуре. В этот момент величина сигнала ЭДС увеличивается и затем резко стремится к минимальному значению. Также по скорости изменения температуры образца имеется возможность определения фазовых переходов в жидкой и твёрдой средах. При совместной термометрии и измерениях электрических потенциалов имеется возможность изучения особенностей процессов образования и деструкции кристаллов в растворах.

**Ключевые слова:** водно-солевые растворы, электрические потенциалы, кристаллизация льда, термометрия, фазовые переходы

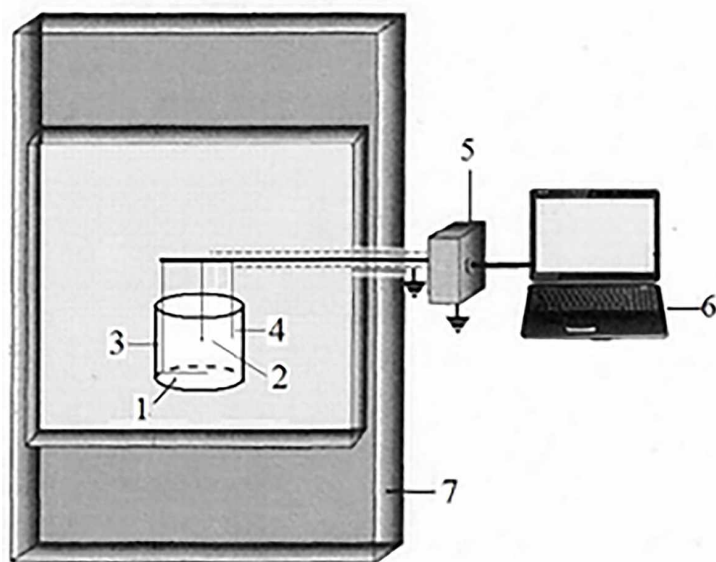
**Введение.** Водные растворы, содержащие примеси, встречаются повсеместно, поэтому исследование физических процессов, происходящих в них, является актуальной научной задачей [3; 10]. В зимний период на водных объектах образуется ледяной покров, при кристаллизации которого происходит захват солевых включений [8], которые в свою очередь влияют на физические свойства объекта, например, на его радиотепловое излучение [7]. Кроме того, при кристаллизации водных растворов (кристаллизация морской воды, или растворов, находящихся в почвах, грунтах и древесных тканях) наблюдаются различного рода физико-химические явления [1]. Речь об одном из них и пойдёт ниже.

Исследованию динамики неравновесных процессов и диссипативных систем посвящено большое количество научных работ [2]. Так, одной из проблем физики является проблема формирования структур в неравновесных динамических системах

[5]. Примером такой системы является термодинамическая система, которая претерпевает фазовый переход первого рода, например, кристаллизацию в водно-солевых растворах.

Процесс кристаллизации водно-солевого раствора является электрически активным процессом, который сопровождается возникновением электрических потенциалов (эффект Воркмана-Рейнольдса) [4]. Этот эффект имеет и примесную природу. Так, причиной возникновения значительной межфазной разности потенциалов является формирование вблизи активного фронта кристаллизации неравновесного двойного электрического слоя, образованного, как правило, примесными ионами [9]. Данный вопрос является не до конца изученным и требует дальнейшего исследования. Цель настоящей работы – изучение электрических потенциалов при фазовых переходах в растворе хлористого натрия, а также дополнительно выполнение термометрии образцов.

**Методика измерений.** Для изучения возникновения ЭДС при кристаллизации водного раствора хлористого натрия разработана методика, заключающаяся в измерениях величины ЭДС на двух химических разных электродах (платиновый и медный), внедрённых внутрь исследуемых образцов. Для исследования водных растворов использовалась климатическая камера фирмы „Espect“ – SU-261, которая позволяла понижать температуру по заданной программе до  $-60\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Понижение и повышение температуры внутри камеры осуществляли циклично. Каждый цикл длился в течение 6 часов. Температура изменялась линейно. Возникающий на электродах сигнал ЭДС подавался по экранированному проводу на систему сбора данных фирмы „Agilent“. Схема установки показана на рис. 1.

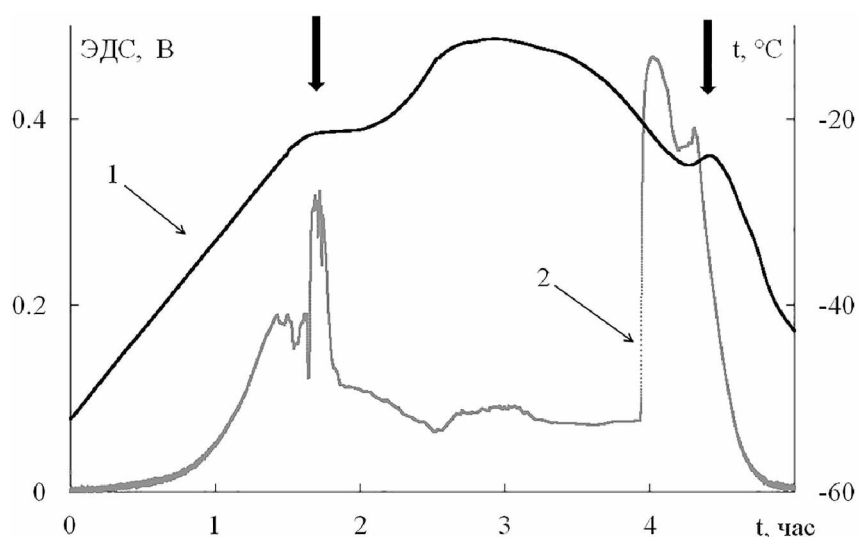


**Рис. 1.** Схема установки для исследования параметров кристаллизации и сигналов ЭДС:  
 1 – исследуемый образец; 2 – термопара; 3 – медный электрод; 4 – платиновый электрод;  
 5 – система сбора данных; 6 – компьютер; 7 – климатическая камера

**Fig. 1.** Installation diagram for the study of crystallization parameters and EMF signals:  
 1 test sample; 2 thermocouple; 3 copper electrode; 4 platinum electrode; 5 data acquisition system; 6 – computer; 7 – climatic chamber

Таким образом, установка позволяет определять температуру фазового перехода в исследуемом образце, по термометрическим данным (по производной температуры образца по времени и в зависимости от его температуры), с одновременной записью ЭДС. В результате измерений были получены следующие результаты.

**Полученные результаты и их обсуждение.** В результате выполненных измерений были получены экспериментальные данные, которые показывают, что ЭДС солевых растворов является величиной не постоянной, а меняющейся в зависимости от многих факторов, в том числе и от фазового состояния вещества. Временные изменения ЭДС и температуры образца для раствора хлористого натрия с общей минерализацией 100 г/кг приведён на рис. 2.



**Рис. 2.** Временной ход изменения: 1 – температуры образца раствора хлористого натрия и 2 – ЭДС между медным и платиновым электродами. Стрелками отмечена эвтектическая температура

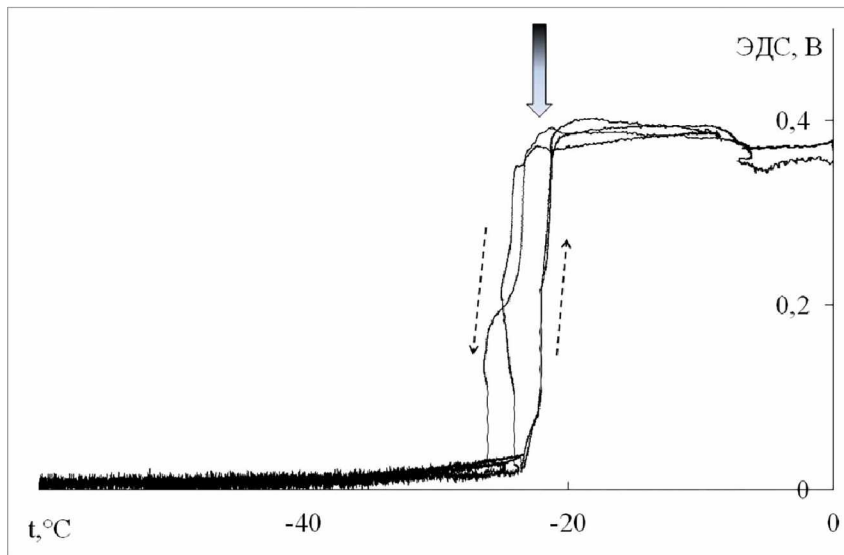
**Fig. 2.** The time course of the change: 1 – temperature of the sample of sodium chloride solution and 2 – EMF between the copper and platinum electrodes. The arrows indicate the eutectic temperature

Как видно из приведённых графиков, при охлаждении раствора хлористого натрия наблюдается некоторое переохлаждение смеси (в области правой стрелки на графике на рис. 2). По поведению температуры в образце выявляются фазовые переходы, соответствующие эвтектической температуре, наблюдаемые в образце (на графике отмечены стрелками). В эти моменты наблюдается резкое изменение ЭДС, максимальное изменение которого достигает пяти раз. При полной кристаллизации всей жидкости в среде ЭДС принимает минимальное значение, а именно 0 В.

При увеличении площади поверхностей контактов эффект резкого изменения ЭДС проявляется слабо или практически исчезает, что показано на рис. 3 для раствора хлористого натрия с общей минерализацией исходного образца 100 г/кг. В этом эксперименте площадь поверхностей электродов увеличена в десять раз.

По полученным графикам видна зависимость вариаций сигналов ЭДС от температуры раствора. В процессе понижения температуры образца значение ЭДС существенно не изменялось. При приближении к температуре эвтектики наблюдалось

некоторое увеличение сигнала (отмечено стрелкой) с последующим его резким спаданием до 0 В, что также говорит о полной кристаллизации объекта и прекращении в нем эволюции кристаллических структур. При деструкции полученного объекта наблюдается возвращение значения ЭДС к первоначальному значению.



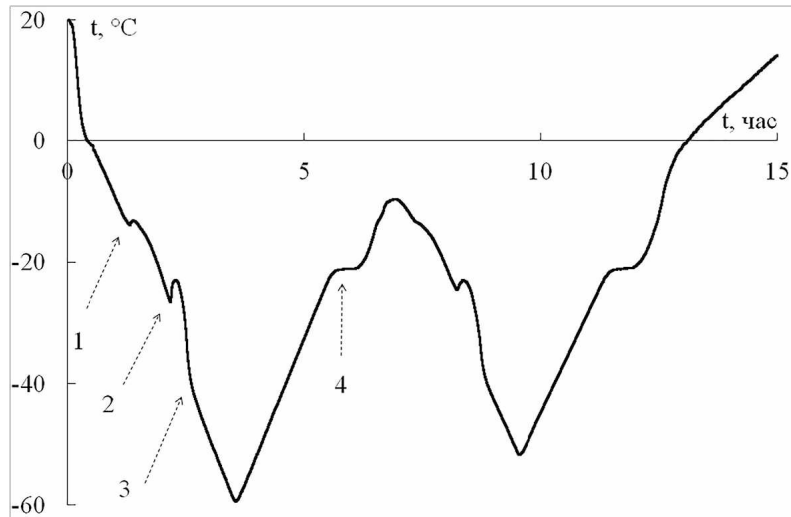
**Рис. 3.** Зависимость ЭДС от температуры образца раствора NaCl с минерализацией 100 г/л. Пунктирными стрелками показано направление процесса. Стрелкой указано значение ЭДС перед кристаллизацией остатков жидкой фазы в объекте

**Fig. 3.** The dependence of the EMF on the temperature of the sample solution of NaCl with a salinity of 100 g/l. Dotted arrows indicate the direction of the process. The arrow indicates the EMF value before crystallization of residues of the liquid phase in the object

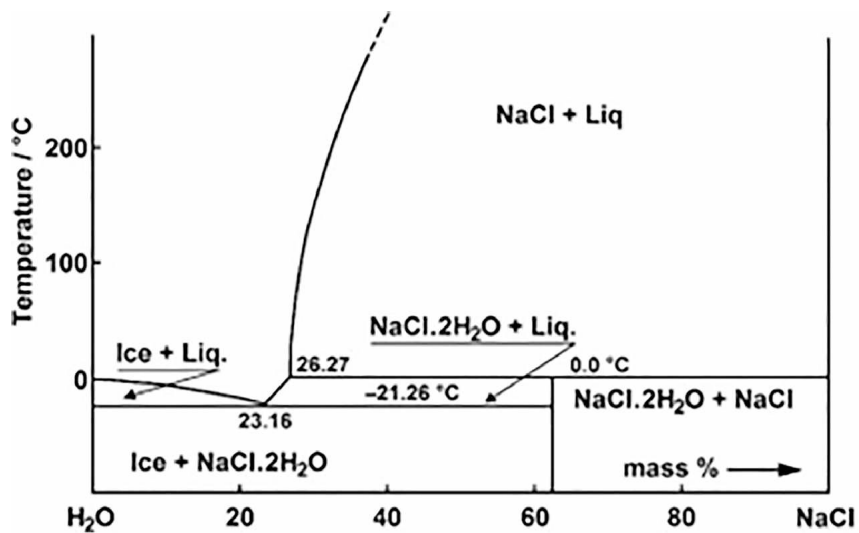
Из термометрических измерений по изменению температуры образца (рис. 4) обнаружено, что при охлаждении и нагревании наблюдается существенное различие физических процессов, протекающих в образце.

На графике хорошо прослеживаются точки (точки „1“, „2“ и „4“) фазового перехода при котором происходит переход жидкой фазы в твёрдую и обратно, причём при охлаждении наблюдается переохлаждение исследуемого раствора в отличие от процесса нагревания образца.

В процессе охлаждения наблюдается перегиб на графике, который отмечен точкой „3“. Наблюдается перегиб графика, что можно связать с тем, что происходит „вымерзание“ остатков плёночной воды, которая существует в исследуемом образце. Возможен и процесс преобразования кристаллогидратов. Из работы [10] следует, что раствор хлористого натрия при кристаллизации может образовывать кристаллогидраты с двумя молекулами воды, что видно из рис. 5. Также из работы [10] следует, что существует метастабильное состояние эвтектики моногидрата хлористого натрия и воды при температуре около  $-26\text{ }^{\circ}\text{C}$ , но в наших экспериментах она не была обнаружена.

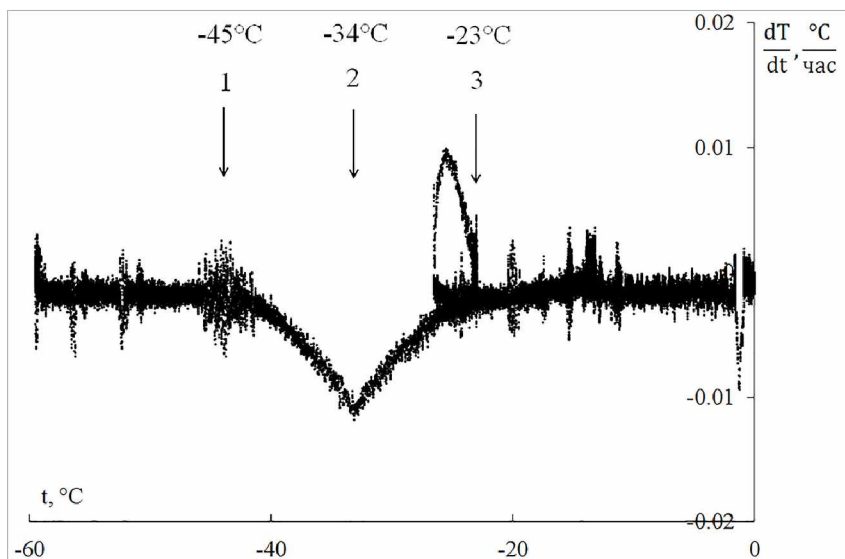


*Рис. 4.* Зависимость температуры образца раствора хлористого натрия (100 г/л) от времени. Стрелками отмечены «особые» точки  
*Fig. 4.* The dependence of the temperature of the sample solution of sodium chloride (100 g/l) on time. The arrows mark „special“ points



*Рис. 5.* Фазовая диаграмма смеси воды и хлористого натрия  
*Fig. 5.* Phase diagram of a mixture of water and sodium chloride

Одним из способов наблюдения за процессами, протекающими в образце, является нахождение производной температуры от времени. Её график представлен на рис. 6.



**Рис. 6.** Производная температуры от времени для образца раствора хлористого натрия (100 г/л) при охлаждении от его температуры. Стрелкой отмечены: 1 – температура на линии Видома; 2 – возможная температура фазовых превращений кристаллогидратов; 3 – начало переохлаждения раствора вблизи температуры эвтектики

**Fig. 6.** The derivative of temperature from time to time for a sample of a sodium chloride solution (100 g/l) when cooled from its temperature. Arrows indicate: 1 – temperature on the Widom line; 2 – possible temperature of phase transformations of crystalline hydrates; 3 – beginning of the supercooling of the solution near the eutectic temperature

Из приведённого графика видно, что при температуре около  $-45\text{ }^{\circ}\text{C}$  наблюдаются флуктуации производной температуры, причём эти флуктуации визуально не фиксируются на рис. 4. Их можно связать с недавно обнаруженной линией Видома [7], на которой резко вырастают флуктуации энтропии и плотности переохлаждённой воды.

#### **Выводы.**

1. Используемая методика определения ЭДС, возникающей на металлических электродах, позволяет исследовать фазовые переходы в растворах при их замерзании.

2. В результате экспериментальных исследований (на примере раствора хлористого натрия) было установлено, что при кристаллизации и разрушении кристаллической структуры образцов различной минерализации отчётливо определяются стадии полной кристаллизации рассолов или начала деструкции кристаллогидратов по изменению ЭДС.

3. При уменьшении размеров электродов, используемых для измерения ЭДС, имеется возможность изучения локальных процессов образования и деструкции кристаллов в растворах.

4. При использовании набора из одинаковых электродов возможно изучение анизотропии процесса фазовых переходов в жидкой среде.

5. По термометрическим измерениям обнаружено, что большую роль играет направление процесса (нагревание или охлаждение). При охлаждении наблюдаются выраженные физические процессы (фазовые переходы, переохлаждение и т.п.), чем при нагревании образца.

6. Производная температуры от времени показала наличие её флуктуации при температуре  $-45^{\circ}\text{C}$ , что связывается с существованием линии Видома.

### *Список литературы*

1. Бордонский Г. С., Гурулев А. А. Изучение характеристик пропускания и отражения микроволнового излучения льдом вблизи температуры таяния // Учёные записки Забайкальского государственного университета. 2018. Т. 13, № 4. С. 80–89.
2. Ванг В. К. Диссипативные структуры в реакционно-диффузных системах. Эксперимент и теория. М.: РХД, 2008. 300 с.
3. Мирошников А. М., Гуцин А. А., Иванов Г. В., Ушакова Н. Н. Водные кластеры в составе антифризов // Техника и технология пищевых производств. 2014. № 3. С. 114–120.
4. Хименков А. Н., Брушков А. В. Введение в структурную криологию. М.: Наука, 2006. 278 с.
5. Шибков А. А., Желтов М. А., Королев А. А., Казаков А. А., Леонов А. А. Влияние поверхностной кинетики на дендритный рост льда в переохлаждённой воде // Кристаллография. 2004. Т. 49, № 6. С. 1154–1162.
6. Bordonskii G. S., Gurulev A. A. Characteristics of thermal radiation of ice covers on water bodies with different mineralization // Water Resources. 2008. Vol. 35, № 2. P. 199–204.
7. Bordonskii G. S., Gurulev A. A. Experimental proof of the existence of a Widom line based on peculiarities of the behavior of hydrogen in nanoporous silicate at  $-45^{\circ}\text{C}$  and atmospheric pressure // Technical Physics Letters. 2017. Vol. 43, № 4. P. 380–382.
8. Bordonsky G. S., Krylov S. D. Salt migration in ice covers of Trans-Baikal lakes // Izvestiya Akademii Nauk, Seriya Geograficheskaya. 2000. Vol. 4. P. 98–102.
9. Bronshteyn, V. L., Chernov A. A. Freezing potentials arising on solidification of dilute aqueous solutions of electrolytes // Journal of Crystal Growth. 1991. Vol. 112, № 1. P. 129–145.
10. Drebuschak V. A., Ogienko A. G., Yunoshev A. S. Metastable eutectic melting in the  $\text{NaCl-H}_2\text{O}$  system // Thermochemica Acta. 2017. Vol. 647. P. 94–100.

*Статья поступила в редакцию 23.05.2019; принята к публикации 09.06.2019*

### **Библиографическое описание статьи**

Гурулёв А. А. Электрические потенциалы и фазовые переходы раствора хлористого натрия // Учёные записки Забайкальского государственного университета. 2019. Т. 14, № 3. С. 67–74. DOI: 10.21209/2308-8761-2019-14-3-67-74.



*Alexandr A. Gurulev,*  
*Candidate of Physics and Mathematics,*  
*Senior Scientific Employee,*  
*Institute of Natural Resources, Ecology and Cryology,*  
*Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences*  
*(16a Nedorezova st., Chita, 672014, Russia),*  
*e-mail: lgc255@mail.ru,*  
*ORCID: 0000-0003-2232-3583*

## Electrical Potentials and Phase Transitions of Sodium Chloride Solution

Due to the wide distribution of salt solutions in nature (in water bodies, in soils, in vegetation, etc.), an urgent task is to study the physicochemical processes taking place in them not only at positive temperatures, but also at negative ones. In the present work, the study of electrokinetic effects accompanying the crystallization of water-salt solutions was carried out using the example of sodium chloride solution. The measurements were performed with a monotonic change in the temperature of the sodium chloride solution at a rate of  $0.28^{\circ}\text{C}/\text{min}$  with simultaneous measurement of the EMF arising between the platinum and copper electrodes, and temperature. As a result of the experiments, a correlation of the EMF signals in the sodium chloride solution with the process of crystallization of the sample at the eutectic temperature was found. At this moment, the magnitude of the EMF signal increases and then sharply tends to the minimum value. Also, by the rate of change of the sample temperature, it is possible to determine phase transitions in liquid and solid media. With joint thermometry and measurements of electric potentials, it is possible to study the features of the processes of formation and destruction of crystals in solutions.

**Keywords:** water-salt solutions, electrical potentials, ice crystallization, thermometry, phase transitions

### References

1. Bordonskij G. S., Gurulev A. A. Izuchenie harakteristik propuskaniya i otrazheniya mikrovolnovogo izlucheniya l'dom vblizi temperatury tayaniya // Uchyonye zapiski Zabajkal'skogo gosudarstvennogo universiteta. 2018. T. 13, № 4. S. 80–89.
2. Vanag V. K. Dissipativnye struktury v reakcionno-diffuznyh sistemah. Eksperiment i teoriya. M.: RHD, 2008. 300 s.
3. Miroshnikov A. M., Gushchin A. A., Ivanov G. V., Ushakova N. N. Vodnye klastery v sostave antifrizov // Tekhnika i tekhnologiya pishchevyyh proizvodstv. 2014. № 3. S. 114–120.
4. Himenkov A. N., Brushkov A. V. Vvedenie v strukturnuyu kriologiyu. M.: Nauka, 2006. 278 s.
5. SHibkov A. A., ZHeltov M. A., Korolev A. A., Kazakov A. A., Leonov A. A. Vliyanie poverhnostnoj kinetiki na dendritnyj rost l'da v pereohlazhdyonnoj vode // Kristallografiya. 2004. T. 49, № 6. S. 1154–1162.
6. Bordonskii G. S., Gurulev A. A. Characteristics of thermal radiation of ice covers on water bodies with different mineralization // Water Resources. 2008. Vol. 35, № 2. P. 199–204.
7. Bordonskii G. S., Gurulev A. A. Experimental proof of the existence of a Widom line based on peculiarities of the behavior of hydrogen in nanoporous silicate at  $-45^{\circ}\text{C}$  and atmospheric pressure // Technical Physics Letters. 2017. Vol. 43, № 4. P. 380–382.
8. Bordonsky G. S., Krylov S. D. Salt migration in ice covers of Trans-Baikal lakes // Izvestiya Akademii Nauk, Seriya Geograficheskaya. 2000. Vol. 4. P. 98–102.

9. Bronshteyn, V. L., Chernov A. A. Freezing potentials arising on solidification of dilute aqueous solutions of electrolytes // Journal of Crystal Growth. 1991. Vol. 112, № 1. P. 129–145.

10. Drebuschak V. A., Ogienko A. G., Yunoshev A. S. Metastable eutectic melting in the NaCl-H<sub>2</sub>O system // Thermochimica Acta. 2017. Vol. 647. P. 94–100.

*Received: May 23, 2019; accepted for publication June 09, 2019*

**Reference to article**

*Gurulev A. A.* Electrical Potentials and Phase Transitions of Sodium Chloride Solution // Scholarly Notes of Transbaikal State University. 2019. Vol. 14, No 3. PP. 67–74. DOI: 10.21209/2308-8761-2019-14-3-67-74.

УДК 551.509.68

DOI: 10.21209/2308-8761-2019-14-3-75-87

**Юрий Федорович Сосновчик,**

*доцент,*

*Забайкальский государственный университет  
(672039, Россия, г. Чита, ул. Александрo-Заводская, 30),*

*e-mail: Sosnovchik@yandex.ru,*

*ORCID: 0000-0003-2731-0191*

**Павел Юрьевич Лукьянов,**

*кандидат технических наук, ведущий программист,*

*Институт природных ресурсов, экологии и криологии СО РАН  
(672014, Россия, г. Чита, Недорезова, 16а),*

*e-mail: lgc255@mail.ru*

### **Физико-математическая модель преодоления огненным фронтом препятствия в виде барьера в условиях низового лесного и степного пожаров**

В работе рассматриваются условия, при которых становится возможным перенос возгорания через препятствие в виде барьера (забор, барьерное защитное устройство, ограждение). Представлен вывод общих формул, связывающих высоту барьера, скорость ветра в порыве и другие факторы при приближении огневого фронта к барьеру. Константы, входящие в окончательные формулы и связанные с физико-химическими свойствами горящих частиц, определяются методами множественного регрессионного анализа путём сопоставления результатов моделирования с экспериментальными данными и данными натуральных наблюдений.

**Ключевые слова:** низовой пожар, перенос возгорания, тлеющие частицы, барьерное защитное устройство

**Введение.** Пусть имеется установленное защитное сооружение (рис. 1) в виде барьера, препятствующее распространению возгорания [10]. Будем считать, что возгорание имеет характер низового лесного или степного пожара. Также будем считать, что:

– материал, из которого изготовлен барьер, имеет достаточные плотность и теплоёмкость, исключаяющие существенный нагрев конструкции, её деформацию, а также возможность вторичного возгорания под воздействием теплового излучения от самой конструкции;

– барьер не имеет отверстий, щелей, неплотностей и других дефектов, что исключает вторичное возгорание за счёт теплового излучения из зоны горения, а также за счёт действия нагретых газов;

– вблизи барьера нет других предметов или конструкций, существенно влияющих на движение воздуха (нагретых газов) в зоне горения;

– угол при вершине барьера таков, что вблизи вершины барьера гарантированно происходит срыв потоков нагретых газов при приближении огневого фронта (т. е. угол при вершине не превышает 90–100 градусов).

Таким образом, единственным механизмом, за счёт которого может произойти переход возгорания на территорию за барьером, является подъём восходящими потоками нагретых газов тлеющих частиц – несгоревших остатков травяного покрова (степной пожар) или горючей подстилки (лесной низовой пожар), и их последующее выпадение на горючий материал с тыльной стороны барьера, причём температура тлеющих частиц за время падения не должна оказаться ниже минимально необходимой для инициирования вторичного возгорания.

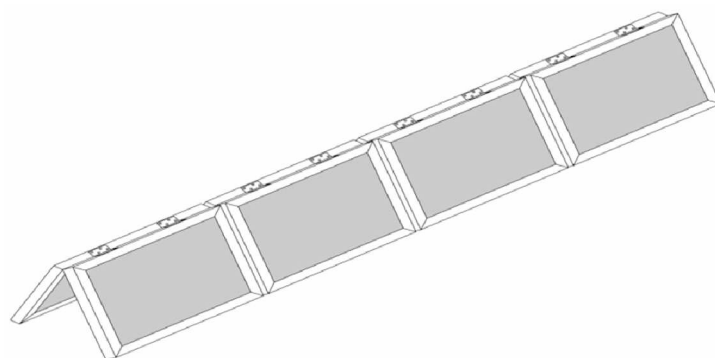


Рис. 1. Противопожарное ограждение в виде барьера

Fig. 1. Fire barrier

Кроме того, требуется учесть особенности районов криолитозоны – пожары в условиях альпийских лугов, в том числе при отрицательных температурах воздуха, а также при наличии слоя многолетней мерзлоты.

При разработке физико-математической модели будем использовать квазианалитический подход – основной вид зависимостей между параметрами, влияющими на происходящие процессы, будем определять методами математического анализа на основе известных законов природы. При описании процессов, в которых велика доля стохастической и вероятностной составляющих (турбулентные потоки нагретых газов вблизи барьера, размеры и форма тлеющих частиц, поднимаемых потоками газов и т. п.) будем использовать принцип рассмотрения наиболее опасного, для переноса возгорания, сочетания параметров. Такой же принцип будет использоваться и в случае недостатка исходных данных для точного решения задачи.

При этом некоторые трудно вычисляемые константы, входящие в полученные аналитическими методами формулы, будут определены на завершающем этапе методами множественного регрессионного анализа путём сопоставления результатов моделирования с данными наблюдений и натурных экспериментов.

**Оценка скорости движения нагретых газов вблизи барьера в отсутствие ветра.** Из уравнения Клапейрона-Менделеева

$$PV = \frac{m}{\mu}RT, \quad (1)$$

(где  $P$ ,  $V$  и  $m$  – давление, объём и масса газа соответственно,  $\mu$  – молярная масса газа,  $T$  – температура газа и  $R = 8.314$  Дж/(моль·К) – универсальная газовая

постоянная) следует, что объёмная плотность газов  $\rho = m/V$  в условиях изобарического процесса  $P = const$  обратно пропорциональна абсолютной температуре, т. е.  $\rho \sim 1/T$ . Таким образом, плотность газов – продуктов горения  $\rho_b = \rho_a \cdot T_a/T_b$ , где  $T_a$  и  $T_b$  – температура воздуха и газов – продуктов горения соответственно, а  $\rho_a$  – плотность ненагретого воздуха в районе пожара. Разница давлений на эффективной высоте горения нагретого до  $T_b$  газа и ненагретого воздуха температуры  $T_a$  составит  $\Delta P = g\gamma H_g(\rho_a - \rho_b)$ , где  $H_g$  – высота травяного покрова (горючей подстилки),  $g$  – ускорение свободного падения, а  $\gamma$  – неизвестный коэффициент, связывающий эффективную высоту зоны горения и высоту травяного покрова (горючей подстилки). В отсутствие механических потерь и завихрений потоков газов, работа  $\Delta A$ , совершаемая над объёмом газа  $\Delta V$  и массой  $m_{\Delta V}$  за счёт разности давлений  $\Delta P$ , переходит в кинетическую энергию поступательного движения, т. е.  $\Delta A = m_{\Delta V} \vartheta_b^2/2$ , где  $\vartheta_b$  – скорость истечения нагретых газов. Учитывая, что  $m_{\Delta V} = \rho_b \cdot \Delta V$ , получаем оценку скорости движения (вверх) газов под действием естественной тяги в отсутствие ветра:

$$\vartheta_b = \sqrt{2g\gamma H_g \left[ \frac{T_b}{T_a} - 1 \right]}. \quad (2)$$

**Оценка скорости движения газов вблизи барьера под воздействием ветра.** Наибольшая скорость движения газов – продуктов горения под воздействием ветра может наблюдаться в случае реализации вблизи барьера режима прямоточной газовой турбины, при котором часть тепловой энергии, выделяющейся при горении, с КПД, не превосходящим теоретического предела для тепловой машины, переходит в кинетическую энергию поступательного движения газов в отсутствие завихрений. Турбулентные движения, которые могут иметь место, отнимают часть кинетической энергии от поступательного движения, поэтому приводят только к уменьшению скорости поступательного движения струи нагретых газов.

Итак, в случае установившегося процесса в зоне горения температура газов увеличивается от  $T_a$  до  $T_b$ , что в соответствии с уравнением (1) в условиях изобарического процесса приводит к их пропорциональному расширению в  $T_b/T_a$  раз. Учтём, что вблизи барьера нет других конструкций, ограничивающих поперечное сечение в области движения газов, поэтому увеличение объёма газов приведёт к пропорциональному увеличению их скорости. В наихудшем, для возникновения вторичного возгорания случае, скорости газов за счёт естественной тяги (2) и за счёт действия ветра складываются по правилу параллелограмма, т. к. направление скорости ветра  $\vartheta_w$  преимущественно горизонтально, а движение газов за счёт естественной тяги при горении – преимущественно вертикально. Итак, имеем следующую оценку для скорости движения газов вблизи барьера со стороны зоны горения с учётом ветрового воздействия:

$$\vartheta_{bw} = \sqrt{2g\gamma H_g \left[ \frac{T_b}{T_a} - 1 \right] + \left[ \vartheta_w \frac{T_b}{T_a} \right]^2}. \quad (3)$$

**Оценки времени угасания (догорания) тлеющей частицы.** Для переноса горения через барьер необходимо, чтобы горящая (тлеющая) частица была поднята в струе газа до вершины барьера, после чего требуется, чтобы в процессе свободного

падения с тыльной стороны барьера частица не успела догореть или потерять температуру до минимально необходимой для инициирования вторичного возгорания или более низкой.

Рассмотрим тепловой баланс частицы неправильной формы, плотностью  $\rho_p$ , удельной теплоёмкостью  $c$ , массой  $m$ , полной площадью наружной поверхности  $S$  и объёмом  $V$ . Будем считать, что горение происходит преимущественно на поверхности частицы. Выделяющаяся тепловая мощность при этом составит  $Q_b = \alpha \cdot S$ , где  $\alpha$  – некоторый коэффициент, зависящий от температуры, материала частицы, влажности и т. п. Тепловая мощность конвективной и лучистой теплоотдачи также пропорциональна  $S$ , т. е.  $Q_h = \beta \cdot S$ . Их разность определяет скорость изменения температуры частицы

$$cm \frac{dT}{dt} = Q_b - Q_h = (\alpha - \beta) \cdot S,$$

т. е. скорость изменения температуры частицы составит:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{(\alpha - \beta) \cdot S}{c\rho_p V}.$$

Отметим, что в возникающих на практике условиях тепловой баланс тлеющей частицы при её свободном падении в ненагретом воздухе с тыльной стороны барьера чаще всего оказывается отрицательным, т. е. приводит к уменьшению температуры и, вследствие этого, к её угасанию.

Рассмотрим частицу сферической формы радиусом  $r$ . Для неё объём  $V = \frac{4}{3} \cdot r^3$ , масса  $m = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \rho_p$ , площадь наружной поверхности  $S = 4\pi r^2$ . Скорость уменьшения её температуры будет обратно пропорциональна её радиусу

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\alpha - \beta}{c\rho_p} \cdot \frac{3}{r}.$$

Примем, что скорость остывания постоянна и радиус частицы изменяется незначительно. Время угасания  $\tau_{ex}$  в этом случае будет прямо пропорционально её радиусу  $r$  и разности температур  $\Delta T$ :  $\tau_{ex} \sim r \cdot \Delta T$ .

Для цилиндрической частицы радиусом  $r$  и длиной  $L$ ,  $L \gg r$ , аналогичным образом получаем  $\frac{dT}{dt} = \frac{\alpha - \beta}{c\rho_p} \cdot \frac{2}{r}$ , что отличается от случая сферической частицы только коэффициентом пропорциональности.

Итак, для частицы цилиндрической формы время угасания также оказывается прямо пропорционально её наименьшему размеру.

Рассмотрим горение частицы при положительном тепловом балансе, когда тепловая мощность, выделяемая при горении, превосходит мощность теплоотдачи, т. е.  $Q_b > Q_h$ . Т. к. горение частицы происходит преимущественно на её наружной поверхности, также при внутреннем горении необходимый для этого кислород поступает во внутренние слои частицы за счёт диффузии через её наружную поверхность,  $Q_b = \sigma \cdot S$ . Т. е.,  $Q_b$  прямо пропорциональна площади наружной поверхности частицы, где  $\sigma$  – некоторый коэффициент.

Скорость потери массы частицы  $\frac{dm}{dt}$  связана с  $Q_b$  как  $Q_b = -\theta \frac{dm}{dt}$ , где  $\theta$  – удельная теплота сгорания материала частицы. Знак «-» в последнем выражении показывает, что масса частицы в процессе горения уменьшается. Итак, имеем:  $Q_b = \sigma \cdot S = -\theta \frac{dm}{dt}$ ,

откуда

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{\sigma}{\theta} \cdot S.$$

Рассмотрим сферическую частицу радиуса  $r$ . Для неё объём  $V = \frac{4}{3} \cdot r^3$ , масса  $m = \rho_p \cdot V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \rho_p$ , площадь наружной поверхности  $S = 4\pi r^2$ . Дифференцируя выражение для массы, получаем  $dm = \frac{4}{3} \pi \cdot \rho_p d(r^3) = 4\pi \cdot \rho_p r^2 dr$ . Подставляя в выражение для  $\frac{dm}{dt}$ , имеем:

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{\sigma}{\theta \rho_p} = const = -\epsilon.$$

Разделяя переменные:  $dr = -\epsilon dt$ . Интегрируя,  $\int dr = -\epsilon \int dt + C_0$ , откуда  $r(t) = -\epsilon t + C_0$ . Пусть при  $t = 0$  начальный радиус частицы равен  $R_0$ , тогда  $\tau_{ex} = \frac{\theta \rho_p}{\sigma} R_0$ , т. е. время догорания прямо пропорционально начальному радиусу частицы.

Для цилиндрической частицы радиусом  $r$  и длиной  $L$ ,  $L \gg r$ ,  $m = \rho_p V = 2\pi \cdot r^2 L$ ,  $S = 2\pi r L$ . Рассматривая горение с уменьшением радиуса  $r$ ,  $dm = \pi \cdot \rho_p L \cdot d(r^2) = 2\pi \cdot \rho_p L \cdot r dr$ . Подставляя  $dm$  и  $S$  в выражение для  $\frac{dm}{dt}$ , получаем выражение, формально идентичное случаю сферической частицы, т.е. время угасания прямо пропорционально наименьшему из размеров (радиусу) цилиндрической частицы и не зависит от её длины.

Итак, для частиц различной формы, рассматривая различные механизмы угасания (за счёт потери температуры и за счёт выгорания), независимо от формы частиц, получен одинаковый результат, что время угасания прямо пропорционально наименьшему из размеров (в трёх ортогональных измерениях) частицы. Различие возможно только в коэффициенте пропорциональности, оценить который из теоретических соображений чрезвычайно затруднительно, поскольку для этого потребуется, в том числе, решение уравнений химической кинетики совместно с уравнениями диффузии с учётом физико-химических свойств горящих частиц, которые не могут быть известны на момент возникновения пожара. Поэтому коэффициент пропорциональности проще определить из натурных наблюдений.

Однако в работах [13; 14] приведены оценки для времени догорания угольных частиц, с учётом коллективных эффектов, возникающих в условиях промышленного котлоагрегата с пневматической подачей топлива,  $\tau_{ex} \sim R_0^2$ . Учитывая, что для возникновения вторичного возгорания в рассматриваемой задаче достаточно попадания одиночных горящих частиц, очевидно, что коллективные эффекты здесь не могут иметь определяющего значения. Итак, будем считать, что  $\tau_{ex} \sim R_0$ , где под  $R_0$  будем подразумевать наименьший размер частицы из трёх ортогональных измерений.

Оценим, каким образом влияют на время угасания температура в зоне горения  $T_b$  и температура, минимально необходимая для поджигания  $T_c$  (очевидно, что  $T_b > T_c$ ). Так как диапазон температур, в котором изменяется температура частицы в ходе её свободного падения, равен  $(T_b - T_c)$ , при одинаковой скорости охлаждения частицы,  $\tau_{ex}$  будет в первом приближении пропорционально величине этого диапазона, т.е.  $\tau_{ex} \sim R_0 \cdot (T_b - T_c)$ . Теперь оценим, каким образом на  $\tau_{ex}$  влияет температура ненагретого воздуха при свободном падении горячей частицы с тыльной стороны барьера. Так как в первом приближении скорость охлаждения частицы прямо пропорцио-

нальна разности температур частицы и воздуха, принимая температуру частицы за  $T_c$ , скорость охлаждения окажется прямо пропорциональной разности  $(T_c - T_a)$ , и, следовательно, время угасания — обратно пропорционально этой величине, т. е.  $\tau_{ex} \sim \frac{1}{T_c - T_a}$ . Итак, имеем оценку для времени угасания с учётом размера частицы, и трёх температур, характеризующих условия пожара:

$$\tau_{ex} \sim R_0 \cdot \frac{T_b - T_c}{T_c - T_a}. \quad (4)$$

**Оценка максимальных размеров частиц, выносимых к вершине барьера.** Рассмотрим частицу у вершины барьера. На неё действует сила тяжести  $F_g = mg$  и аэродинамическая сила  $F_a = P_a \cdot \alpha_a \cdot S_a$ , где  $P_a = \rho_x \cdot \frac{v_{gw}^2}{2}$  — аэродинамическое давление,  $\rho_x$  — плотность газов (продуктов горения) вблизи вершины барьера,  $\alpha_a$  — аэродинамический коэффициент частицы и  $S_a$  — площадь её сечения в направлении, перпендикулярном движению газов. Так как  $\alpha_a$  для частиц сферической и цилиндрической форм составляет 0.5–0.7,  $\rho_x$  зависит главным образом от температуры вблизи вершины барьера, причём наименьшее значение плотности соответствует  $T_b$ , а наибольшее —  $T_a$ . Поскольку в зоне барьера должны возникать воздушные вихри (турбулентность), температура вблизи вершины барьера может варьироваться случайным образом в широких пределах от  $T_b$  до  $T_a$ . Очевидно, что наиболее опасным, с точки зрения переноса возгорания за барьер, в качестве  $\rho_x$  является наибольшее значение плотности воздуха  $\rho_a$  при  $T_a$ .

Условием переноса горячей (тлеющей) частицы через барьер является превосходство аэродинамической силы над силой тяжести, т. е.  $F_a > mg$ . С увеличением размеров частицы (при той же форме) её масса возрастает как  $R_0^3$ , а площадь сечения  $S_a$  и прямо пропорциональная ей аэродинамическая сила — как  $R_0^2$ , т. е. существует максимальный размер частицы, при котором сравниваются аэродинамическая сила и сила тяжести. Это и будет максимальный размер частиц, способных попасть за тыловую сторону барьера.

Рассмотрим сферическую частицу радиусом  $r$  и объёмной плотностью  $\rho_p$ . Для неё масса  $m = \rho_p V = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \rho_p$ , площадь аэродинамического сечения  $S = \pi r^2$ . Из условия  $F_a = mg$  следует:  $P_a \cdot \alpha_a \cdot S_a = mg$ , или  $\rho_a \cdot \frac{v_{gw}^2}{2} \cdot \alpha_a \cdot \pi r^2 = g \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \rho_p$ , откуда получаем оценку для максимального радиуса сферической частицы, выносимой к вершине барьера

$$r = \frac{3}{8} \alpha_a \frac{\rho_a}{\rho_p} \cdot \frac{v_{gw}^2}{g}.$$

Аналогично рассмотрим цилиндрическую частицу радиусом  $r$ , длиной  $L$ ,  $L \gg r$ , и объёмной плотностью  $\rho_p$ . Для неё масса  $m = \rho_p V = \pi r^2 \cdot L \cdot \rho_p$ , площадь аэродинамического сечения  $S = 2rL$ . Из условия  $F_a = mg$  следует:  $P_a \cdot \alpha_a \cdot S_a = mg$ , или  $\rho_a \cdot \frac{v_{gw}^2}{2} \cdot \alpha_a \cdot 2rL = g \cdot \pi r^2 \cdot L \cdot \rho_p$ , откуда  $r = \frac{1}{\pi} \alpha_a \frac{\rho_a}{\rho_p} \cdot \frac{v_{gw}^2}{g}$ , что только коэффициентом пропорциональности отличается от выражения для сферической частицы.

Теперь рассмотрим частицу, наиболее близкую к естественной форме листа растения — в форме сплюснутого цилиндра (эллипсоида) большим радиусом  $r_0$  и малым радиусом  $d_0$ , длиной  $L$ . Данная форма наиболее вероятна в условиях природных пожаров (рис. 2), также эта форма представляет и наибольшую пожарную опасность,

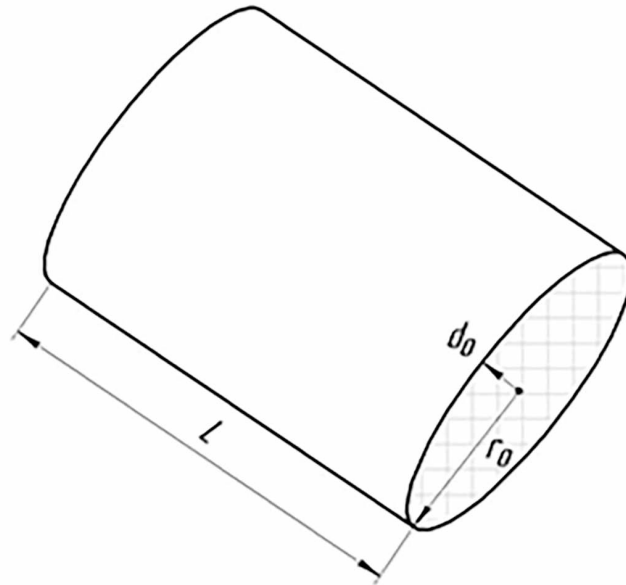


поскольку площадь аэродинамического сечения определяется размером  $r_0$ , а её масса – размером  $d_0$ . Именно такая форма частиц имеет наилучшие возможности для их выноса потоками газов к вершине барьера.

Вводя коэффициент «сплюснутости»  $k_f = \frac{r_0}{d_0}$ , также принимая, что  $m = \rho_p V = \rho_p \cdot 3r_0 \cdot d_0 \cdot L = 3L\rho_p \frac{r_0^2}{k_f}$  и  $S_a = 2r_0L$ , подставляя в уравнение  $F_a = mg$ , получаем формулу для максимального большого радиуса частицы  $r_0$ , которая может быть вынесена газами – продуктами горения к вершине барьера:

$$r_{0max} = \frac{\rho_a \vartheta_{gw}^2 \alpha_a k_f}{3\rho_p g}.$$

Как видим, данная оценка показывает, что максимальный размер  $r_0$  достигается именно для частиц в форме листа при больших значениях  $k_f$  ( $k_f > 10$ ), причём этот размер не зависит от длины листа  $L$ .



**Рис. 2.** Форма тлеющей частицы в виде сплюснутого цилиндра

**Fig. 2.** Shape of a glowing particle in the form of a flattened cylinder

Подставим в последнюю формулу полученную ранее оценку для полной скорости движения газов вблизи барьера (3)

$$r_{0max} = \frac{\rho_a \alpha_a k_f}{3\rho_p g} \left[ 2g\gamma H_g \left[ \frac{T_b}{T_a} - 1 \right] + \left[ \vartheta_w \frac{T_b}{T_a} \right]^2 \right]. \quad (5)$$

Отметим, что при рассмотрении процесса угасания частицы определяющее значение имеет наименьший из размеров в трёх ортогональных измерениях, т. е. в случае сплюснутого цилиндра (листа) – размер  $d_0 = r_0/k_f$ . Для частицы в форме сплюснутого цилиндра формулу для времени угасания (4), вводя коэффициент пропорциональности  $\alpha_{ex}$ , можно записать в следующем виде:

$$\tau_{ex} = \alpha_{ex} \frac{r_0}{k_f} \cdot \frac{T_b - T_c}{T_c - T_a}. \quad (6)$$

**Оценка времени свободного падения тлеющей частицы.** Рассчитаем время свободного падения частицы в форме сплюснутого цилиндра с высоты барьера  $K$  до высоты плотного травяного покрова (горючей подстилки)  $H_g$ . Со стороны барьера, противоположной огневому фронту, должны наблюдаться восходящие движения воздуха за счёт эффекта увлечения восходящими потоками газов – продуктов горения. Эти движения поддерживают частицы, преодолевшие барьер и увеличивают время их свободного падения, что приводит к их угасанию в процессе падения. Будем считать, что вертикальная составляющая скорости движения воздуха с тыльной стороны барьера мала или равна нулю, поскольку мы продолжаем рассматривать наиболее «пожароопасное» сочетание параметров.

Итак, для свободно падающей частицы в форме сплюснутого цилиндра сила тяжести уравновешена аэродинамической силой,  $F_a = mg$ , что определяет скорость её падения  $\vartheta_d$ , или

$$\rho_a \cdot \frac{\vartheta_d^2}{2} \cdot \alpha_a \cdot 2r_0 L = 3L \rho_p \frac{r_0^2}{k_f} g,$$

откуда  $\vartheta_d = \sqrt{\frac{3gr_0}{\alpha_a k_f} \cdot \frac{\rho_p}{\rho_a}}$ .

Частица преодолеет расстояние от вершины барьера до верхнего уровня травы (горючей подстилки) за время

$$\tau_d = \frac{K - H_g}{\vartheta_d} = \frac{K - H_g}{\sqrt{\frac{3gr_0}{\alpha_a k_f} \cdot \frac{\rho_p}{\rho_a}}}. \quad (7)$$

**Вывод основных формул физико-математической модели.** Для переноса возгорания через барьер требуется, чтобы  $\tau_d$  было меньше, чем время угасания  $\tau_{ex}$ , т. е.  $\tau_d \leq \tau_{ex}$ . Подставим в это неравенство выражения (6) и (7)

$$\frac{K - H_g}{\sqrt{\frac{3gr_0}{\alpha_a k_f} \cdot \frac{\rho_p}{\rho_a}}} \leq \alpha_{ex} \frac{r_0}{k_f} \cdot \frac{T_b - T_c}{T_c - T_a}.$$

Возводя в квадрат и выражая  $r_0$  получаем

$$r_0 \geq \sqrt[3]{\frac{\alpha_a k_f^3 \cdot [K - H_g]^2}{3g \cdot \alpha_{ex}^2} \cdot \frac{\rho_a}{\rho_p} \cdot \left[ \frac{T_c - T_a}{T_b - T_c} \right]^2}. \quad (8)$$

Выразим из (5) скорость ветра  $\vartheta_w$ , минимально необходимую для поднятия частицы размером  $r_0$  до вершины барьера

$$\vartheta_w = \frac{T_a}{T_b} \sqrt{\frac{3gr_0}{\alpha_a k_f} \cdot \frac{\rho_p}{\rho_a} - 2g\gamma H_g \left[ \frac{T_b}{T_a} - 1 \right]}.$$

Подставляя в первое слагаемое под знаком радикала минимальный размер частицы  $r_0$ , при котором частица не успеет угаснуть (догореть) во время её свободного падения с тыльной стороны барьера из (8), приводя подобные слагаемые и выполняя очевидные сокращения, имеем

$$\frac{3gr_0 \cdot \rho_p}{\alpha_a k_f \cdot \rho_a} = \sqrt[3]{\left[ \frac{3g \cdot (K - H_g) \cdot \rho_p \cdot T_c - T_a}{\alpha_{ex} \cdot \alpha_a \cdot \rho_a \cdot T_b - T_c} \right]^2}.$$

Выделяя комбинацию трудно определяемых на практике параметров тлеющих частиц, а также других постоянных теории в единую константу, значение которой будет далее определено методами множественного регрессионного анализа,

$$\psi = \frac{3g\rho_p}{\rho_0 \cdot \alpha_{ex} \cdot \alpha_a},$$

где  $\rho_0 = 1.22 \text{ кг/м}^3$  – объёмная плотность воздуха на уровне моря при  $15^\circ\text{C} = 288.15 \text{ K}$ , также учитывая приближённое выражение для плотности воздуха в зависимости от его температуры  $T_a$  и высоты местности  $M$  (в километрах) над уровнем моря

$$\rho_a = \rho_0 \cdot (1 - 0.11 \cdot M) \cdot \frac{288^\circ\text{K}}{T_a},$$

получаем оценку для минимальной скорости ветра в порыве, при которой становится возможным перенос возгорания через барьер с учётом всех рассматриваемых в задаче факторов

$$v_w = \frac{T_a}{T_b} \cdot \sqrt{\left[ \frac{[K - H_g] \cdot T_a}{288^\circ\text{K} \cdot (1 - 0.11 \cdot M)} \cdot \psi \right]^{2/3} \cdot \left[ \frac{T_c - T_a}{T_b - T_c} \right]^{2/3} - 2g\gamma H_g \left[ \frac{T_b}{T_a} - 1 \right]}. \quad (9)$$

Рассматривая полученное выражение в качестве уравнения на высоту барьера  $K$ , разрешая его путём очевидных преобразований, получаем формулу для высоты барьера, минимально необходимой для сдерживания фронта огня в зависимости от скорости ветра в порыве и других факторов

$$K = H_g + \frac{288^\circ\text{K} \cdot (1 - 0.11 \cdot M) \cdot T_b - T_c}{\psi \cdot T_a \cdot T_c - T_a} \cdot \left[ \left[ v_w \cdot \frac{T_b}{T_a} \right]^2 + 2g\gamma H_g \left[ \frac{T_b}{T_a} - 1 \right] \right]^{3/2}. \quad (10)$$

**Анализ полученных результатов.** В окончательное выражение (10) для высоты барьера  $K$ , минимально необходимой для остановки огневого фронта, входят следующие исходные величины:

- $H_g$  – высота (м) плотной части травяного покрова (горючей подстилки);
- $M$  – высота (км) местности над уровнем моря;
- $T_a, T_b$  и  $T_c$  – температура ( $^\circ\text{K}$ ) воздуха, газов – продуктов горения и температура, минимально необходимая для поджигания соответственно;
- $v_w$  – скорость (м/с) ветра в порыве;
- $g$  – ускорение свободного падения,  $g = 9.8 \text{ м/с}^2$ ;
- $\psi$  и  $\gamma$  – коэффициенты (константы теории), определяемые методами регрессионного анализа на основе экспериментальных данных и данных природных наблюдений;  $\gamma$  является безразмерным коэффициентом, размерность  $[\psi] = \text{м}^2/\text{с}^3$ , т. е. размерность скорости, умноженной на ускорение.

Отметим, что высота травяного покрова  $H_g$  входит в формулу дважды – в качестве аддитивного члена, а также в качестве множителя, характеризующего вклад естественной тяги при приближении огневого фронта к барьеру. Первое выражает очевидное обстоятельство – барьер с высотой, меньшей, чем высота травяного покрова, не способен остановить огневой фронт даже при нулевой скорости ветра.

Множитель  $\frac{288 \cdot K \cdot (1 - 0.11 \cdot M)}{T_a}$  выражает вклад изменения плотности воздуха в зависимости от его температуры и высоты местности над уровнем моря. Значение этого множителя уменьшается с увеличением высоты местности над уровнем моря и с ростом температуры воздуха, что приводит к уменьшению максимального размера частиц, выносимых к вершине барьера, вследствие уменьшения плотности воздуха.

Следующий множитель  $\frac{T_b - T_c}{T_c - T_a}$  выражает поправки на температуру в зоне горения, температуру воздуха и температуру поджигания, соотношение между которыми определяет время остывания (догорания) частицы в ходе её свободного падения с тыловой стороны барьера. Так как в этот «поправочный» множитель входит отношение разностей именно абсолютных значений температур (которые могут на практике изменяться в достаточно узком диапазоне), различные встречающиеся в условиях природных пожаров сочетания этих температур могут лишь незначительно влиять на результирующую высоту барьера.

Третий множитель,  $\left[ \left[ \vartheta_w \cdot \frac{T_b}{T_a} \right]^2 + 2g\gamma H_g \left[ \frac{T_b}{T_a} - 1 \right] \right]^{3/2}$ , определяющий высоту барьера  $K$ , по смыслу является кубом максимально возможной скорости движения газов – продуктов горения вблизи барьера. Он, в свою очередь, содержит два слагаемых, первое из которых определяет вклад ветра в общую скорость газов, а второе слагаемое – вклад естественной тяги при горении.

Следует отметить, что скорость ветра  $\vartheta_w$  является главным фактором, определяющим требуемую высоту защитного барьера, поскольку при преобладании в сумме первого слагаемого высота барьера растёт как куб скорости ветра. Напротив, при малых скоростях ветра, определяющим фактором в этом множителе (и для высоты  $K$ ) становятся высота травяного покрова (горючей подстилки) и температура в зоне горения, поскольку именно эти факторы определяют силу естественной тяги. Однако, поскольку общая степень этого множителя  $3/2$ , возрастание высоты барьера  $K$  с ростом значений этих параметров происходит не так быстро, как рост в зависимости от скорости ветра.

Скорость ветра, при которой оба слагаемых в этом множителе сравниваются, в некотором смысле является критической для условий применимости защитного устройства в виде барьера, поскольку при дальнейшем увеличении скорости ветра требуемая высота  $K$  начинает возрастать столь быстро, что делает технически невозможным его монтаж (установку) в условиях ЧС.

Следует также отметить, что зависимость от скорости ветра (первое слагаемое в рассматриваемом множителе) на практике может иметь более сложный характер, поскольку, кроме скорости ветра, в это соотношение входит также и абсолютная температура в зоне горения, которая, в свою очередь, тоже сложным образом зависит от скорости ветра. Так, при очень большой скорости ветра, когда в зону горения поступает воздух при большом коэффициенте избытка, возможно уменьшение температуры газов в зоне горения вплоть до угасания отдельных очагов (так называемые «задувание» пламени). Данный эффект также может быть учтён в рамках настоя-

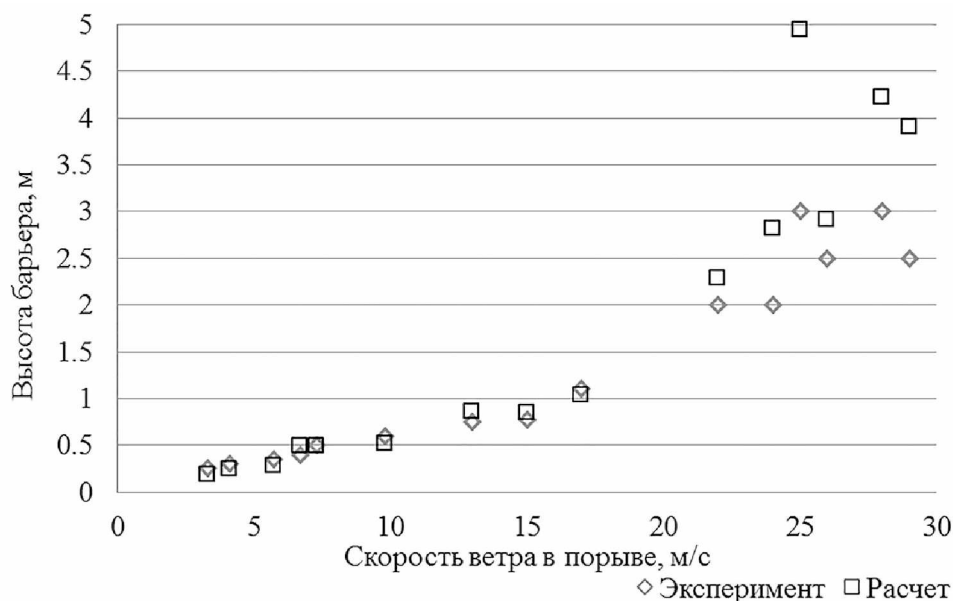
щей модели путём корректного указания температуры газов в зоне горения. Вообще, рассмотрение температуры в зоне горения в зависимости от состава растительного покрова, его физико-химических свойств и скорости ветра представляет собой отдельную задачу и выходит за рамки данного исследования.

Однако следует учесть, что температура в зоне горения в условиях степного пожара обыкновенно варьируется в узком диапазоне – от температуры воспламенения (ок. 600 °К) до 900–1000 °К, т. е. приблизительно в 1.5 раза, поскольку плотность горючего материала достаточно низка. В формулу для высоты барьера  $K$  входят отношения именно абсолютных значений температур, которые в условиях природных пожаров также могут варьироваться лишь незначительно. Поэтому для практических целей достаточно рассмотрения 2–3 градаций значений температуры в зоне горения, при этом главными факторами, определяющими требуемую высоту барьера  $K$ , являются скорость ветра и высота травяного покрова.

Также отметим, что полученные формулы неявным образом учитывают ещё один параметр, существенно влияющий на рассматриваемые процессы – содержание влаги в горючем материале, поскольку входящие в формулы температуры  $T_b$  и  $T_c$  определяются, в том числе, и его абсолютной влажностью.

**Определение констант  $\psi$  и  $\gamma$  методами множественного регрессионного анализа.** Экспериментальные данные для относительно малых скоростей ветра были получены вблизи с. Карповка (Читинский сельский р-н) в условиях контролируемого пала и на учебно-тренировочном полигоне ПЧ № 2 ГУ МЧС России по Забайкальскому краю. Определялась максимальная высота барьера, преодолеваемая огненным фронтом, и (или) минимальная высота барьера, остановившего возгорание. Данные для больших (более 15 м/с) скоростей ветра были получены ретроспективно, в результате анализа развития и хода тушения пожаров на реальных объектах, при которых имело место преодоление фронтом огня различных сооружений в форме барьеров (заборы, малоэтажные строения, насыпи и т. п.), в том числе пожаров вблизи пос. Смоленка (Читинский сельский р-н) в апреле 2015 г. и пос. Большая Тура (Карымский р-н Забайкальского края) в апреле 2014 г. Экспериментальные данные и данные натурных наблюдений были сведены в таблицу в программе Microsoft Excel и ранжированы по возрастанию скорости ветра в порыве. Для условий каждого эксперимента и натурального наблюдения по формуле (10) рассчитывалась высота барьера  $K$ . Высоты барьера  $K_{exp}$ , полученные в ходе экспериментов и натурных наблюдений, и соответствующие условиям данного возгорания высоты барьеров  $K$ , рассчитанные по формуле (10) выводились на график (рис. 3).

Значения констант  $\psi$  и  $\gamma$  варьировались вручную, по алгоритму, близкому к описанному в работе [15] с целью обеспечить наилучшее согласование теоретических и экспериментальных данных на графике. В результате ручного подбора были определены, как обеспечивающие удовлетворительное соответствие данных, следующие значения для констант  $\psi$  и  $\gamma$ :  $\psi = 40\,000 \text{ м}^2/\text{с}^3$  и  $\gamma = 5$ .



*Рис. 3.* Сравнение экспериментальных и теоретических значений высот барьера  $K$

*Fig. 3.* Comparison of experimental and theoretical values of barrier heights  $K$

Более точное определение констант  $\psi$  и  $\gamma$  (например, с использованием критерия минимума суммы квадратов отклонений) является вряд ли целесообразным, поскольку каждое возгорание имело ряд не формализуемых математически особенностей. Так, значительные расхождения на графике для скоростей ветра более 20 м/с объясняются тем, что в условиях реальных пожаров имело место преодоление барьера, т. е. высота сооружения оказалась явно недостаточной для остановки огневого фронта. Кроме того, формулы (9), (10) имеют оценочный характер и факторы, влияющие на высоту  $K$ , не могут прогнозироваться с высокой точностью. В частности, таким трудно прогнозируемым фактором является скорость ветра в порыве, которая может зависеть от микрорельефа местности, характера растительного покрова и т. п. особенностей.

**Заключение.** Получены оценочные формулы, позволяющие рассчитать с учетом высоты травяного покрова (горючей подстилки) и других факторов в условиях низового пожара скорость ветра в порыве, при которой становится возможным преодоление огневым фронтом барьера (защитного устройства, забора, сооружения) заданной высоты и минимальную высоту барьера, способного остановить фронт огня при заданной скорости ветра в порыве. Константы, не поддающиеся аналитическому расчёту и связанные с физико-химическими свойствами горящих частиц были определены методами множественного регрессионного анализа путём сравнения с экспериментальными данными и данными натурных наблюдений. Разработанная физико-математическая модель может быть использована как для оперативного определения оптимальных размеров защитных устройств при тушении пожаров, так и для оценки противопожарных свойств заграждений, заборов и иных сооружений.

#### Список литературы

1. Воробьев Ю. Л., Акимов В. А., Соколов Ю. И. Лесные пожары на территории России: Состояние и проблемы. М.: Дэкс-ПРЕСС, 2004. С. 5–9, 100–203.

2. Коморовский В. С. Оценка возможности прогнозирования распространения лесных пожаров по данным ИСДМ-РОСЛЕСХОЗ. Красноярск: Сибирский государственный технологический университет, 2010. 6 с.
3. Софронов М. А., Волокитина А. В. Пирологическое районирование в таёжной зоне. Новосибирск: Наука, 1990. 204 с.
4. Щербаков И. С. Методика тушения низовых лесных пожаров с использованием струи переохлаждённого водяного пара: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.05. Иркутск, 2005, 149 с.
5. Гундар С. В., Данилов М. М., Денисов А. Н., Опарин И. Д. Ресурсное обоснование сил и средств для тушения низового лесного пожара // Технологии техносферной безопасности. 2012. № 2. С. 1.
6. Ковалев А. Н., Журавлева Л. А. Перспективные направления тушения низовых лесных и степных пожаров // Научная жизнь. 2012. № 4. С. 153–158.
7. Журавлева Л. А., Ковалев А. Н. Тушение низовых лесных и степных пожаров водяным паром // Вестник Саратовского госагроуниверситета им. Н.И. Вавилова. 2014. № 2. С. 49–51.
8. Сосновчик Ю. Ф. Способ предотвращения распространения низового лесного или степного пожара и устройство для его осуществления: пат. 2643595 Рос. Федерация. МПК А62С 3/02. №2016145532/12(073168): заявл. 21.11.2016; опубл. 02.02.2018.
9. Сосновчик Ю. Ф. Закономерность развития низовых лесных пожаров, метод профилактики и предотвращения распространения низового лесного пожара // Междунар. науч.-практ. конф., посвящ. 130-й годовщине со дня рождения академика Н. И. Вавилова. Саратов: Саратовский ГАУ: Амирит, 2017. С. 259–266.
10. Сосновчик Ю. Ф. Мобильный комплекс для предотвращения и тушения лесных пожаров: пат. 2643599 Рос. Федерация. МПК А62С 3/02. №2017100874/12(001406): заявл. 10.01.2017; опубл. 02.02.2018.
11. Сосновчик Ю. Ф. Противопожарная профилактика в лесу, разработка техники для профилактики и тушения лесных пожаров // Кулагинские чтения: техника и технологии производственных процессов: материалы XVII Междунар. науч.-практ. конф. Чита: ЗабГУ, 2017. С. 234–242.
12. Сосновчик Ю. Ф. Изучение лесных пожаров в мире и технология профилактики пожаров в Забайкальском крае: // Проблемы, перспективы и направления инновационного развития науки: материалы междунар. науч.-практ. конф. Уфа: АЭТЕРНА, 2016. С. 37–42.
13. Бабий В. И., Куваев Ю. Ф. Горение угольной пыли и расчёт пылеугольного факела. М.: Энергоатомиздат, 1986. 208с.
14. Хаджинов Е. А., Бондаренко Б. И. Экспериментальное исследование кинетики сгорания одиночных угольных частиц // Вестник Приазовского государственного технического университета. Теплотехника и теплоэнергетика. 2013. № 26. С. 121–128.
15. Лукьянов П. Ю., Гришкин А. Д., Иванова Т. В. Численное построение регрессий произвольными функциями многих переменных. Дифференциальные уравнения и аналитическая теория. Чита: ЧитГПУ, 1999. 104 с.

*Статья поступила в редакцию 23.05.2019; принята к публикации 15.06.2019*

#### **Библиографическое описание статьи**

*Сосновчик Ю. Ф., Лукьянов П. Ю.* Физико-математическая модель преодоления огненным фронтом препятствия в виде барьера в условиях низового лесного и степного пожаров // Учёные записки Забайкальского государственного университета. 2019. Т. 14, № 3. С. 75–87. DOI: 10.21209/2308-8761-2019-14-3-75-87.

**Yury F. Sosnowchik,**

*Associate Professor,*

*Transbaikal State University,*

*(30 Aleksandro-Zavodskaya st., Chita, 672039, Russia),*

*e-mail: Sosnovchik@yandex.ru,*

*ORCID: 0000-0003-2731-0191*

**Pavel Yu. Lukyanov,**

*Candidate of Engineering Sciences,*

*Lead Programmer,*

*Institute of Natural Resources, Ecology and Cryology SB RAS,*

*(16a Nedorezova st., Chita, 672014, Russia),*

*e-mail: lgc255@mail.ru*

### **Physical-Mathematical Model of the Flame Front Overcoming of an Obstacle in the Form of a Barrier under the Conditions of Lowflow Forest and Steppe Fire**

The paper considers the conditions under which it becomes possible to transfer the flame front through an obstacle in the form of a barrier (fence, barrier protection device, barrage). The derivation of the general formulas links the height of the barrier, the gust speed and other factors when the approaching the flame front to the barrier is presented. The constants, which inbox the final formulas and related to the physicochemical properties of the smoldering particles are determined by the methods of multiple regression analysis by the comparison the modelling results with experimental data and field observations.

**Keywords:** ground fire, ignition transfer, smoldering particles, barrier protection device

#### **References**

1. Vorob'ev Yu. L., Akimov V. A., Sokolov YU. I. Lesnye pozhary na territorii Rossii: Sostoyanie i problemy. M.: Deks-PRESS, 2004. S. 5–9, 100–203.
2. Komorovskij V. S. Ocenka vozmozhnosti prognozirovaniya rasprostraneniya lesnyh pozharov po dannym ISDM-ROSLESKHOZ. Krasnoyarsk: Sibirskij gosudarstvennyj tekhnologicheskij universitet, 2010. 6 s.
3. Sofronov M. A., Volokitina A. V. Pirologicheskoe rajonirovanie v tayozhnoj zone. Novosibirsk: Nauka, 1990. 204 s.
4. SHCHerbakov I. S. Metodika tusheniya nizovyh lesnyh pozharov s ispol'zovaniem strui pereohlazhdyonnogo vodyanogo para: dis. ... kand. tekhn. nauk: 01.02.05. Irkutsk, 2005, 149 s.
5. Gundar S. V., Danilov M. M., Denisov A. N., Oparin I. D. Resursnoe obosnovanie sil i sredstv dlya tusheniya nizovogo lesnogo pozhara // Tekhnologii tekhnosfernoj bezopasnosti. 2012. № 2. S. 1.
6. Kovalev A. N., ZHuravleva L. A. Perspektivnye napravleniya tusheniya nizovyh lesnyh i stepnyh pozharov // Nauchnaya zhizn'. 2012. № 4. S. 153–158.
7. ZHuravleva L. A., Kovalev A. N. Tushenie nizovyh lesnyh i stepnyh pozharov vodyanym parom // Vestnik Saratovskogo gosagrouniversiteta im. N.I. Vavilova. 2014. № 2. S. 49–51.
8. Sosnovchik Yu. F. Sposob predotvrashcheniya rasprostraneniya nizovogo lesnogo ili stepnogo pozhara i ustrojstvo dlya ego osushchestvleniya: pat. 2643595 Ros. Federaciya. MPK A62S 3/02. №2016145532/12(073168): zayavl. 21.11.2016; opubl. 02.02.2018.
9. Sosnovchik Yu. F. Zakonomernost' razvitiya nizovyh lesnyh pozharov, metod profilaktiki i predotvrashcheniya rasprostraneniya nizovogo lesnogo pozhara // Mezhdunar. nauch.-prakt.



konf., posvyashch. 130-j godovshchine so dnya rozhdeniya akademika N. I. Vavilova. Saratov: Saratovskij GAU: Amirit, 2017. S. 259–266.

10. Sosnovchik YU. F. Mobil'nyj kompleks dlya predotvrashcheniya i tusheniya lesnyh pozharov: pat. 2643599 Ros. Federaciya. MPK A62S 3/02. №2017100874/12(001406): zayavl. 10.01.2017; opubl. 02.02.2018.

11. Sosnovchik YU. F. Protivopozharnaya profilaktika v lesu, razrabotka tekhniki dlya profilaktiki i tusheniya lesnyh pozharov // Kulaginskie chteniya: tekhnika i tekhnologii proizvodstvennyh processov: materialy XVII Mezhdunar. nauch.-prakt. konf. CHita: ZabGU, 2017. S. 234–242.

12. Sosnovchik YU. F. Izuchenie lesnyh pozharov v mire i tekhnologiya profilaktiki pozharov v Zabajkal'skom krae: // Problemy, perspektivy i napravleniya innovacionnogo razvitiya nauki: materialy mezhdunar. nauch.-prakt. konf. Ufa: AETERNA, 2016. S. 37–42.

13. Babij V. I., Kuvaev YU .F. Gorenje ugol'noj pyli i raschyot pyleugol'nogo fakela. M.: Energoatomizdat, 1986. 208s.

14. Hadzhinov E. A., Bondarenko B. I. Eksperimental'noe issledovanie kinetiki sgoraniya odinochnykh ugol'nyh chastic // Vestnik Priazovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Teplotekhnika i teploenergetika. 2013. № 26. S. 121–128.

15. Luk'yanov P. YU., Grishkin A. D., Ivanova T. V. CHislennoe postroenie regressij proizvod'nymi funkciyami mnogih peremennykh. Differencial'nye uravneniya i analiticheskaya teoriya. CHita: CHitGPTU, 1999. 104 s.

*Received: May 23, 2019; accepted for publication June 16, 2019*

#### Reference to article

*Sosnowchik Yu. F., Lukyanov P.Yu.* Physical-Mathematical Model of the Flame Front Overcoming of an Obstacle in the Form of a Barrier under the Conditions of Lowflow Forest and Steppe Fire // Scholarly Notes of Transbaikal State University. 2019. Vol. 14, No. 3. PP. 75–87. DOI: 10.21209/2308-8761-2019-14-3-75-87.

# ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

## GUIDELINES FOR AUTHORS

Редакция принимает **не опубликованные** ранее материалы объёмом до 1 п. л. (40 000 знаков с пробелами), выполненные в жанрах:

Жанр	Минимальный объём
статья теоретического и эмпирического характера, содержащая основные научные результаты, полученные автором	0,5 п. л. (20 000 знаков)
научные доклады	0,3 п. л. (12 000 знаков)
научные обзоры рецензии	0,2 п. л. (8 000 знаков)

### В редакцию НЕОБХОДИМО ПРЕДСТАВИТЬ:

1. Электронный вариант статьи. В имени файла указывается фамилия автора и название статьи.
2. Электронный вариант заполненного лицензионного договора.
3. Отзыв научного руководителя с указанием новизны и достоверности исследования, если автор статьи – аспирант.
4. Личная карточка автора — сведения об авторе/авторах.

### СТРУКТУРА СТАТЬИ, ПРЕДСТАВЛЯЕМОЙ В РЕДКОЛЛЕГИЮ ЖУРНАЛА

**Отрасль науки (рубрика журнала)**

**Код: УДК, ORCID**

**Инициалы, фамилия автора** приводятся на русском и английском языках. Количество соавторов в статье может быть не более 5. При наличии соавторов первым указывается ответственный/основной автор. На русском и английском языках даётся описание вклада в исследование каждого автора (по 1 предложению).

**Город, страна** на русском и английском языках.

**Место работы** (постоянное и при наличии — место выполнения научного проекта) — на русском и английском языках.

**Почтовый адрес** — на русском и английском языках.

**Источники финансирования статьи** (при их наличии) — на русском и английском языках.

**Название статьи** — на русском и английском языках строчными буквами (не заглавными).

**Аннотация:** 150–200 слов на русском и английском языках. Текст аннотации должен включать основные результаты статьи: актуальность, методы, выводы исследования. Аннотация не должна содержать каких-либо ссылок.

**Ключевые слова или словосочетания** (5–7 терминов) отделяются друг от друга запятой. Приводятся на русском и английском языках.

**Основной текст статьи**, содержащий следующие блоки: вводную часть, данные о методологии и методике исследования, результаты исследования, обсуждение результатов, заключение — выводы. **Название блоков выделяется полужирным шрифтом.**

Статья должна иметь внутритекстовые ссылки на цитируемые источники. Ссылки приводятся в квадратных скобках с указанием порядкового номера в списке литературы и страницы, например [1, с. 25]. Несколько источников отделяются друг от друга точкой с запятой, например [1; 3; 4].

**Список литературы** указывается в алфавитном порядке и должен включать не менее 10 источников. Желательно, чтобы в нём были представлены зарубежные источники. Литература на иностранных языках должна следовать за литературой на русском языке.

Учебные пособия, публицистика, архивы, справочные, словарные и законодательные материалы являются источниками, не входят в список литературы и выносятся в текст статьи в виде подстрочных ссылок (сноски внизу страницы). Маркер сноски – арабская цифра, нумерация — постраничная.

Список литературы оформляется согласно ГОСТу Р 7.0.5-2008. Для каждого источника обязательно указываются издательство, общее количество страниц.

**Самоцитирование** допускается в объёме не более 20 % от общего количества источников в списке литературы.

**Объём** цитирования в статье должен составлять не более 30 % от общего объёма статьи.

## ТЕХНИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ СТАТЬИ

**Рабочие языки:** русский и английский.

**Общие требования:** формат – А4, ориентация – книжная.

**Параметры страницы:** верхнее и нижнее поля — 2; левое и правое поля — 2,5. Шрифт Arial, кегль 14, интервал полуторный. Отступ первой строки — 1,25. Текст без переносов, выравнивание по ширине.

При использовании дополнительных шрифтов при наборе статьи следует представить их в редакцию.

При наличии в статье других языков необходимо дублировать статью в формате PDF.

На последней странице статьи указывается, что «статья публикуется впервые», ставятся дата и ФИО автора(-ов). Статья должна быть со сквозной нумерацией. На последней странице указывается, что «статья публикуется впервые», ставятся дата и подпись.

**Особенности набора слов, цифр, формул, единиц измерения:**

Единицы измерения отделяются от символов и цифр, к которым они относятся. Следует различать: О (буква) и 0 (ноль), 1 (единица) и I (римская единица или буква «и») и т. д. Необходимо отличать дефис (-) и тире (–). Не следует заменять букву «ё» на «е».

**Таблицы** оформляются в формате Word, должны быть озаглавлены и иметь сквозную нумерацию в пределах статьи, обозначаемую арабскими цифрами, например, *таблица 1*, в тексте ссылки нужно писать сокращённо *табл. 1*. Содержание таблиц не должно дублировать текст. Слова в таблицах должны быть написаны

полностью, верно должны быть расставлены переносы. В ячейке таблицы в конце предложения точка не ставится.

**Рисунки** оформляются только в чёрно-белом варианте (графики, диаграммы — формат Excell, схемы, карты, фотографии), приводятся со сквозной нумерацией (арабскими цифрами) и везде обозначаются сокращённо, например *рис. 1*. Предоставляются в формате jpg (разрешение не менее 300 т/д) отдельными файлами с указанием его порядкового номера, фамилии автора(-ов) и названия статьи. Размер рисунка 170 × 240 мм. Все детали рисунка при его уменьшении должны хорошо различаться. Все **подрисуночные подписи на русском и английском языках** прилагаются отдельным списком в конце статьи. Объём рисунков не должен превышать  $\frac{1}{4}$  объёма статьи.

### **ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ К СТАТЬЯМ ПО НАПРАВЛЕНИЮ «ФИЗИКА, МАТЕМАТИКА, ТЕХНИКА, ТЕХНОЛОГИЯ»**

Предоставляемые файлы должны обладать расширением **.tex** и **.pdf**. Издательство использует систему вёрстки miktex для Windows версии не ниже 2.7. Перечень используемых подпакетов в файле-образце.

С сайта необходимо скачать образец оформления статьи (с готовыми настройками).

**Материалы, не соответствующие предъявленным требованиям, к рассмотрению не принимаются.**

**Авторы несут полную ответственность за ссылочный аппарат, подбор и изложение фактов, представленных в статье.**

**Почтовые расходы по пересылке авторского экземпляра журнала составляют 200 р.**



**Пакет документов, необходимый для опубликования материалов, отсылается по электронной почте: [zab-nauka@mail.ru](mailto:zab-nauka@mail.ru).**

**Адрес редакции:**  
672007, г. Чита, ул. Бабушкина, 129.  
Забайкальский государственный университет.  
Редакция научных журналов (каб. 126).

**Ответственный секретарь:**  
Седина Елена Витальевна,  
Блажевская Ирина Николаевна.  
Тел. +7(3022) 35-24-79, e-mail: [zab-nauka@mail.ru](mailto:zab-nauka@mail.ru)